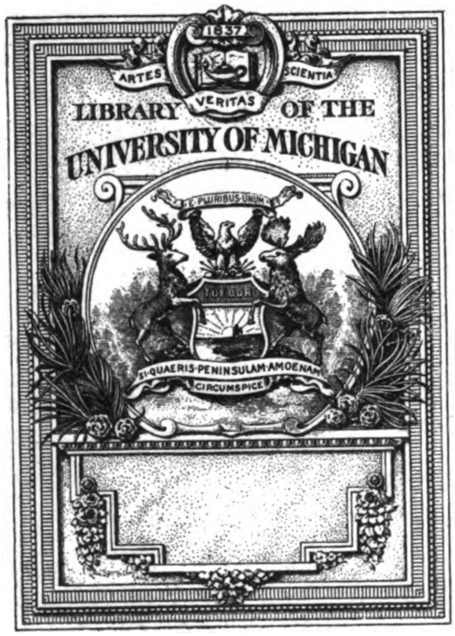

1837
ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
E PLURIBUS UNUM
TUEBOR
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.

IMPRIMERIE DE BACHELIER,
RUE DU JARDINET, N° 12.

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES,

OU

RECUEIL MENSUEL

DE MÉMOIRES SUR LES DIVERSES PARTIES DES MATHÉMATIQUES;

Publié

PAR JOSEPH LIOUVILLE,
Ancien Elève de l'École Polytechnique, répétiteur d'Analyse à cette École.

TOME DEUXIÈME.

ANNÉE 1837.

PARIS,
BACHELIER, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU DES LONGITUDES, ETC.,
QUAI DES AUGUSTINS, N° 55.

1837

TABLE DES MATIÈRES.

Solution d'un Problème d'Analyse ; par M. *Liouville*. . . . . Page 1
Solution d'une question qui se présente dans le calcul des Probabilités ; par M. *Mondésir*. 3
Note sur les points singuliers des courbes ; par M. *Plucker*. 11
Second Mémoire sur le développement des fonctions ou parties de fonctions en séries dont les divers termes sont assujétis à satisfaire à une même équation différentielle du second ordre, contenant un paramètre variable, par M. *Liouville*. 16
Extrait d'une lettre de M. *Terquem* à M. *Liouville*. 36
Note sur les équations indéterminées du second degré. — Formules d'Euler pour la résolution de l'équation $Cx^2 \mp A = y^2$. — Leur identité avec celles des algébristes indiens et arabes. — Démonstration géométrique de ces formules ; par M. *Chasles*. 37
Mémoire sur la classification des transcendantes, et sur l'impossibilité d'exprimer les racines de certaines équations en fonction finie explicite des coefficients ; par M. *Liouville*. 56
Sur le développement de $(1 - 2xz + z^2)^{-\frac{1}{2}}$; par MM. *Ivory* et *Jacobi*. . 105
Sur la sommation d'une série ; par M. *Liouville*. 107
Mémoire sur une méthode générale d'évaluer le travail dû au frottement entre les pièces des machines qui se meuvent ensemble en se pressant mutuellement. — Application aux engrenages coniques, cylindriques, et à la vis sans fin ; par M. *Combes*. 109
Note sur une manière simple de calculer la pression produite par les parois d'un canal dans lequel se meut un fluide incompressible ; par M. *Coriolis*. . 130
Sur la mesure de la surface convexe d'un prisme ou d'un cylindre tronqué ; par M. *Paul Breton*. 133
Note sur le développement de $(1 - 2xz + z^2)^{-\frac{1}{2}}$; par M. *Liouville*. . . 135
Note sur un passage de la seconde partie de la Théorie des Fonctions analytiques ; par M. *Poisson*. 140
Mémoire sur les surfaces isothermes dans les corps solides homogènes en équilibre de température ; par M. *Lamé*. 147
Note de M. *Poisson* relative au mémoire précédent. 184

Addition à la note de M. *Poisson* insérée dans le numéro précédent de ce Journal; par l'Auteur. 189
Mémoire sur l'interpolation ; par M. *Cauchy*. 193
Note sur un passage de la *Mécanique céleste* relatif à la théorie de la figure des planètes ; par M. *Liouville*. 206
Extrait d'un mémoire sur le développement des fonctions en séries dont les différents termes sont assujétis à satisfaire à une même équation différentielle linéaire, contenant un paramètre variable ; par MM. *Sturm* et *Liouville*. 220
Remarques sur les intégrales des fractions rationnelles ; par M. *Poisson*. . . 224
Mémoire sur le degré d'approximation qu'on obtient pour les valeurs numériques d'une variable qui satisfait à une équation différentielle, en employant, pour calculer ces valeurs, diverses équations aux différences plus ou moins approchées ; par M. *Coriolis* 229
Sur une lettre de d'Alembert à Lagrange ; par M. *Liouville*. 245
Observations sur des théorèmes de Géométrie énoncés, page 160 de ce volume et page 222 du volume précédent ; par M. *Binet*. 248
Recherches sur les nombres ; par M. *Lebesgue*. 253
Note sur un cas particulier de la construction des tangentes aux projections des courbes, pour lequel les méthodes générales sont en défaut ; par M. *Chasles*. 293
Théorèmes sur les contacts des lignes et des surfaces courbes ; par M. *Chasles*. 299
Note relative à un passage de la *Mécanique céleste* ; par M. *Poisson*. . . . 312
Remarques sur l'intégration des équations différentielles de la Dynamique ; par M. *Poisson*. 317
Thèses de Mécanique et d'Astronomie ; par M. *Lebesgue*. 337
Recherches sur les moyens de reconnaître si un problème de Géométrie peut se résoudre avec la règle et le compas ; par M. *Wantzel*. 366
Solution d'un problème de Probabilité ; par M. *Poisson*. 373
Mémoire sur diverses manières de généraliser les propriétés des diamètres conjugués dans les sections coniques. — Nouveaux théorèmes de Perspective pour la transformation des relations métriques des figures. — Principes de Géométrie plane analogues à ceux de la Perspective. Manière de démontrer, dans le cône oblique, les propriétés des foyers des sections coniques ; par M. *Chasles*. 388
Note sur la variation des constantes arbitraires dans les problèmes de Mécanique ; par M. *Cauchy*. 406
Sur quelques propriétés générales des surfaces gauches ; par M. *Chasles*. . 413
Troisième mémoire sur le développement des fonctions ou parties de fonctions en séries dont les divers termes sont assujétis à satisfaire à une même équation différentielle du second ordre, contenant un paramètre variable ; par M. *Liouville*. 418

Note sur une propriété des sections coniques; par M. *Pagès* 437
Solution nouvelle d'un problème d'Analyse relatif aux phénomènes thermo-mécaniques; par M. *Liouville* 439
Note sur l'intégration d'un système d'équations différentielles du second ordre, entre un nombre quelconque de variables, analogues à celles du mouvement d'un point libre autour d'un centre fixe, sollicité par une force fonction de la distance au centre; par M. *Binet* 457
Solution d'un problème de Probabilité relatif au jeu de rencontre; par M. *Catalan* 469
Sur la formule de Taylor; par M. *Liouville* 483
Errata 485

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.

JOURNAL
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

SOLUTION D'UN PROBLÈME D'ANALYSE ;

PAR JOSEPH LIOUVILLE.

1. Soient x une variable indépendante comprise entre deux limites réelles x, X, et $\varphi(x)$ une fonction de x déterminée, mais inconnue, qui ne devienne jamais infinie lorsque x croît de x à X. Cela posé, le problème que je veux résoudre est le suivant : quelle doit être la valeur de la fonction $\varphi(x)$ pour que l'on ait constamment

$$(1) \qquad \int_{\mathrm{x}}^{\mathrm{X}} x^n \varphi(x) dx = 0,$$

n étant un quelconque des nombres entiers $0, 1, 2, 3, \ldots$? Je dis que la fonction $\varphi(x)$ qui résout ce problème est identiquement nulle, en sorte que l'on a $\varphi(x) = 0$ depuis $x = \mathrm{x}$ jusqu'à $x = \mathrm{X}$. En effet, si la fonction $\varphi(x)$ n'est pas nulle depuis $x = \mathrm{x}$ jusqu'à $x = \mathrm{X}$, il faut que dans cet intervalle elle change de signe un certain nombre de fois, sans quoi les éléments de l'intégrale placée au premier membre de l'équation (1) seraient tous de même signe et ne pourraient avoir zéro pour somme. Supposons donc que la fonction $\varphi(x)$ change de signe m fois, et soient $x_1, x_2, \ldots x_m$, les m valeurs de x pour lesquelles ce changement s'effectue. Faisons..........
$\psi(x) = (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_m)$: en développant le produit des fac-

teurs binomes, $\psi(x)$ prendra la forme $x^m + A_1 x^{m-1} + \ldots + A_{m-1}x + A_m$. Si donc on fait, dans l'équation (1), successivement $n=m$, $n=m-1, \ldots n=1$, $n=0$, et qu'on ajoute membre à membre les équations ainsi obtenues, après les avoir multipliées par les facteurs respectifs 1, $A_1, \ldots A_{m-1}$, A_m, on obtiendra

$$(2) \qquad \int_x^X \psi(x)\varphi(x)\,dx = 0:$$

or l'équation (2) est absurde, puisque les deux fonctions $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ changeant de signe en même temps, l'élément $\psi(x)\varphi(x)\,dx$ doit au contraire conserver toujours le même signe. Ainsi, lorsque x croît de x à X, il est absurde d'attribuer à $\varphi(x)$ une valeur autre que zéro, C. Q. F. D. Cette démonstration subsiste même lorsqu'on attribue à $\varphi(x)$ une valeur imaginaire $P + Q\sqrt{-1}$, car alors l'équation (1) se décompose en deux autres équations qui donnent séparément $P=0$, $Q=0$ (*).

2. Si l'équation (1) est satisfaite, non pas pour toutes les valeurs de n, mais seulement pour les valeurs suivantes $0, 1, 2, \ldots (p-1)$, je dis que la fonction $\varphi(x)$ (supposée réelle) change de signe au moins p fois; car si elle ne changeait de signe que m fois, m étant $<p$, on arriverait comme ci-dessus à l'équation (2) dont l'absurdité vient d'être démontrée. L'analyse précédente est fondée sur un principe semblable à celui dont j'ai fait usage dans un de mes mémoires (tome 1[er] de ce Journal, page 253); mais il m'a paru qu'il était utile de donner de ce principe une application nouvelle et simple.

(*) Soient $B_0, B_1, \ldots B_n, \ldots$ des constantes données à volonté. Si l'on cherche une fonction $\varphi(x)$ qui satisfasse à l'équation (3) $\int_x^X x^n\varphi(x)dx = B_n$, n étant un quelconque des nombres compris dans la série $0, 1, 2, 3, \ldots$, ce problème n'aura jamais plusieurs solutions. En effet si toutes les équations contenues dans la formule (3) sont satisfaites en prenant $\varphi(x) = f(x)$, on pourra poser en général $\varphi(x) = f(x) + \varpi(x)$, et il en résultera $\int_x^X x^n\varpi(x)\,dx = 0$, et par suite $\varpi(x) = 0$, ce qui démontre notre théorème.

SOLUTION

D'une question qui se présente dans le calcul des probabilités;

Par M. É. MONDÉSIR,
Élève ingénieur des Ponts-et-Chaussées.

Si une urne contient b boules blanches et n boules noires, et qu'on en tire p au hasard, la probabilité de tirer parmi les boules restantes soit q blanches, soit q noires, n'est point altérée et reste la même qu'avant la soustraction des p boules.

Il y aura trois cas à examiner, suivant que p sera à la fois plus petit que b et que n, ou compris entre les deux, ou plus grand en même temps que b et que n.

1er cas: $p < b$, $p < n$.

Il y aura dans ce cas $(p+1)$ hypothèses à faire sur la composition des p boules, savoir;

1re hyp. .... p blanches,
2^e hyp. $(p-1)$ bl., 1 noire,
. . . .
$(p+1)^{me}$ hyp. .... p noires.

Dans chacune de ces hypothèses, la probabilité pour amener q blanches, par exemple, parmi les $(b+n-p)$ boules restantes serait,

$$(1)\begin{cases}\text{Dans la 1}^{re}\text{ hypothèse } \dfrac{(b-p)(b-p-1)\ldots[b-p-(q-1)]}{(b+n-p)(b+n-p-1)\ldots[b+n-p-(q-1)]},\\ \text{Dans la 2}^{e}\text{ hypothèse } \dfrac{(b-p+1)(b-p+1-1)\ldots[b-p+1-(q-1)]}{(b+n-p)(b+n-p-1)\ldots[b+n-p-(q-1)]},\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \text{Dans la }(p+1)^{me}\text{ hyp. } \dfrac{b(b-1)\ldots\ldots[b-(q-1)]}{(b+n-p)(b+n-p-1)\ldots[b+n-p-(q-1)]}.\end{cases}$$

Cherchons maintenant la probabilité de chaque hypothèse. Soit N le nombre d'arrangements possibles avec $(b+n)$ lettres, en les prenant p à p: ce nombre sera

$$N = (b+n)(b+n-1) \;\ldots\ldots\; [b+n-(p-1)];$$

il exprimera toutes les manières possibles de faire le tirage des p boules, en supposant qu'on les tire de l'urne une à une.

Nous aurons d'un autre côté toutes les manières possibles de faire le tirage de p blanches, en prenant le nombre d'arrangements de b lettres p à p. Nommons ce nombre A_0: il sera

$$A_0 = b(b-1)(b-2) \;\ldots\ldots\; [b-(p-1)].$$

Nous aurons A_1, ou le nombre de manières possibles de tirer $(p-1)$ blanches et 1 noire, en observant que l'on peut former ce nombre en prenant chacun des arrangements de b boules $(p-1)$ à $(p-1)$, y ajoutant chacune des n boules noires, et permutant cette boule aux p places qu'elle peut occuper dans chacun des arrangements : nous aurons donc

$$A_1 = b(b-1) \;\ldots\ldots\; [b-(p-2)]p.n.$$

Pour obtenir A_2, prenons chaque arrangement de b lettres $(p-2)$ à $(p-2)$; ajoutons-y chaque *combinaison* de n lettres 2 à 2 : la permutation de la première lettre aux $(p-1)$ places de l'arrangement de $(p-2)$ lettres donnera lieu à $(p-1)$ arrangements nouveaux de $(p-1)$ lettres, et la permutation de la 2me lettre transformera chaque arrangement de $(p-1)$ lettres en p arrangements de p lettres. On a évidemment de cette manière tous les arrangements possibles de $(b-2)$ boules blanches et de 2 boules noires : écrivons donc

$$A_2 = b(b-1) \;\ldots\; [b-(p-3)]\,p(p-1)\,\frac{n(n-1)}{1.2},$$

nous aurons de même

$$A_3 = b(b-1)\ldots[b-(p-4)]\,p(p-1)(p-2)\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3},$$

. . . .

$$A_{p-2} = b(b-1)\,p(p-1)\,\frac{n(n-1)\ldots[n-(p-3)]}{1.2},$$

$$A_{p-1} = bp\,\frac{n(n-1)\ldots[n-(p-2)]}{1},$$

$$A_p = n(n-1)(n-2)\ldots[n-(p-1)].$$

A_0 exprimant le nombre de manières possibles de tirer p blanches, et N le nombre de manières possibles de tirer p boules quelconques, A_0 étant, en d'autres termes, le nombre de coups favorables à la première hypothèse, et N le nombre de coups possibles, $\frac{A_0}{N}$ doit exprimer la probabilité de la première hypothèse: de même les probabilités des hypothèses suivantes seront exprimées par les fractions

$$\frac{A_1}{N},\ \frac{A_2}{N},\ \ldots\ \frac{A_{p-1}}{N},\ \frac{A_p}{N}.$$

Si nous multiplions la probabilité de chaque hypothèse par la probabilité correspondante (1), et si nous faisons la somme, nous aurons pour la probabilité de tirer q blanches parmi les $(b+n-p)$ boules restantes, la série suivante

$$\begin{aligned}\frac{1}{N}\Big\{ & A_0\frac{(b-p)(b-p-1)\ldots[b-p-(q-1)]}{(b+n-p)\ldots[b+n-p-(q-1)]}+A_1\frac{(b-p+1)(b+p+1-1)\ldots[b-p+1-(q-1)]}{(b+n-p)\ldots[b+n-p-(q-1)]}\\ & +A_2\frac{(b-p+2)(b-p+2-1)\ldots[b-p+2-(q-1)]}{(b+n-p)\ldots[b+n-p-(q-1)]}+\ldots\\ & +A_p\frac{b(b-1)\ldots[b-(q-1)]}{(b+n-p)\ldots[b+n-p-(q-1)]}\Big\}.\end{aligned}$$

Remplaçons dans cette série $A_0, A_1, \ldots A_p$, par leurs valeurs, ainsi que N et remarquons que le facteur suivant $\frac{b(b-1)\ldots[b-(q-1)]}{(b+n)(b+n-1)\ldots[b+n-(q-1)]}$ est commun à tous les termes; la probabilité cherchée sera

$$\begin{aligned}\frac{b(b-1)\ldots[b-(q-1)]}{(b+n)(b+n-1)\ldots[b+n-(q-1)]}\Big\{ & \frac{(b-q)\ldots[b-p-(q-1)]}{(b+n-q)\ldots[b+n-p-(q-1)]}\\ & +\frac{(b-q)\ldots[b-p+1-(q-1)]}{(b+n-q)\ldots[b+n-p-(q-1)]}pn\\ & +\frac{(b-q)\ldots[b-p+2-(q-1)]}{(b+n-q)\ldots[b+n-p-(q-1)]}p(p-1)\frac{n(n-1)}{1.2}+\ldots\ldots.\\ & +\frac{(b-q)(b-q-1)}{(b+n-q)\ldots[b+n-p-(q-1)]}p(p-1)\frac{n(n-1)\ldots[n-(p-3)]}{1.2}\\ & +\frac{b-q}{(b+n-q)\ldots[b+n-p-(q-1)]}p\frac{n(n-1)\ldots[n-(p-2)]}{1}\\ & +\frac{n(n-1)\ldots[n-(p-1)]}{(b+n-q)\ldots[b+n-p-(q-1)]}\Big\}.\end{aligned}$$

Examinons la signification et la valeur de la quantité contenue entre les crochets : tous les termes de la série ont un dénominateur commun $(b+n-q)\ldots[b+n-p-(q-1)]=(b+n-q)(b+n-q-1)\ldots[b+n-q-(p-1)]$: ce dénominateur est le nombre d'arrangements possibles avec $(b+n-q)$ lettres prises p à p ; il ne diffère du dénominateur N que par le changement de $(b+n)$ en $(b+n-q)$; il doit donc exprimer le nombre de coups possibles, quand on tire p boules d'une urne qui en contient $(b+n-q)$.

Considérons chaque expression de la série, à part ce dénominateur commun, par exemple l'expression

$$(b-q)\ldots[b-p+2-(q-1)]\,p(p-1)\frac{n(n-1)}{1.2},$$

on peut l'écrire ainsi

$$(b-q)(b-q-1)\ldots[b-q-(p-3)]\,p(p-1)\frac{n(n-1)}{1.2}.$$

Comparée à l'expression A_2, on voit que cette formule n'en diffère que par le changement de b en $(b-q)$; elle doit exprimer toutes les manières possibles de tirer $(p-2)$ boules blanches et 2 noires d'une urne qui contient $(b-q)$ boules blanches et n noires. On verrait de même que les autres expressions contenues entre les crochets ne diffèrent des autres expressions A_0, A_1, etc., que par le même changement de b en $(b-q)$. La somme de ces expressions, sauf leur dénominateur commun, indique donc toutes les manières possibles de tirer p boules d'une urne qui contient $(b-q)$ blanches et n noires, comme la somme des expressions A_0, etc., indique toutes les manières possibles de tirer p boules d'une urne qui contient b blanches et n noires. Cette somme d'expressions est donc égale à son dénominateur commun, et la série entière comprise entre les crochets égale à l'unité, ce qui réduit la probabilité cherchée à

$$\frac{b(b-1)\ldots[b-(q-1)]}{(b+n)(b+n-1)\ldots[b+n-(q-1)]},$$

c'est-à-dire à ce qu'elle était avant le tirage de p boules.

2

2^{me} cas, $p > b$ et $< n$.

Dans ce cas, au lieu des $(p+1)$ hypothèses du cas précédent, nous n'en aurons que $(b+1)$: les probabilités de ces hypothèses formées comme précédemment seront

$$\frac{1}{N}A_0=\left\{b(b-1\ldots 3.2.1(b+1)(b+2)\ldots p\frac{n(n-1)\ldots[n-(p-b-1)]}{1.2.3\ldots(p-b)}\right\}\frac{1}{N},$$

$$\frac{1}{N}A_1=\left\{b(b-1)\ldots 3.2b(b+1)\ldots p\frac{n(n-1)\ldots[n-(p-b)]}{1.2.3\ldots(p-b+1)}\right\}\frac{1}{N},$$

$$\frac{1}{N}A_2=\left\{b(b-1)\ldots 3(b-1)b\ldots p\frac{n(n-1)\ldots[n-(p-b+1)]}{1.2.3\ldots(p-b+2)}\right\}\frac{1}{N};$$

. . . .

. . . .

$$\frac{1}{N}A_{b-1}=\left\{bp\frac{n(n-1)\ldots[n-(p-2)]}{1}\right\}\frac{1}{N};$$

$$\frac{1}{N}A=\{n(n-1)(n-2)\ldots[n-(p-1)]\}\frac{1}{N};$$

dans ces diverses hypothèses, les probabilités de tirer q blanches sont

1^{re} hyp... 0,
2^{e} hyp... 0,

. . . .

$$(q+1)^{me}\text{ hyp}\ldots\ \frac{q(q-1)\ldots 3.2.1}{(b+n-p)\ldots[b+n-p-(q-1)]};$$

. . . .

$$(b+1)^{me}\text{ hyp}\ldots\ \frac{b(b-1)\ldots[b-(q-1)]}{(b+n-p)\ldots[b+n-p-(q-1)]}.$$

En multipliant respectivement ces hypothèses l'une par l'autre, et faisant la somme, nous aurons pour la probabilité cherchée

$$\frac{1}{N}\left\{A_q\frac{q(q-1)\ldots 3.2.1}{(b+n-p)\ldots[b+n-p-(q-1)]}+A_{q+1}\frac{(q+1)q\ldots 2}{(b+n-p)\ldots[b+n-p-(q-1)]}\right.$$
$$\left.+A_{q+2}\frac{(q+2)(q+1)\ldots 3}{(b+n-p)\ldots[b+n-p-(q-1)]}+\ldots+A_b\frac{b(b-1)\ldots[b-(q-1)]}{(b+n-p)\ldots[b+n-p-(q-1)]}\right\},$$

Or remarquons qu'on peut mettre en facteur commun........ $\frac{b(b-1)\ldots[b-(q-1)]}{(b+n)\ldots[b+n-(q-1)]}$, chaque terme contenant en numérateur le

produit de la suite des nombres depuis b jusqu'à 1, ou jusqu'à 2, etc., et au moins jusqu'à $[b-(q-1)]$, et en dénominateur la suite $(b+n)\ldots[b+n-(p-1)]\,(b+n-p)\ldots[b+n-p-(q-1)]$: écrivons donc pour la probabilité demandée

$$\frac{b(b-1)\ldots[b-(q-1)]}{(b+n-p)\ldots[b+n-p-(q-1)]}\left\{\left[\frac{(b-q)\ldots 3.2.1}{(b+n-q)\ldots[b+n-p-(q-1)]}(b-q+1)\ldots p\,\frac{n(n-1)\ldots[n-(p-b+q\ \ 1)]}{1.2.3\ldots(p-b+q)}\right.\right.$$
$$+\left[\frac{(b-q)\ldots 3.2}{(b+n-q)\ldots[b+n-p-(q-1)]}(b-q)\ldots p\,\frac{n(n-1)\ldots[n-(p-b+q)]}{1.2.3\ldots(p-b+q+1)}\right.$$
$$+\ \frac{(b-q)\ldots 3}{(b+n-q)\ldots[b+n-p-(q-1)]}(b-q-1)\ldots p\,\frac{n(n-1)\ldots[n-(p-b+q+1)]}{1.2.3\ldots(p-b+q+2)}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\left.+\ \frac{1}{(b+n-q)\ldots[b+n-p-(q-1)]}n(n-1)(n-2)\ldots[n-(p-1)]\right\}.$$

La série comprise entre les crochets se compose de $(b-q+1)$ termes correspondants aux $(b-q+1)$ hypothèses possibles sur la composition de p boules tirées d'une urne qui contiendrait $(b-q)$ blanches et n noires, et en employant ainsi le raisonnement appliqué déjà dans le cas précédent, on voit aisément que cette série doit se réduire à 1, puisque d'un côté le dénominateur commun...... $(b+n-q)\ldots[b+n-q-(p-1)]$ exprime toutes les manières possibles de tirer p boules d'une urne qui en contient $(b+n-q)$, que de l'autre la somme des numérateurs exprime exactement la même chose. La probabilité cherchée est donc, comme dans le 1[er] cas, la même qu'avant le tirage de p boules.

3[me] cas. $p > b$ et $> n$.

Le nombre d'hypothèses possibles sur la composition des p boules sera alors égal à un certain nombre $(k+1)=(b+n-p+1)$: nous obtiendrons toujours la probabilité des diverses hypothèses comme précédemment, et nous aurons pour les valeurs de ces probabilités

$$\frac{1}{\mathrm{N}}\mathrm{A}_0=\left\{b(b-1)\ldots 3.2.1\,(b+1)\ldots p\,\frac{n(n-1)\ldots[n-(p-b-1)]}{1.2.3\ldots(p-b)}\right\}\frac{1}{\mathrm{N}},$$
$$\frac{1}{\mathrm{N}}\mathrm{A}_1=\left\{b(b-1)\ldots 3.2\,b(b+1)\ldots p\,\frac{n(n-1)\ldots[n-(p-b)]}{1.2\,3\ldots(p-b+1)}\right\}\frac{1}{\mathrm{N}},$$

$$\frac{1}{N}A_2 = \left\{b(b-1)\ldots 3(b-1)b\ldots p\,\frac{n(n-1)\ldots[n-(p-b+1)]}{1.2.3\ldots(p-b+2)}\right\}\frac{1}{N},$$

. . . .

$$\frac{1}{N}A_{k-2} = \left\{b(b-1)\ldots(k-1)(b-k+3)\ldots p\,\frac{n(n-1)\ldots[n-(p-b+k-3)]}{1.2.3\ldots(p-b+k-2)}\right\}\frac{1}{N},$$

$$\frac{1}{N}A_{k-1} = \left\{b(b-1)\ldots k(b-k+2)\ldots p\,\frac{n(n-1)\ldots[n-(p-b+k-2)]}{1.2.3\ldots(p-b+k-1)}\right\}\frac{1}{N},$$

$$\frac{1}{N}A_k = \left\{b(b-1)\ldots(k+1)(b-k+1)\ldots p\,\frac{n(n-1)\ldots[n-(p-b+k-1)]}{1.2.3\ldots(p-b+k)}\right\}\frac{1}{N}:$$

dans ces diverses hypothèses, les probabilités de tirer q blanches sont

$$\begin{array}{l} 1^{\text{re}}\ \text{hyp.}\ldots\ 0, \\ 2^{\text{e}}\ \text{hyp.}\ldots\ 0, \\ \ldots\ldots \end{array}$$

$$(q+1)^{\text{ième}}\ \text{hyp.}\ \frac{q(q-1)\ldots 3.2.1}{(b+n-p)\ldots[b+n-p-(q-1)]};$$

. . . .

$$(k+1)^{\text{ième}}\ \text{hyp.}\ \frac{k(k-1)\ldots[k-(q-1)]}{(b+n-p)\ldots[b+n-p-(q-1)]}.$$

Nous aurons donc pour la probabilité cherchée

$$\frac{1}{N}\left\{A_q\frac{q(q-1)\ldots 3.2.1}{(b+n-p)\ldots[b+n-p-(q-1)]}+A_{q+1}\frac{(q+1)q\ldots 3.2}{(b+n-p)\ldots[b+n-p-(q-1)]}\right.$$
$$\left.+\ldots\ldots+A_k\frac{k(k-1)\ldots[k-(q-1)]}{(b+n-p)\ldots[b+n-p-(q-1)]}\right\}$$
$$=\frac{b(b-1)\ldots q(q-1)\ldots 3.2.1}{(b+n)\ldots(b+n-p)\ldots[b+n-p-(q-1)]}(b-q+1)\ldots p\,\frac{n(n-1)\ldots[n-(p-b+q-1)]}{1.2.3\ldots(p-b+q)}$$
$$+\frac{b(b-1)\ldots(q+1)q\ldots 3.2}{(b+n)\ldots(b+n-p)\ldots[b+n-p-(q-1)]}(b-q)\ldots p\,\frac{n(n-1)\ldots[n-(p-b+q)]}{1.2.3\ldots(p-b+q+1)}$$
$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+\frac{b(b-1)\ldots(k+1)k\ldots[k-(q-1)]}{(b+n)\ldots(b+n-p)\ldots[b+n-p-(q-1)]}(b-k+1)\ldots p\,\frac{n(n-1)\ldots[n-(p-b+k-1)]}{1.2.3\ldots(p-b+k)}.$$

Le facteur $\frac{b(b-1)\ldots[b-(q-1)]}{(b+n)\ldots[b+n-(q-1)]}$ est évidemment commun à tous les termes de la série, car $[k-(q-1)] = b+n-p-(q-1)$ $=[b-(q-1)]-(p-n)$, est plus petit que $b-(q-1)$; on

peut donc mettre ce facteur en évidence, et écrire la série ainsi qu'il suit

$$\frac{b(b-1)\ldots[b-(q-1)]}{(b+n)\ldots[b+n-(q-1)]}\left\{\frac{(b-q)\ldots 3.2.1}{(b+n-q)\ldots[b+n-p-(q-1)]}(b-q+1)\ldots p\frac{n(n-1)\ldots[n-(p-b+q-1)]}{1.2.3\ldots(p-b+q)}\right.$$

$$+\frac{(b-q)\ldots 3.2}{(b+n-q)\ldots[b+n-p-(q-1)]}(b-q)\ldots p\frac{n(n-1)\ldots[n-(p-b+-1)]}{1.2.3\ldots(p-b+q+1)}$$

$$+\frac{(b-q)\ldots 3}{(b+n-q)\ldots(b+n-p-(q-1))]}(b-q-1)\ldots p\frac{n(n-1)\ldots[n-(p-b+q+1)]}{1.2.3\ldots(p-b+q+2)}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\left.+\frac{(b-q)\ldots[b+n-p-(q-1)]}{(b+n-q)\ldots[b+n-p-(q-1)]}(b-k+1)\ldots p\frac{n(n-1)\ldots[n-(p-b+k-1)]}{1.2.3\ldots(p-b+k)}\right\}.$$

La série comprise entre les crochets se compose évidemment de $[b+n-p-(q-1)]$ termes ou de $(k-q+1)$ termes, chacun des termes exprime la probabilité d'une des $(b+n-q-p+1)$ hypothèses que l'on peut faire sur la composition de p boules, que l'on tire d'une urne qui en contient $(b+n-q)$, dans le cas où p est à la fois plus grand que $(b-q)$ et que n; or, comme la somme des probabilités de toutes les hypothèses possibles, doit être égale à 1, il s'ensuit que la probabilité cherchée est réduite au premier facteur $\frac{b(b-1)\ldots[b-(q-1)]}{(b+n)\ldots[b+n-(q-1)]}$ comme dans les deux cas précédents.

Le théorème que nous venons de démontrer est encore vrai pour une urne qui renfermerait des boules de plusieurs couleurs : on le démontrerait en séparant les boules en deux groupes, dont l'un renfermerait les boules d'une même couleur, et l'on prouverait que la probabilité de tirer une boule de cette couleur n'est point changée: on ferait de même pour les autres couleurs. Ce théorème peut donc être énoncé ainsi dans toute sa généralité : Si une urne renferme des boules de plusieurs couleurs, et qu'on en tire au hasard un certain nombre, la probabilité d'amener, parmi les boules restantes, q boules d'une couleur quelconque, n'est point changée par cette soustraction et reste la même qu'auparavant. Il est tout-à-fait semblable à celui dont M. Poisson s'est servi dans son mémoire *sur l'avantage du banquier au jeu de trente et quarante* (*Annales de Chimie et de Physique*, t. XIII, p. 177-178), et on le regardera peut-être comme évident *à priori*; mais il était bon d'en vérifier analytiquement l'exactitude.

NOTE

Sur les points singuliers des Courbes ;

PAR M. PLUCKER.

Une courbe quelconque étant proposée, je désignerai

1°. Par n son degré, ou le nombre de ses points d'intersection avec une ligne droite;

2°. Par m sa classe (mot introduit par M. *Gergonne*) ou le nombre de ses tangentes, passant par un même point ;

3°. Par x le nombre de ses points doubles;

4°. Par y celui de ses points de rebroussement ;

5°. Par u le nombre de ses tangentes doubles ; et enfin

6°. Par v celui de ses tangentes (ou points) d'inflexion.

Dans ce qu'on va lire, je supposerai en outre que la courbe n'a ni points multiples, ni tangentes multiples.

I. Pour toutes les courbes algébriques quelconques, il existe une équation générale et unique, qui lie entre eux les nombres 1°. des points doubles (x), 2°. des points de rebroussement (y), 3°. des tangentes doubles (communes à deux branches différentes de la courbe) (u), et 4° des points d'inflexion (v). Cette équation est la suivante :

$$(v-y)^4-9(v-y)^2[6(v+y)+4(u+x)-45]+756(v-y)(u-x)+324(u-x)^2=0.$$

II. Les courbes générales d'un degré quelconque, n'ont ni point double ni point de rebroussement. Pour elles on obtient, en posant $y=0$ et $x=0$,

$$v^4-54v^3-36uv^2+405v^2+756uv+324u^2=0\,.$$

III. On obtient pour les courbes générales d'une classe quelconque

(qui n'ont tangentes doubles ni points d'inflexion) l'équation analogue suivante :

$$y^4 - 54y^3 - 36xy^2 + 405y^2 + 756xy + 324x^2 = 0.$$

IV. Si le nombre des points de rebroussement est égal à celui des points d'inflexion, le nombre des points doubles est nécessairement égal à celui des tangentes doubles. De plus la courbe est coupée alors par une ligne droite en autant de points qu'il y a des tangentes de la courbe aboutissant à un même point. On a simultanément

$$v = y, \quad u = x, \quad n = m, \quad 2x + 3y = n(n-2).$$

Pour obtenir les différents cas où les courbes d'un degré donné n sont de la même classe, on n'a qu'à résoudre la dernière équation en nombres entiers, en satisfaisant en même temps à la condition

$$x + y \overset{=}{<} \frac{(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2}.$$

V. Dans le cas général, on a

$$\begin{aligned}(v - y) &= 3(m - n),\\ (u - x) &= \tfrac{1}{2}(m-n)(m+n-9),\end{aligned}$$

équations simples, qui donnent encore la suivante :

$$(m+n) - 6\left(\frac{u-x}{v-y}\right) = 9.$$

VI. L'un des deux nombres n et m étant donné l'on peut prendre l'autre entre les deux limites déterminées par les deux équations

$$m \overset{<}{=} n(n-1), \quad n \overset{<}{=} m(m-1);$$

excepté toutefois qu'on n'a jamais ni $m = n(n-1)-1$ ni $n = m(m-1)-1$. On a généralement,

$$\begin{aligned}m &= n(n-1) - 2x - 3y,\\ n &= m(m-1) - 2u - 3v.\end{aligned}$$

VII. Enfin l'on a les quatre équations suivantes :

$$\begin{aligned}v &= 3n(n-2) - 6x - 8y,\\ y &= 3m(m-2) - 6u - 8v,\\ u &= \tfrac{1}{2}n(n-2)(n^2-9) - [n(n-1)-6](2x+3y) + 2x(x-1) + 6xy + \tfrac{9}{2}y(y-1),\\ x &= \tfrac{1}{2}m(m-2)(m^2-9) - [m(m-1)-6](2u+3v) + 2u(u-1) + 6uv + \tfrac{9}{2}v(v-1).\end{aligned}$$

L'interprétation géométrique de ces équations est facile. Ainsi, la première d'entre elles, par exemple, indique que, si par une détermination spéciale des constantes de l'équation générale d'un degré quelconque, la courbe correspondante acquiert des points doubles ou de rebroussement, le nombre des points d'inflexion diminue de *six* unités pour chaque point double et de *huit* pour chaque point de rebroussement. J'ajouterai que sur les six points d'inflexion qui disparaissent, il y a *deux* de réels et *quatre* d'imaginaires, si c'est un point double proprement dit et supposé réel, qui les remplace; mais que tous sont imaginaires, si c'est un point conjugué. Dans le cas d'un point réel de rebroussement, il y a, sur les huit points d'inflexion qui disparaissent, *deux* de réels et *six* d'imaginaires.

VIII. Les courbes des degrés 3, 4, 5, offrent les différents cas suivants, les seuls possibles, par rapport au nombre des points et tangentes singulières, dont il est question ici.

$n = 3.$

m	x	y	u	v
6	—	—	—	9
4	1	—	—	3
3	—	1	—	1

$n = 4.$

m	x	y	u	v
12	—	—	28	24
10	1	—	16	18
9	—	1	10	16
8	2	—	8	12
7	1	1	4	10
6	3	—	4	6
.	—	2	1	8
5	2	1	2	4
4	1	2	1	2
3	—	3	1	—

$n = 5.$

m	x	y	u	v
20	—	—	120	45
18	1	—	92	39
17	—	1	78	37
16	2	—	68	33
15	1	1	56	31
14	3	—	48	27
.	—	2	45	29
13	2	1	38	26
12	4	—	32	21
.	1	2	29	23
11	3	1	24	19
.	—	3	21	21
10	5	—	20	15
.	2	2	17	17
9	4	1	14	13
.	1	3	11	15
8	6	—	12	9
.	3	2	9	11
.	—	4	6	13
7	5	1	8	7
.	2	3	5	9
6	4	2	5	5
.	1	4	2	7
5	3	3	3	3
.	—	5	—	5
4	2	4	2	1

On peut dans les tableaux qui précèdent changer réciproquement n en m, x en u, y en v.

IX. En représentant une courbe par une équation entre deux coordonnées ordinaires, on la regarde comme engendrée par le mouvement d'un point, dont les différentes positions sont données par l'équation. Soient p et q des fonctions linéaires des deux coordonnées et

$$\psi(p, q) = \Omega = 0,$$

l'équation d'une courbe quelconque, ou algébrique, ou transcendante. On sait qu'un point double de la courbe est alors indiqué par les deux équations suivantes

$$\frac{d\Omega}{dp} = 0, \quad \frac{d\Omega}{dq} = 0.$$

De plus ce point double est, ou l'intersection de deux branches réelles de la courbe, ou un point conjugué, ou enfin (en général) un point de rebroussement, selon qu'on a

$$\left(\frac{d^2\Omega}{dpdq}\right)^2 - \frac{d^2\Omega}{dp^2}\cdot\frac{d^2\Omega}{dq^2} > 0, \quad \left(\frac{d^2\Omega}{dpdq}\right)^2 - \frac{d^2\Omega}{dp^2}\cdot\frac{d^2\Omega}{dq^2} < 0, \quad \left(\frac{d^2\Omega}{dpdq}\right)^2 - \frac{d^2\Omega}{dp^2}\cdot\frac{d^2\Omega}{dq^2} = 0.$$

De ces équations l'on déduit facilement pour les courbes du troisième degré, le théorème suivant que j'ai démontré avec d'autres théorèmes semblables, dans un autre endroit : « Les trois asymptotes étant données, le lieu géométrique des points de rebroussement de ces courbes est l'ellipse *maximum*, inscrite au triangle formé par les trois asymptotes ; le lieu des points conjugués est l'intérieur, et le lieu des points doubles, proprement dits, l'extérieur de cette ellipse *maximum*. »

X. L'équation générale de la ligne droite renferme deux constantes, que nous supposons y entrer au premier degré seulement. Nous désignerons deux fonctions linéaires quelconques de ces deux constantes par r et s. Alors des valeurs données de r et s déterminent une ligne droite unique, et l'équation

$$\Psi(r, s) = \Psi = 0,$$

en y considérant r et s comme variables, représente une courbe: cette courbe est regardée comme enveloppée par une ligne droite en mouvement, dont les différentes positions sont données par l'équation précédente. Pour une tangente double l'équation de la courbe doit subsister simultanément avec les deux équations suivantes

$$\frac{d\psi}{dr} = 0, \quad \frac{d\psi}{ds} = 0.$$

De plus, cette tangente double touche deux branches réelles de la courbe, ou elle est isolée de la courbe (conjuguée), ou enfin elle touche la courbe dans un point d'inflexion, selon qu'on a

$$\left(\frac{d^2\psi}{drds}\right)^2 - \frac{d^2\psi}{dr^2}\cdot\frac{d^2\psi}{ds^2} > 0, \quad \left(\frac{d^2\psi}{drds}\right)^2 - \frac{d^2\psi}{dr^2}\cdot\frac{d^2\psi}{ds^2} < 0, \quad \left(\frac{d^2\psi}{drds}\right)^2 - \frac{d^2\psi}{dr^2}\cdot\frac{d^2\psi}{ds^2} = 0.$$

Paris, 12 mars 1836.

SECOND MÉMOIRE

Sur le développement des fonctions ou parties de fonctions en séries dont les divers termes sont assujettis à satisfaire à une même équation différentielle du second ordre contenant un paramètre variable;

PAR J. LIOUVILLE.

I.

Dans un premier mémoire sur ce sujet (*), j'ai eu pour but de trouver par un procédé direct et rigoureux la valeur de la série

$$(1) \qquad \Sigma\left(\frac{V\int_x^X gVf(x)dx}{\int_x^X gV^2dx}\right)$$

dans laquelle le signe Σ s'étend à toutes les racines réelles et positives d'une certaine équation transcendante $\varpi(r)=0$; V est une fonction de x et du paramètre r, assujettie à satisfaire à la fois l'équation différentielle

$$(2) \qquad \frac{d\left(k\frac{dV}{dx}\right)}{dx}+(gr-l)V=0,$$

dans laquelle les fonctions g, k, l de x sont supposées positives, et

(*) Tome Ier de ce Journal, page 253.

aux conditions définies

$$(3)\qquad \frac{dV}{dx} - hV = 0 \quad \text{pour} \quad x = \mathrm{x},$$

$$(4)\qquad \frac{dV}{dx} + HV = 0 \quad \text{pour} \quad x = X:$$

les coefficients constants h, H sont positifs, nuls ou infinis : lorsqu'on a $h = \infty$, l'équation (3), dont on peut diviser les deux membres par h, se réduit à

$$V = 0 \quad \text{pour} \quad x = \mathrm{x};$$

de même, lorsqu'on a $H = \infty$, l'équation (4) se réduit à

$$V = 0 \quad \text{pour} \quad x = X:$$

enfin $f(x)$ est une fonction arbitraire de x, assujettie pourtant aux conditions suivantes

$$(5)\qquad \frac{df(x)}{dx} - hf(x) = 0 \quad \text{pour} \quad x = \mathrm{x},$$

$$(6)\qquad \frac{df(x)}{dx} + Hf(x) = 0 \quad \text{pour} \quad x = X.$$

La fonction V se présente utilement dans la théorie de la chaleur et dans une foule de questions physico-mathématiques ; et M. Sturm en a développé les propriétés avec beaucoup de soin dans ses deux mémoires sur les équations différentielles et sur les équations aux différences partielles (*). A l'aide de ces propriétés que j'ai moi-même étudiées dans le mémoire cité plus haut et dans une note particulière, j'ai fait voir que la valeur de la série (1), lorsque cette série est convergente, ne peut qu'être égale à $f(x)$, du moins quand la variable x reste comprise entre les limites x, X. Dans cette hypothèse de la convergence de la série (1) et entre les limites x, X de x, on a donc

$$(7)\qquad f(x) = \Sigma \left(\frac{V \int_{\mathrm{x}}^{X} gVf(x)dx}{\int_{\mathrm{x}}^{X} gV^2dx} \right).$$

(*) Tome I[er] de ce Journal, page 106 et page 173.

L'équation $\varpi(r) = 0$ dont le paramètre r dépend n'a pas de racines négatives, comme on le reconnaît à l'inspection seule de cette équation. Elle n'a pas non plus de racines imaginaires; c'est ce que M. Poisson a prouvé depuis long-temps par un procédé très ingénieux. Mais il est bon d'observer que la méthode dont j'ai fait usage pour sommer la série (1) n'exige en aucune manière la connaissance du théorème de M. Poisson. Si l'équation $\varpi(r) = 0$ avait des racines imaginaires, on n'en tiendrait pas compte dans le second membre de l'équation (7), et cette équation subsisterait encore et se démontrerait par la même analyse. Pour l'exactitude de la démonstration que j'en ai donnée, il suffit en effet que les diverses fonctions V_1, V_2, ... qui répondent aux racines réelles et positives r_1, r_2, ... de l'équation $\varpi(r) = 0$ jouissent des propriétés que M. Sturm a reconnu leur appartenir. Au surplus, la réalité de toutes les racines de l'équation $\varpi(r) = 0$ résulte des propriétés mêmes de ces fonctions V_1, V_2, ... qui répondent aux valeurs réelles et positives du paramètre r : c'est ce que je prouverai à la fin du présent mémoire.

Si nous revenons à la série (1), nous voyons qu'elle doit être encore l'objet d'une recherche nouvelle dont l'importance a été signalée par M. Sturm dans son dernier mémoire (*) : il s'agit de prouver que cette série (1) est convergente; et j'ai eu le bonheur d'y parvenir il y a quelque temps, du moins dans le cas très étendu où les fonctions g, k, $f(x)$ et leurs dérivées premières et secondes conservent toujours des valeurs finies, lorsque x croît de x à X. Ma démonstration, quoique très simple, sera sans doute appréciée par les géomètres qui ont traité des questions semblables et qui savent combien en général elles offrent de difficultés. Elle consiste à prouver que si l'on désigne par n un indice très grand, par u_n la valeur absolue du $n^{ième}$ terme de la série (1) et par M un certain nombre indépendant de n et facile à calculer, on a $u_n < \frac{M}{n^2}$. Or, la série qui a pour terme général $\frac{M}{n^2}$ est convergente; donc à *fortiori* la série (1) l'est aussi, ce qu'il fallait démontrer. On peut trouver en outre une limite supérieure de l'erreur

(*) Tome I^{er} de ce Journal, page 411.

commise lorsque l'on prend pour valeur de $f(x)$ les n premiers termes de la série seulement.

La convergence de la série

$$\Sigma\left(\frac{\mathrm{V}e^{-rt}\int_{\mathrm{x}}^{\mathrm{X}} g\mathrm{V}f(x)\,dx}{\int_{\mathrm{x}}^{\mathrm{X}} g\mathrm{V}^2dx}\right),$$

où l'on suppose $t > 0$, et qui représente l'état variable des températures dans une barre hétérogène, résulte aussi de notre analyse; cette dernière série est même plus facile à traiter que la série (1), et c'est par elle que nous commencerons.

En terminant cette introduction, je dois dire qu'ayant communiqué mon travail à M. Sturm, il a trouvé presque sur-le-champ une seconde démonstration de la convergence de la série (1), aussi simple que la mienne, et fondée sur ses propres principes.

II.

Cherchons d'abord à exprimer en série convergente la fonction V, qui satisfait à l'équation indéfinie (2) et aux conditions définies (3), (4). Pour cela désignons par k' ce que devient k lorsqu'on y pose $x = \mathrm{x}$, et faisons

$$p_0 = \mathrm{A}\left(1 + hk'\int_{\mathrm{x}}^{x}\frac{dx}{k}\right),$$

$$p_1 = \int_{\mathrm{x}}^{x}\frac{dx}{k}\int_{\mathrm{x}}^{x}(l - gr)\,p_0dx,$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$p_{n+1} = \int_{\mathrm{x}}^{x}\frac{dx}{k}\int_{\mathrm{x}}^{x}(l - gr)\,p_ndx,$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

Quel que soit le paramètre r, on satisfait évidemment aux équations (2) et (3) en posant

$$\mathrm{V} = p_0 + p_1 + \ldots + p_n + \ldots;$$

A désigne une constante dont la valeur est tout-à-fait arbitraire, et

que l'on peut prendre égale à l'unité, ou mieux encore égale à $\frac{1}{1+h}$, pour avoir une expression de V qui convienne même au cas où $h=\infty$. En adoptant cette dernière valeur de A, on a, pour $x=\mathrm{x}$,

$$V=\frac{1}{1+h},\ \frac{dV}{dx}=\frac{h}{1+h}:$$

en général ces valeurs de V et $\frac{dV}{dx}$ sont différentes de zéro; V se réduit à zéro lorsque $h=\infty$, mais alors $\frac{dV}{dx}=1$; au contraire $\frac{dV}{dx}=0$, quand $h=0$, mais alors on a $V=1$. On voit par là que la fonction V ne devient identiquement nulle pour aucune valeur déterminée de r, tant que x reste indéterminée.

La série p_0+p_1+ etc. est convergente : prenons en effet les divers termes de cette série, abstraction faite de leurs signes, et désignons les par P_0, P_1, etc.; représentons par P et G les valeurs absolues les plus grandes des deux fonctions P_0 et $l-gr$ pour des valeurs de x croissantes depuis x jusqu'à X; représentons aussi par k_0 la plus petite valeur de k. En remplaçant partout sous le signe $\int$ (dans les intégrales multiples P_0, P_1, etc.) $l-gr$ par G, P_0 par P, k par k_0, les valeurs de ces intégrales augmenteront évidemment. On aura donc

$$P_1<\frac{GP}{k_0}\cdot\frac{(x-\mathrm{x})^2}{1.2},$$

$$P_2<\left(\frac{GP}{k_0}\right)^2\cdot\frac{(x-\mathrm{x})^4}{1.2.3.4},$$

. . . .

$$P_n<\left(\frac{GP}{k_0}\right)^n\cdot\frac{(x-\mathrm{x})^{2n}}{1.2.3\ldots 2n},$$

. . . .

Or la série qui a pour terme général

$$\left(\frac{GP}{k_0}\right)^n\cdot\frac{(x-\mathrm{x})^{2n}}{1.2.3\ldots 2n}$$

est convergente; donc à *fortiori* les séries P_0+P_1+ etc. et $p+p_1+$etc. sont aussi convergentes, ce qu'il fallait démontrer. De plus l'erreur

commise, lorsque l'on prend pour V les n premiers termes seulement de la série $p_0 + p_1 +$ etc., est plus petite que la quantité

$$\left(\frac{\mathrm{GP}}{k_0}\right)^n \cdot \frac{(x-\mathrm{x})}{1.2.3\ldots 2n} + \text{etc.},$$

dont il est aisé de trouver une limite supérieure.

On peut obtenir d'une autre manière une limite supérieure de la valeur absolue de l'erreur R_n commise en prenant

$$\mathrm{V} = p_0 + p_1 + \ldots + p_{n-1}.$$

En effet, l'équation (2) et la condition (3) sont satisfaites en posant

$$(8) \qquad \mathrm{V} = p_0 + \int_{\mathrm{x}}^{x} \frac{dx}{k} \int_{\mathrm{x}}^{x} (l - gr)\mathrm{V}dx.$$

Si, dans le second membre de cette équation, on remplace V par sa valeur que fournit précisément ce même second membre, on trouve ensuite

$$\mathrm{V} = p_0 + p_1 + \int_{\mathrm{x}}^{x} \frac{dx}{k} \int_{\mathrm{x}}^{x} (l-gr)\,dx \int_{\mathrm{x}}^{x} \frac{dx}{k} \int_{\mathrm{x}}^{x} (l-gr)\mathrm{V}dx:$$

remplaçant de nouveau, dans le second membre, V par sa valeur (8), et continuant indéfiniment cette opération, conformément à la méthode connue des approximations successives, on a enfin

$$\mathrm{V} = p_0 + p_1 + \ldots + p_{n-1} + \mathrm{R}_n,$$

le reste R_n étant exprimé par l'intégrale multiple

$$\int_{\mathrm{x}}^{x} \frac{dx}{k} \int_{\mathrm{x}}^{x} (l-gr)\,dx \ldots \int_{\mathrm{x}}^{x} \frac{dx}{k} \int_{\mathrm{x}}^{x} (l-gr)\,\mathrm{V}dx,$$

dans laquelle le signe $\int$ se trouve $2n$ fois.

La fonction V ne devenant jamais infinie, il est clair qu'elle est susceptible d'un maximum absolu W : en remplaçant, dans l'intégrale multiple ci-dessus, V par W, $l - gr$ par G, k par k_0, on en augmentera donc la valeur numérique : d'après cela on a

$$\mathrm{R}_n < \mathrm{W}.\left(\frac{\mathrm{GP}}{k_0}\right)^n \cdot \frac{(x-\mathrm{x})^{2n}}{1.2.3\ldots 2n},$$

ce qu'il fallait trouver et ce qui démontre de nouveau la convergence de la série $p_0 + p_1 +$ etc.

Jusqu'ici nous avons laissé le paramètre r indéterminé. Mais si l'on veut satisfaire à la condition (4), il faudra prendre pour ce paramètre une quelconque des racines de l'équation

$$\frac{dV}{dx} + HV = 0 \quad \text{pour} \quad x = X,$$

laquelle, en mettant pour V sa valeur, devient

$$\frac{dp_0}{dx} + \frac{dp_1}{dx} + \ldots + H(p_0 + p_1 + \ldots) = 0 \quad \text{pour} \quad x = X:$$

cette équation est celle que nous avons désignée par

$$\varpi(r) = 0,$$

dans notre premier mémoire. Les quantités p_0, p_1, etc., et leurs dérivées étant essentiellement positives lorsqu'on prend $r < 0$, il en résulte que cette équation n'a pas de racines < 0. M. Sturm a prouvé et tout-à-l'heure nous prouverons aussi qu'elle a un nombre infini de racines positives $r_1, r_2, \ldots$ qui sont de plus en plus grandes et croissent jusqu'à l'infini. Quant aux racines imaginaires, nous n'avons pas besoin de nous en occuper pour le moment.

III.

On peut transformer l'équation (2) de plusieurs manières et arriver ainsi à d'autres développements de la fonction V. Pour le montrer, je fais par exemple

$$z = \int_x^x \sqrt{\frac{g}{k}} \cdot dx,$$

z désignant une nouvelle variable qui croît depuis 0 jusqu'à un certain maximum $Z = \int_x^X \sqrt{\frac{g}{k}}\, dx$, lorsque x croît depuis x jusqu'à X. Je prends cette variable z, au lieu de x, pour variable indépendante, et l'équation (2) devient

$$\frac{d\left(\sqrt{gk}\cdot\frac{dV}{dz}\right)}{dz}+\left(r\sqrt{gk}-l\sqrt{\frac{k}{g}}\right)V=0,$$

ou bien

$$\sqrt{gk}\cdot\frac{d^2V}{dz^2}+\frac{d.\sqrt{gk}}{dz}\cdot\frac{dV}{dz}+\left(r\sqrt{gk}-l\sqrt{\frac{k}{g}}\right)V=0.$$

Maintenant si l'on pose

$$V=\theta U,$$

θ étant $=\frac{1}{\sqrt[4]{gk}}$, le coefficient de $\frac{dU}{dz}$ sera égal à zéro dans l'équation transformée, laquelle, en faisant $r=\rho^2$, et

$$l\sqrt{\frac{k}{g}}\cdot\theta-\frac{d.\sqrt{gk}}{dz}\cdot\frac{d\theta}{dz}-\sqrt{gk}\cdot\frac{d^2\theta}{dz^2}=\sqrt{gk}\cdot\theta\cdot\lambda,$$

sera de la forme

$$(9)\qquad \frac{d^2U}{dz^2}+\rho^2U=\lambda U;$$

quant aux équations (3) et (4), si on leur applique les mêmes transformations, elles prendront la forme

$$(10)\qquad \frac{dU}{dz}-h'U=0 \quad \text{pour} \quad z=0,$$

$$(11)\qquad \frac{dU}{dz}+H'U=0 \quad \text{pour} \quad z=Z,$$

h', H' désignant deux constantes différentes de h, H et qui ne sont pas assujetties comme ces dernières à la condition d'être positives.

L'équation (9) étant de même forme que l'équation (2), on pourrait l'intégrer de la même manière : en désignant par A une constante arbitraire, et posant $p_0=A(1+h'z)$, puis en général

$$p_{n+1}=\int_0^z dz\int_0^z(\lambda-\rho^2)p_n dz,$$

on aurait en série convergente

$$V=p_0+p_1+\ldots+p_n+\ldots$$

Mais il est préférable de procéder de la manière suivante.

En multipliant par $\sin \rho z dz$ les deux membres de l'équation (9), puis intégrant et observant que

$$\left(\sin \rho z \frac{d^2U}{dz^2} + \rho^2 U \sin \rho z\right) dz = d\left(\sin \rho z \frac{dU}{dz} - \rho U \cos \rho z\right),$$

on a

$$\sin \rho z \frac{dU}{dz} - \rho U \cos \rho z = A + \int_0^z \lambda U \sin \rho z dz.$$

En posant $z = 0$, on trouve la valeur de la constante arbitraire $A = -\rho U$: la valeur de U, pour $z = 0$, est tout-à-fait arbitraire à moins que l'on ait $h' = \infty$, auquel cas elle est nécessairement nulle; en excluant d'abord ce cas particulier, nous la supposerons égale à l'unité, ce qui nous donnera $A = -\rho$; en même temps, nous désignerons par λ', U' ce que deviennent λ, U lorsqu'on y change z en z' ; et nous aurons

$$\int_0^z \lambda U \sin \rho z dz = \int_0^z \lambda' U' \sin \rho z' dz'.$$

L'équation précédente deviendra donc

$$(12) \qquad \sin \rho z \frac{dU}{dz} - \rho U \cos \rho z = -\rho + \int_0^z \lambda' U' \sin \rho z' dz'.$$

En multipliant l'équation (9) par $\cos \rho z dz$, intégrant et observant que, pour $z = 0$, on a [d'après la condition (10)],

$$\frac{dU}{dz} = h'U = h',$$

on obtiendra de même

$$(13) \qquad \cos \rho z \frac{dU}{dz} + \rho U \sin \rho z = h' + \int_0^z \lambda' U' \cos \rho z' dz'.$$

Des deux équations (12) et (13), on tire

$$(14) \quad U = \cos \rho z + \frac{h' \sin \rho z}{\rho} + \frac{1}{\rho} \int_0^z \lambda' U' \sin \rho (z - z') dz',$$

et

$$(15)\qquad \frac{dU}{dz} = -\rho \sin \rho z + h' \cos \rho z + \int_0^z \lambda' U' \cos \rho(z - z') dz'.$$

Si maintenant on change z en z', U se changera en U' : on pourra, dans le second membre de l'équation (14), mettre au lieu de U' sa valeur, et en continuant ainsi comme au n° II, on obtiendra la valeur de U exprimée par une série d'autant plus convergente que ρ sera plus grand.

IV.

Lorsque ρ n'est pas très grand, on trouve sans difficulté, par les méthodes de M. Sturm, les valeurs de z qui rendent V un maximum et les valeurs correspondantes de V. Il est donc facile de trouver alors la limite supérieure que nous avons désignée au n° II par la lettre W. Mais l'emploi des méthodes de M. Sturm étant trop pénible quand ρ est très grand, voici comment on peut y suppléer.

Soit Q la plus grande valeur que U puisse prendre lorsque z varie de o à Z, et L la plus grande valeur de λ dans le même intervalle; nous considérons les quantités Q et L, abstraction faite de leur signe. La valeur absolue de l'intégrale

$$\int_0^z \lambda' U' \sin \rho(z - z') dz',$$

dans laquelle z est compris entre o et Z, est donc toujours moindre que $LQ\int_0^z dz'$ et à *fortiori* moindre que LQZ. D'un autre côté le maximum de $\cos \rho z + \frac{h' \sin \rho z}{\rho}$ est $\sqrt{1 + \left(\frac{h'}{\rho}\right)^2}$: donc le second membre de l'équation (10) est constamment plus petit que

$$\sqrt{1 + \left(\frac{h'}{\rho}\right)^2} + \frac{LQZ}{\rho},$$

ce qui exige que l'on ait

$$Q < \sqrt{1 + \left(\frac{h'}{\rho}\right)^2} + \frac{LQZ}{\rho}.$$

Pour des valeurs de ρ plus grandes que LZ, il vient donc

$$Q < \frac{\sqrt{1+\left(\frac{h'}{\rho}\right)^2}}{1-\frac{LZ}{\rho}}.$$

Lorsque l'on prend le paramètre ρ suffisamment grand et tel que l'on ait

$$\rho > 2LZ,$$

ce que nous admettrons désormais, il vient par conséquent

$$Q < 2\sqrt{1+\left(\frac{h'}{\rho}\right)^2}.$$

Mais on a $V = \theta U$, et par suite $V < \Theta Q$, si Θ désigne le maximum absolu de θ : donc pour des valeurs de ρ suffisamment grandes, et en considérant seulement la valeur absolue de V, on a

$$V < 2\Theta\sqrt{1+\left(\frac{h'}{\rho}\right)^2}:$$

semblablement, si l'on désigne par F ou F_1 le maximum d'une fonction donnée de x, savoir, $f(x)$ ou $f_1(x)$, on aura pour de très grandes valeurs de ρ,

$$V\int_x^X gVf(x)dx < 4F.G.\Theta^2.(X-x).\left[1+\left(\frac{h'}{\rho}\right)^2\right],$$
$$V\int_x^X Vf_1(x)dx < 4F_1.G.\Theta^2.(X-x).\left[1+\left(\frac{h'}{\rho}\right)^2\right]:$$

G représente ici, comme au n° II, le maximum de g.

V.

Occupons-nous maintenant de l'intégrale $\int_x^X gV^2dx$, qui entre en

dénominateur dans le terme général de la série (1). En remplaçant la variable x par la variable z, on a

$$\int_x^X gV^2 dx = \int_0^Z \left(g\theta^2 \frac{dx}{dz}\right) U^2 dz;$$

mais, d'après les valeurs de θ et de $\frac{dx}{dz}$, savoir

$$\theta = \frac{1}{\sqrt[4]{gk}}, \quad \frac{dx}{dz} = \sqrt{\frac{k}{g}},$$

on a

$$g\theta^2 \frac{dx}{dz} = 1.$$

Il vient donc

$$(16) \qquad \int_x^X g^2 V dx = \int_0^Z U^2 dz.$$

Posons

$$\int_0^z \lambda' U' \sin \rho(z - z') dz' = \epsilon,$$

l'équation (14) prendra la forme

$$(17) \qquad U = \cos \rho z + \frac{h' \sin \rho z}{\rho} + \frac{\epsilon}{\rho};$$

il est clair que pour des valeurs de ρ suffisamment grandes la fraction $\frac{\epsilon}{\rho}$ devient plus petite que tout nombre donné, et il est même aisé de se convaincre qu'elle possède alors une valeur numérique inférieure à

$$\frac{2LZ}{\rho} \sqrt{1 + \left(\frac{h'}{\rho}\right)^2}.$$

Maintenant, en mettant au lieu de U sa valeur, l'équation (16) devient

$$\int_x^X gV^2 dx = \int_0^Z dz \left(\cos \rho z + \frac{h' \sin \rho z}{\rho} + \frac{\epsilon}{\rho}\right)^2:$$

comme on a d'ailleurs

$$\int_0^Z \cos^2 \rho z dz = \frac{Z}{2} + \frac{\sin 2\rho Z}{4\rho},$$
$$\int_0^Z \sin^2 \rho z dz = \frac{Z}{2} - \frac{\sin 2\rho Z}{4\rho},$$

il en résulte que l'intégrale $\int_x^X gV^2 dx$ a une valeur de la forme

$$\int_x^X gV^2 dx = \frac{Z}{2}\left[1 + \left(\frac{h'}{\rho}\right)^2\right] + \frac{\eta}{\rho},$$

$\frac{\eta}{\rho}$ représentant une quantité que l'on rendra aussi petite que l'on voudra et par exemple plus petite que la moitié du premier terme

$$\frac{Z}{2}\left[1 + \left(\frac{h'}{\rho}\right)^2\right],$$

en prenant ρ suffisamment grand : pour des valeurs de ρ très grandes, on a donc

$$\int_x^X gV^2 dx > \frac{Z}{4}\left[1 + \left(\frac{h'}{\rho}\right)^2\right].$$

VI.

Revenons maintenant aux formules (14) et (15), lesquelles peuvent s'écrire ainsi

$$\begin{aligned} U = \cos \rho z\left(1 - \frac{1}{\rho}\int_0^z \lambda' U' \sin \rho z' dz'\right) \\ + \sin \rho z\left(\frac{h'}{\rho} + \frac{1}{\rho}\int_0^z \lambda' U' \cos \rho z' dz'\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dU}{dz} = -\sin \rho z\left(\rho - \int_0^z \lambda' U' \sin \rho z' dz'\right) \\ + \cos \rho z\left(h' + \int_0^z \lambda' U' \cos \rho z' dz'\right): \end{aligned}$$

nous en déduirons aisément la valeur de $\frac{dU}{dz} + H'U$ relative à $z = Z$,

et en égalant cette valeur à zéro (conformément à la condition (11)), nous aurons l'équation dont les valeurs de ρ dépendent. En posant

$$P = h' + H' + \int_0^Z \lambda' U' \left(\cos \rho z' - \frac{H' \sin \rho z'}{\rho}\right) dz',$$

$$P' = \frac{H'h'}{\rho} + \int_0^Z \lambda' U' \left(\frac{H' \cos \rho z'}{\rho} + \sin \rho z'\right) dz',$$

cette équation sera

$$P \cos \rho Z - (\rho - P') \sin \rho Z = 0,$$

d'où l'on tire

$$(18) \qquad \tang \rho Z = \frac{P}{\rho - P'}:$$

P et P′ sont deux fonctions de ρ, la première paire, la seconde impaire : les racines de l'équation (18) sont donc deux à deux égales et de signes contraires, ce qui doit être, puisque l'on a posé $r = \rho^2$, d'où résulte $\rho = \pm \sqrt{r}$: il est aisé de voir en outre que l'équation (18) a une infinité de racines réelles : on s'en convaincra en regardant ρ comme une abscisse variable, et construisant les deux courbes qui ont respectivement pour équations $y = \tang \rho Z$, $y = \frac{P}{\rho - P'}$, courbes dont la seconde a pour asymptote l'axe des abscisses.

Les grandes valeurs de ρ ou $\sqrt{r}$ s'obtiennent sans difficulté puisque l'équation (18) résolue donne

$$\rho Z = (n - 1)\pi + \operatorname{arc\,tang} \frac{P}{\rho - P'},$$

n désignant un nombre entier quelconque que nous supposerons très grand. Cette expression générale de ρ fournit, à très peu près,

$$\rho \quad \text{ou} \quad \sqrt{r} = \frac{(n-1)\pi}{Z},$$

ou plus exactement,

$$\rho \quad \text{ou} \quad \sqrt{r} = \frac{(n-1)\pi}{Z} + \frac{P_0}{(n-1)\pi},$$

P_n étant $= h' + H' + \frac{1}{2}\int_0^Z \lambda dz$. Je ne m'arrêterai pas à démontrer cette dernière formule dont nous n'aurons jamais besoin.

En général les grandes valeurs de $\sqrt{r}$ sont de la forme

$$\rho \quad \text{ou} \quad \sqrt{r} = \frac{(n-1)\pi}{Z} + i_n,$$

i_n désignant une très petite quantité. Quand on donne à n une valeur déterminée très grande, la racine correspondante est précisément la $n^{\text{ième}}$ des racines r_1, r_2, ... rangées par ordre de grandeur. Pour constater ce fait, il suffit d'observer que lorsque ρ est très grand $\left(\text{auquel cas on a à très peu près } \rho = \frac{(n-1)\pi}{Z}\right)$, U se réduit sensiblement à

$$U = \cos \rho z = \cos \frac{(n-1)\pi z}{Z}:$$

par suite V devient

$$V = \frac{1}{\sqrt[4]{gk}} \cos \frac{(n-1)\pi z}{Z},$$

et s'évanouit précisément $(n-1)$ fois lorsque z croît de o à Z, c'est-à-dire lorsque x croît de x à X. En vertu d'un théorème de M. Sturm, cette valeur de V_n est donc celle qui répond à la $n^{\text{ième}}$ racine r_n. D'après cette démonstration qu'il serait aisé de rendre plus rigoureuse en tenant compte des quantités infiniment petites qui ont été négligées, on a pour un indice n très grand

$$\sqrt{r_n} = \frac{(n-1)\pi}{Z} + i_n = \frac{3n}{Z} + \frac{(\pi-3)\,n}{Z} - \frac{\pi}{Z} + i_n,$$

et par suite

$$\sqrt{r_n} > \frac{3n}{Z},$$

puisque π est > 3, et que $-\frac{\pi}{Z} + i_n$, n'a jamais une valeur considérable. De là résulte finalement

$$r_n > \frac{9n^2}{Z^2}.$$

VII.

En combinant ensemble les deux inégalités

$$V\int_x^X gVf(x)dx < 4F.G.\Theta^2.(X-x)\left[1+\left(\frac{h'}{\varrho}\right)^2\right],$$
$$\int_x^X gV^2dx > \frac{Z}{4}\left[1+\left(\frac{h'}{\varrho}\right)^2\right],$$

que nous avons obtenues l'une au n° IV, l'autre au n° V, il vient

$$\frac{V\int_x^X gVf(x)dx}{\int_x^X gV^2dx} < \frac{16F.G.\Theta^2.(X-x)}{Z}:$$

le terme général de la série formant le second membre de l'équation

$$(19)\qquad u = \Sigma\left(\frac{Ve^{-rt}\int_x^X gVf(x)dx}{\int_x^X gV^2dx}\right),$$

a donc une valeur absolue plus petite que

$$\frac{16F.G.\Theta^2.(X-x)e^{-rt}}{Z}:$$

or, quand on suppose $t > 0$, la série qui a pour terme général cette dernière quantité est évidemment convergente : donc à *fortiori* la série (19) est aussi convergente.

Lorsqu'on a $t = 0$, la série (19) se change dans la série (1), et il faut une autre démonstration. En multipliant par $f(x)$ les deux membres de l'équation (2), on en déduit

$$gVf(x)dx = \frac{1}{r}lVf(x)dx - \frac{1}{r}.d\left(k\frac{dV}{dx}\right):$$

intégrant ensuite à partir de $x = \mathrm{x}$ jusqu'à $x = \mathrm{X}$, il vient

$$(20) \qquad \int_{\mathrm{x}}^{\mathrm{X}} g\mathrm{V}f(x)dx = \frac{1}{r}\int_{\mathrm{x}}^{\mathrm{X}} l\mathrm{V}f(x)dx - \frac{1}{r}\int_{\mathrm{x}}^{\mathrm{X}} f(x)\, d\left(k\,\frac{d\mathrm{V}}{dx}\right),$$

Une double intégration par parties donne

$$\int f(x)\, d\left(k\,\frac{d\mathrm{V}}{dx}\right) = k\left(f(x)\,\frac{d\mathrm{V}}{dx} - \mathrm{V}\,\frac{df(x)}{dx}\right) + \int \mathrm{V}d\left(k\,\frac{df(x)}{dx}\right).$$

Mais à la limite x de x on a

$$\frac{d\mathrm{V}}{dx} - h\mathrm{V} = 0, \quad \frac{df(x)}{dx} - hf(x) = 0,$$

d'où résulte, en éliminant h,

$$f(x)\,\frac{d\mathrm{V}}{dx} - \mathrm{V}\,\frac{df(x)}{dx} = 0:$$

cette même quantité

$$f(x)\,\frac{d\mathrm{V}}{dx} - \mathrm{V}\,\frac{f(x)}{dx}$$

est nulle aussi à l'autre limite X par une raison semblable. D'après cela, on obtient

$$\int_{\mathrm{x}}^{\mathrm{X}} f(x)d\left(k\,\frac{d\mathrm{V}}{dx}\right) = \int_{\mathrm{x}}^{\mathrm{X}} \mathrm{V}d\left(k\,\frac{df(x)}{dx}\right),$$

moyennant quoi l'équation (20) se réduit à

$$\int_{\mathrm{x}}^{\mathrm{X}} g\mathrm{V}f(x)dx = \frac{1}{r}\int_{\mathrm{x}}^{\mathrm{X}} \mathrm{V}f_1(x)dx,$$

$f_1(x)dx$ représentant la fonction

$$lf(x)dx - d\left(k\,\frac{df(x)}{dx}\right).$$

Le terme général de la série (1) peut donc être mis sous la forme

$$\frac{\mathrm{V}\int_{\mathrm{x}}^{\mathrm{X}} \mathrm{V} f_1(x)\,dx}{r\int_{\mathrm{x}}^{\mathrm{X}} g\mathrm{V}^2 dx}:$$

en supposant que ce terme général soit le $n^{ième}$ (n étant un indice très grand) et désignant par u_n sa valeur absolue, il suffira maintenant de combiner les inégalités

$$\mathrm{V}\int_{\mathrm{x}}^{\mathrm{X}} \mathrm{V} f_1(x)\,dx < 4\mathrm{F}_1.\mathrm{G}.\Theta^2.(\mathrm{X}-\mathrm{x})\left[1+\left(\frac{h'}{\varrho}\right)^2\right],$$

$$\int_{\mathrm{x}}^{\mathrm{X}} g\mathrm{V}^2 dx > \frac{\mathrm{Z}}{4}\left[1+\left(\frac{h'}{\varrho}\right)^2\right], \quad r_n > \frac{9n^2}{\mathrm{Z}^2},$$

et de poser

$$\frac{16\mathrm{F}_1.\mathrm{G}.\Theta^2.\mathrm{Z}.(\mathrm{X}-\mathrm{x})}{9} = \mathrm{M},$$

pour en conclure $u_n < \frac{\mathrm{M}}{n^2}$. Or la série qui a pour terme général $\frac{\mathrm{M}}{n^2}$ est convergente : donc la série (1) l'est aussi, ce qu'il fallait prouver. De plus l'erreur commise en égalant $f(x)$ à la somme des n premiers termes de cette série est moindre que

$$\mathrm{M}\Sigma\left(\frac{1}{\mu^2}\right),$$

quantité dont il est aisé de trouver une limite supérieure et dans laquelle μ prend successivement toutes les valeurs entières comprises entre n et ∞.

La valeur de u fournie par la série placée au second membre de l'équation (19) représente au bout du temps t, dans une barre hétérogène, la température du point dont l'abscisse est x (*). La vitesse de refroidissement $-\frac{du}{dt}$ est donc exprimée par la série

$$\Sigma\left[\frac{\mathrm{V}e^{-rt}.r.\int_{\mathrm{x}}^{\mathrm{X}} g\mathrm{V} f(x)\,dx}{\int_{\mathrm{x}}^{\mathrm{X}} g\mathrm{V}^2 dx}\right].$$

(*) Tome Ier de ce Journal, page 411.

Pour des valeurs positives de t, la convergence de cette série résulte évidemment de l'analyse précédente.

On démontrerait de la même manière la convergence des deux séries

$$\Sigma \frac{V \cos(t\sqrt{r}) \int_x^X gVf(x)dx}{\int_x^X gV^2 dx}, \quad \Sigma \frac{V \sin(t\sqrt{r}) \int_x^X gVf(x)dx}{\int_x^X gV^2 dx},$$

qui servent à résoudre plusieurs problèmes de mécanique.

Nous avons dans tout ce qui précède considéré les deux constantes h', H' comme ayant des valeurs finies. Quand une d'elles est infinie, on doit donc un peu modifier notre analyse; mais les modifications qu'il faut y apporter sont tellement légères que je regarde comme entièrement inutile de les développer ici.

VIII.

Revenons maintenant à l'équation $\varpi(r) = 0$ qui détermine le paramètre r, et prouvons que cette équation a toutes ses racines réelles. Pour cela rappelons un lemme que j'ai démontré dans mon premier mémoire (*), et que l'on peut énoncer ainsi : *soit* V_n *une quelconque des fonctions* V_1, V_2, *etc., qui se déduisent de* V *en y remplaçant r successivement par les racines réelles* r_1, r_2, *etc., de l'équation* $\varpi(r) = 0$: *si une fonction* $\varphi(x)$ *est telle qu'on ait*

$$\int_x^X V_n \varphi(x) dx = 0, \tag{21}$$

l'indice n restant indéterminé, cette fonction $\varphi(x)$ *sera égale à zéro pour toutes les valeurs de* x *comprises entre* x *et* X.

Ce lemme ne cesse pas d'être exact quand la fonction $\varphi(x)$ est imaginaire et de la forme $f(x) + \sqrt{-1}.F(x)$; car alors l'équation

---

(*) Tome Ier de ce Journal, page 261.

(21) se décompose dans les deux suivantes

$$\int_{x}^{X} V_n f(x)dx = 0, \quad \int_{x}^{X} V_n F(x)dx = 0,$$

qui donnent séparément $f(x) = 0$, $F(x) = 0$ et par suite $\varphi(x) = 0$.

Maintenant soit, s'il est possible, r' une racine imaginaire de l'équation $\varpi(r) = 0$ et V' la valeur de V correspondante : aucune des différences $r' - r_1$, $r' - r_2, \ldots$ ne sera nulle : par une formule connue on aura donc, quel que soit l'indice n,

$$\int_{x}^{X} gV'V_n dx = 0,$$

d'où l'on conclura $gV' = 0$, et par suite $V' = 0$, pour toutes les valeurs de x comprises entre x et X. Or cela est absurde : en effet on peut toujours se donner arbitrairement et supposer, par exemple, égale à l'unité, pour $x = \mathrm{x}$, soit la valeur de V', soit celle de $\frac{dV'}{dx}$, ces deux valeurs étant assujetties à la seule relation $\frac{dV'}{dx} - hV' = 0$; d'où il résulte que pour des valeurs de x très rapprochées de x et un peu plus grandes, la fonction V' est différente de zéro. Donc l'équation $\varpi(r) = 0$ n'a pas de racines imaginaires, C. Q. F. D.

Extrait d'une lettre de M. Terquem *à* M. Liouville.

« Il me semble que dans la discussion générale des courbes du second ordre, nos auteurs élémentaires négligent à tort un cas assez important : c'est celui où $B^2 - 4AC$ devient $\pm \infty$: alors l'ellipse se réduit à une droite de grandeur finie ou à deux droites parallèles, et l'hyperbole à une droite illimitée ou à deux droites parallèles. On a égard à cette réduction dans la *Mécanique Céleste* (liv. II, p. 197, à la fin du n° 27). Elle se présente aussi dans la discussion de la surface qu'on obtient, lorsque dans l'équation générale en x, y, on considère les cinq coefficiens comme des fonctions données d'une troisième variable. Quelles que soient ces fonctions, les sections parallèles au plan xy, sont des coniques dont la construction exige que l'on admette l'équation $B^2 - 4AC = \pm \infty$. L'omission de cette équation entraîne d'autres imperfections : ainsi l'on dit que la parabole est la limite d'une ellipse variable qui a un sommet et un foyer voisin fixes, et dont le centre décrit une droite en s'éloignant du foyer fixe ; mais si le centre s'en approche, en prenant la direction opposée, on obtient successivement un cercle, une droite limitée, une hyperbole qui coupe la parabole limite, ensuite une droite tangente à cette parabole, et finalement une série d'hyperboles extérieures à la parabole et qui vont sans cesse en se rétrécissant et finissent par se confondre avec cette courbe, de sorte que la parabole doit être considérée comme ayant à l'infini deux centres, l'un dans son intérieur et l'autre à l'extérieur. Cette considération est souvent utile pour se rendre compte de diverses transitions de fonctions : on peut s'en servir aussi pour démontrer que des deux paramètres qui correspondent à un système de diamètres conjugués, l'un reste fini et l'autre devient infini lorsque l'ellipse ou l'hyperbole deviennent des paraboles ; on ne démontre ordinairement cette proposition que pour les axes principaux. »

Paris, 4 octobre 1836.

NOTE

SUR LES ÉQUATIONS INDÉTERMINÉES DU SECOND DEGRÉ.

Formules d'Euler pour la résolution de l'équation.... $Cx^2 \pm A = y^2$. — Leur identité avec celles des algébristes indiens et arabes. — Démonstration géométrique de ces formules.

PAR M. CHASLES.

L'un des faits les plus étonnants que nous présente l'histoire des sciences, et l'un des plus importants, comme monument de l'ancienne civilisation de l'Orient, est sans contredit la résolution des équations indéterminées du deuxième degré, que contient le traité d'algèbre de Brahmegupta (*).

Diophante, dont les six livres de *Questions arithmétiques* qui nous sont parvenus, roulent sur l'analyse indéterminée, a résolu beaucoup d'équations du second degré, à deux ou plusieurs inconnues. Dans toutes, ce grand analyste de l'école d'Alexandrie a montré beaucoup d'adresse et de génie ; mais ses solutions sont diverses, appropriées à des questions particulières, et ne mettent pas sur la voie des méthodes générales dont cette partie de l'analyse était susceptible. Aussi a-t-il fallu en quelque sorte a créer de nouveau dans les temps modernes. Fermat en est regardé comme le premier inventeur; et les questions qu'il a proposées ou résolues, mais dont malheureusement les solu-

(*) *Algebra, with arithmetic and mensuration, from the sanscrit, of Brahmegupta and Bhascara, translated by Colebrooke,* in-4°, 1817.

tions ne nous sont pas parvenues, ont depuis occupé les plus célèbres géomètres.

La question qui paraît être plus particulièrement l'origine de la théorie des équations indéterminées du second degré, est celle de trouver les valeurs de x, rationnelles, en nombres entiers, qui rendent le binome $Cx^2 + 1$ un carré, ou en d'autres termes, c'est de résoudre l'équation $Cx^2 + 1 = y^2$, en valeurs rationnelles et entières de x et de y.

Cette question avait été proposée, en quelque sorte comme défi, aux géomètres anglais. Lord Brouncker et Wallis la résolurent, en donnant à x et à y des expressions générales de la forme $\frac{2m}{m^2 - c}$, et $\frac{m^2 + c}{m^2 - c}$. Frénicle trouva aussi cette solution. Et Ozanam, ainsi que Prestet, la donnèrent comme ayant été celle de Fermat.

Mais ces géomètres n'aperçurent pas toute l'importance de l'équation $Cx^2 + 1 = y^2$, qui était indispensable pour la résolution en nombres entiers, de l'équation plus générale $Cx^2 \pm A = y^2$, à laquelle se ramène la résolution de toutes les autres équations indéterminées du second degré. C'est à Euler qu'est due cette double remarque, qui a été l'origine des progrès de l'analyse indéterminée. Cependant « il est naturel de croire que Fermat, qui s'était principalement occupé de la théorie des nombres entiers, sur lesquels il nous a d'ailleurs laissé de très beaux théorèmes, avait été conduit au problème dont il s'agit (la résolution de l'équation $Cx^2 + 1 = y^2$) par les recherches qu'il avait faites sur la résolution générale des équations de la forme $Cx^2 + A = y^2$, auxquelles se réduisent toutes les équations du second degré à deux inconnues (*). » Mais la perte des manuscrits de Fermat a retardé de près d'un siècle la résolution des équations indéterminées du second degré, qui est due à Euler, et que Lagrange a complétée aussitôt, en ce qui regarde la condition de nombres entiers.

La solution d'Euler pour l'équation

$$Cx^2 + A = y^2$$

(*) Nous citons ici textuellement les paroles de Lagrange (parag. VIII, des *Additions aux Éléments d'Algèbre* d'Euler).

suppose, d'une part, que l'on connaisse un premier système de racines x', y', de cette équation, et ensuite qu'on sache résoudre l'équation

$$Cx^2 + 1 = y^2.$$

Soient a et b les racines de cette équation : les expressions des racines de la proposée seront

$$x = ay' + bx',$$
$$y = Cax' + by'.$$

Telle est la solution qu'Euler a obtenue par des considérations analytiques.

Eh bien! cette solution, dont aucune trace ne s'est trouvée dans Diophante, qui a échappé aux recherches d'habiles géomètres modernes pendant près d'un siècle, et qui enfin a fait honneur au grand Euler, cette solution, dis-je, se trouve dans les ouvrages indiens, depuis plus de douze siècles, et a probablement une origine encore plus reculée. On conçoit d'après cela, qu'un célèbre analyste ait pu dire dernièrement, que si les ouvrages mathématiques hindous que de savants orientalistes de l'Angleterre nous ont fait connaître depuis une vingtaine d'années, eussent été apportés en Occident 60 ou 80 ans plus tôt, « leur apparition, même après la mort de Newton et » du vivant d'Euler, aurait pu hâter parmi nous les progrès de l'ana» lyse algébrique (*). »

Bien que la solution des géomètres indiens soit la même que celle d'Euler, on verra peut-être avec intérêt sous quelle forme ils la présentent. Elle fait l'objet, dans l'ouvrage de Brahmegupta, de deux règles seulement, qui y sont énoncées de la manière la plus concise et la plus générale. En voici le sens, exprimé en langage algébrique :

Première règle. Pour la résolution de l'équation

$$Cx^2 + 1 = y^2.$$

(*) *Histoire des Sciences mathématiques en Italie*, t. Ier p. 133.

On prend un système de racines de l'équation

$$Cx^2 \pm A = y^2,$$

où A *est indéterminé; soient l et g ces racines, de sorte que l'on ait* $Cl^2 \pm A = g^2$; *les racines de la proposée seront*

$$y = \frac{Cl^2 + g^2}{A}, \quad \text{et} \quad x = \frac{2lg}{A}.$$

Remplaçant A par $g^2 - Cl^2$, et faisant $l = 1$, on aura précisément les expressions trouvées par Fermat, Brouncker, etc.

Seconde règle. Pour la résolution de l'équation

$$Cx^2 \pm A = y^2,$$

quand on connaît un premier système de racines L, G de cette équation :

On prend un système de racines de l'équation

$$Cx^2 + 1 = y^2;$$

soient l et g ces racines;

Les expressions générales des racines de la proposée seront

$$x = Lg + lG,$$
$$y = CLl + Gg \ (*).$$

(*) Pour donner un exemple du style et de la forme des ouvrages mathématiques des Indiens, qui sont encore peu connus, nous rapportons ici le texte même de Brahmegupta, suivant la traduction de M. Colebrooke. On y verra combien il serait difficile de les comprendre, si des applications numériques ne venaient au secours du lecteur.

La résolution des équations indéterminées du second degré, est l'objet des sections VI et VII de l'algèbre de Brahmegupta, appelée *Cuttaca.*

Dans la section VI, intitulée : *Equation involving a factum*, on résout l'équation $Ax + By + C = Dxy$.

Après ces deux règles, qui sont identiques à la solution d'Euler, Brahmegupta donne plusieurs règles particulières pour les cas où A et C sont des carrés, ou bien sont le produit de carrés par d'autres nombres. Et il résout ensuite plusieurs équations doubles.

La règle est ainsi énoncée, dès le début et sans aucune explication préliminaire :

« 61. Rule : The (product of) multiplication of the factum and absolute » number, added to the product of the (coefficients of the) unknown, is divided by » an arbitrarily assumed quantity. Of the arbitrary divisor and the quotient, » whichever is greatest is to be added to the least (coefficient), and the least to » the greatest. The two (sums) divided by the (coefficient of the) factum are » reversed. »

Ce qui signifie que les racines de l'équation proposée sont de la forme

$$y = \frac{A + n}{D},$$

$$x = \frac{B + \frac{C.D + A.B}{n}}{D}.$$

La section VII, où l'on résout l'équation $Cx^2 \pm A = y^2$, est intitulée : *Square affected by coefficient,* et commence ainsi :

« 65-66. Rule : A root (is set down) two-fold, and (another, deduced) from » the assumed square multiplied by the multiplier, and increased or diminished » by a quantity assumed. The product of the first (pair), taken into the mul- » tiplier, with the product of the last (pair) added, is a " last" root. The sum » of the products of oblique multiplication is a " first" root. The additive is the » product of the like additive or subtractive quantities. The roots (so found), » divided by the (original) additive or subtractive quantity, are (roots answe- » ring) for additive unity. »

Puis vient un exemple numérique, et ensuite la seconde règle, que voici :

« 68. Rule : Putting severally the roots for additive unity under roots for » the given additive or subtractive, "last" and "first" roots (thence deduced » by composition) serve for the given additive or subtractive. »

Nous avons donné ci-dessus le sens de ces deux règles, dont la première s'applique à l'équation $Cx^2 + 1 = y^2$, et la seconde à l'équation $Cx^2 \pm A = y^2$.

Les mots entre parenthèses, dans le texte anglais, ont été ajoutés par M. Co-

En parlant des géomètres qui, après Diophante, et depuis Fermat jusqu'à Lagrange, ont concouru au perfectionnement de l'analyse indéterminée, nous nous sommes renfermé dans les citations historiques que l'on a coutume de faire au sujet de cette partie de l'algèbre. Mais il paraît qu'on a toujours commis sur ce point une omission, qu'il est d'autant plus à propos de réparer ici, en parlant de l'analyse indienne, que cette omission porte précisément sur une solution qui nous paraît dériver des ouvrages hindous; solution qui aurait suppléé ces ouvrages, et aurait mis aussitôt sur la voie des découvertes réservées à Euler les géomètres qui en auraient eu connaissance. Nous voulons parler de quelques questions d'analyse indéterminée, résolues par Fibonacci (appelé communément Léonard de Pise) dans son traité d'algèbre, ouvrage original, resté manuscrit au grand regret des géomètres. Ces questions ont été reproduites par Lucas de Burgo, dans sa *Summa de Arithmetica, Geometria, etc.*, et par Cardan dans son traité d'Arithmétique (*).

Celle qui se rapporte à l'équation $Cx^2 \pm A = y^2$, et qui en contient virtuellement la solution donnée par Euler, est celle-ci : *étant donnés deux nombres carrés, diviser leur somme en deux autres nombres carrés*, ou en d'autres termes

Résoudre en nombres rationnels, l'équation

$$x^2 + y^2 = A,$$

lebrooke. On voit quelle difficulté présentait, par sa concision extrême, le texte original.

Bhascara est moins concis que Brahmegupta, il dit en plusieurs paragraphes ce que celui-ci avait exprimé en un seul ; mais il n'est guère plus intelligible. Nous parlerons dans un autre écrit des différences notables, sous le rapport scientifique, que nous avons remarquées dans la partie géométrique des deux ouvrages, et qui nous portent à regarder Brahmegupta comme ayant été supérieur à Bhascara, qui n'est, par rapport à lui, qu'un scoliaste qui ne l'a pas toujours compris.

(1) Viète est le premier qui ait démontré les formules de Fibonacci, pour l'équation $x^2 + y^2 = A$, au commencement du livre IV, de ses *Zététiques*. Peu de temps après, Alexandre Anderson s'est occupé de la même question ; mais seulement pour donner une démonstration géométrique des formules de Diophante.

quand on connaît un premier système de racines, x', y' *de cette équation.*

On prendra deux nombres quelconques a, b, dont la somme des carrés, soit un carré c^2; ce qui peut se faire d'une infinité de manières. [Le premier nombre a étant pris arbitrairement, le second sera de la forme $\frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{n}-n\right)$].

On a donc

$$x'^2 + y'^2 = A,$$

et

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

D'après cela, les expressions générales des racines de l'équation proposée seront

$$x = \frac{ay' + bx'}{c},$$

$$y = \frac{ax' - by'}{c}.$$

Telle est la solution rapportée sans démonstration et appliquée à plusieurs exemples numériques par Lucas de Burgo et Cardan (*).

Ces formules auraient dû attirer l'attention des analystes, ne fût-ce

(*) Lucas de Burgo et Cardan annoncent que cette solution est de Léonard de Pise; et le premier ajoute qu'elle se trouve dans son *Traité des nombres carrés*, et qu'elle y est démontrée *par la considération des figures géométriques*. Ce traité, malheureusement, n'existe plus (Montucla, *Histoire des Mathématiques*, t. II, *Additions*, p. 715). M. Cossali l'a rétabli avec succès, d'après les fragments qui s'en trouvent dans Lucas de Burgo (Colebrooke, *Brahmegupta and Bhascara, Algebra*, Dissertation; p. LVII). Mais il n'a pas rétabli la démonstration géométrique. (Voir *Origine, trasporto in Italia, primi progressi in essa dell' Algebra*, t. Ier, ch. V, p. 96).

M. Colebrooke, en parlant des questions d'analyse indéterminée, traitées par Lucas de Burgo, cite un passage de la *Summa de Arithmetica*, où il est question de Fibonacci; mais ce n'est pas celui où est résolue l'équation $x^2 + y^2 = A$, et où il est dit que Fibonacci employait des considérations de géométrie. M. Colebrooke paraît n'avoir pas remarqué ce passage, ni, surtout, l'analogie que présentent les formules de Fibonacci avec celles de Brahmegupta.

que par la différence qu'elles présentent avec la solution de Diophante. Celle-ci en effet, exposée algébriquement et sous la forme la plus générale, conduit aux formules suivantes

$$x = \frac{(n^2 - 1)x' + 2ny'}{n^2 + 1},$$
$$y = \frac{2nx' - (n^2 - 1)y'}{n^2 + 1},$$

qui ne contiennent qu'une indéterminée n, et qui, ne faisant point usage de l'équation auxiliaire $a^2 + b^2 = c^2$, ne sont pas propres à la solution de la question en nombres entiers. On voit donc quel avantage présentaient les formules des géomètres italiens.

On reconnaît, à la première vue de ces formules, toute leur analogie avec celles d'Euler et de Brahmegupta, dont elles ne sont qu'un cas particulier. Mais ce qu'il y a de remarquable c'est que, de ce cas particulier, on peut s'élever naturellement et sans aucune difficulté au cas général, ainsi que nous le verrons, de sorte que cette équation, si elle avait fixé les regards des géomètres, les aurait conduits depuis long-temps à la solution générale, propre à la condition de nombres entiers, telle que nous la trouvons chez les Indiens, et telle que Euler l'a découverte dans le siècle dernier.

Nous avons dit que cette solution de Lucas de Burgo et de Cardan, nous paraissait dériver de celle des Indiens. En effet, Fibonacci, qui l'a fait connaître en Europe, avait rapporté ses connaissances mathématiques de chez les Arabes; c'est donc à eux que paraît due cette solution; or, les Arabes, placés entre l'Inde et l'Égypte, avaient emprunté leur science des Grecs d'Alexandrie et des Hindous. Les Grecs, comme nous le voyons par les solutions de Diophante, n'ont point connu celle dont il est question. Elle est donc venue des Hindous (*), qui la possédaient depuis plusieurs siècles. Les ouvrages des

(*). La manière dont Lucas de Burgo et Cardan disposent sur le papier, les quantités connues, pour effectuer le calcul des racines cherchées, a la plus grande ressemblance avec la manière des Indiens, et dénote l'origine de leur méthode.

Les Indiens placent les deux racines données x', y', l'une à côté de l'autre

Arabes, qui nous sont connus en trop petit nombre, et auxquels on a fait peu d'attention, parce qu'on a cru n'y trouver qu'un faible écho de l'École grecque, doivent inspirer plus d'intérêt, aujourd'hui que l'on y reconnaît des traces prononcées d'un autre foyer de lumières.

Les ouvrages indiens ne contiennent aucune démonstration. A la faveur de cette circonstance, quelques écrivains, encore tout pleins de l'étonnement que leur avait causé la vue des théories savantes et des questions difficiles qu'ils renferment, et peut-être un peu préoccupés de l'intérêt des Grecs qui n'avaient point eu de rivaux jusqu'ici, ont cru pouvoir attribuer les découvertes analytiques des Hindous à quelques rencontres dues au hasard, et provoquées seulement par des essais isolés et faits sans méthode ni intelligence. Mais une telle opinion ne pouvait se soutenir, et nous devons reconnaître dans les ouvrages indiens les vestiges d'une science depuis long-temps cultivée, et parvenue, dans de certaines limites, à une grande perfection.

Nous n'avions nullement l'intention de chercher à rétablir quelques démonstrations qui pourraient répondre aux théories algébriques des Hindous, quand une remarque à laquelle nous a conduit l'examen de la partie géométrique que contiennent leurs ouvrages, nous a mis sur la voie d'une solution *géométrique* des équations indéterminées du second degré, qui donne précisément les formules de Brahmegupta. Cela nous a fait supposer que c'était aussi par des

---

sur une ligne horizontale; et au-dessous d'elles sur une seconde ligne horizontale, ils placent les deux racines a, b, de l'équation auxiliaire, de sorte que x' et a sont sur une ligne verticale, et y' et b sur une seconde ligne verticale. Puis ils multiplient l'une par l'autre, les deux x' et a qui sont sur la première ligne verticale, et ensuite les deux autres. Ils font la différence des deux produits, et la divisent par c; c'est l'une des racines. Pour former l'autre, ils multiplient les quatre nombres *en croix*, et font la somme des deux produits, qui, divisée par c, donne la seconde racine.

Les géomètres italiens opèrent de même, si ce n'est qu'ils placent l'une à côté de l'autre, les deux racines x' et a, et au-dessous d'elles les deux y' et b. Ils emploient, comme les Indiens, l'expression de multiplication *en croix*.

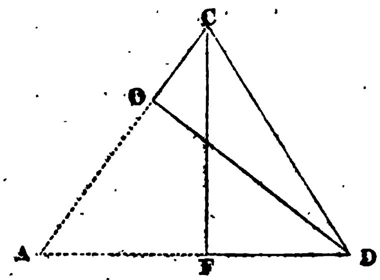
considérations géométriques que cet auteur était parvenu à cette solution; et en effet, on sait que les Indiens, et à leur imitation les Arabes, employaient toujours concurremment la géométrie et l'analyse (*), celle-ci pour résoudre leurs questions géométriques; et la première pour démontrer leurs règles d'analyse, et interpréter et peindre aux yeux les résultats de l'algèbre. Cela nous expliquerait aussi la présence, dans les ouvrages de Brahmegupta, de cette partie géométrique, à laquelle on a fait peu d'attention, et sur laquelle, généralement on s'est mépris, je crois, en la regardant comme formant les éléments de géométrie des Hindous ou du moins le résultat des connaissances géométriques dont ils se servaient. Dans un autre écrit, j'entrerai dans quelques développements à ce sujet, en donnant l'interprétation des propositions de géométrie de Brahmegupta dont on n'a point encore parlé, et qui avaient besoin d'être devinées. Si je ne me trompe, elles roulent presque toutes sur une seule théorie géométrique, qui est celle du quadrilatère inscrit au cercle, et résolvent la question de construire un quadrilatère inscriptible, dont l'aire, les diagonales et plusieurs autres lignes, ainsi que le diamètre du cercle, soient exprimés en nombres rationnels.

C'est dans cette question même que nous avons trouvé une méthode géométrique pour la résolution des équations indéterminées du second degré, méthode que nous supposons avoir pu être celle de Brahmegupta. Nous l'exposerons dans l'écrit dont nous venons de parler; mais ces considérations nous ont conduit à une méthode plus directe et plus élémentaire. C'est celle que nous allons présenter.

Question. *Connaissant un premier système de racines x', y', de l'équation $x^2+y^2=A$, on demande de trouver d'autres racines rationnelles de cette équation.*

Solution géométrique. Que l'on forme un triangle rectangle COD, qui ait pour côtés de l'angle droit $OC=x'$, $OD=y'$, la question sera de construire sur l'hypoténuse CD un autre triangle CFD, dont les côtés CF, FD soient rationnels.

(*) Colebrooke, *Algebra of Brahmegupta and Bhascara;* Introduction historique, p. 15; Libri, *Histoire des Sciences mathématiques en Italie*, t. Ier, p. 126.



Prolongeons les côtés CO, DF, jusqu'à leur rencontre en A; on a le triangle CAD, dans lequel les perpendiculaires DO, CF, sont en raison inverse des côtés CA, DA. Si donc ces côtés sont rationnels, la perpendiculaire CF, qui est l'une des racines de l'équation proposée, le sera aussi; le segment DF, qui est l'autre racine, sera aussi rationnel, suivant son expression connue en fonction de trois côtés $\left(FD = \frac{\overline{AD}^2 + \overline{CD}^2 - \overline{AC}^2}{2AD}\right)$. Or on a $CA = AO + CO$; CO est rationnel, par hypothèse; donc il faut que AO soit rationnel. Donc la question se réduit à construire sur le côté DO un triangle rectangle AOD, dont les côtés soient rationnels. On sait former un tel triangle d'une infinité de manières, par la formule suivante, très connue et fort usitée en analyse et en géométrie

$$\overline{OD}^2 + \tfrac{1}{4}\left(\frac{\overline{OD}^2}{n} - n\right)^2 = \tfrac{1}{4}\left(\frac{\overline{OD}^2}{n} + n\right)^2 \text{ (*)};$$

(*) Cette formule est d'un grand usage dans les ouvrages de Brahmegupta et de Bhascara. Elle est une généralisation des deux règles imaginées par Pythagore et Platon, pour construire sur un côté donné un triangle rectangle en nombres rationnels et entiers.

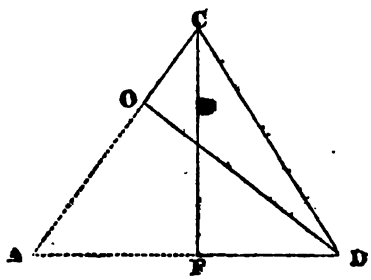
Si le côté donné est un nombre impair, il faut supposer $n = 1$, et l'on a la règle de Pythagore; si le côté est pair, on suppose $n = 2$, et l'on a la règle de Platon.

C'est d'après Proclus (*In primum Euclidis elementorum librum commentariorum Libri IV*, proposition 47), que l'on attribue ces deux règles à Pythagore et à Platon; mais Boece, antérieur de près d'un siècle à Proclus, donne la seconde dans le second livre de sa Géométrie, comme étant d'Archytas, célèbre pythagoricien, dont Platon avait suivi les leçons en Italie.

c'est-à-dire qu'on prendra le côté OA égal à $\frac{1}{2}\left(\frac{\overline{OD}^2}{n} - n\right)$, et l'hypoténuse AD égale à $\frac{1}{2}\left(\frac{\overline{OD}^2}{n} + n\right)$; n étant un nombre arbitraire.

Ayant construit ce triangle AOD, on abaissera du point C la perpendiculaire CF sur son hypoténuse, cette perpendiculaire CF, et le segment DF qu'elle détermine, seront les deux racines cherchées.

Ainsi la question est résolue *par une construction géométrique.*



Pour passer de cette solution géométrique aux formules de l'analyse, il suffit de chercher les expressions de CF et DF, en fonction des lignes qui servent à construire ces racines.

La comparaison des triangles semblables ACF, ADO, donne

$$CF = DO . \frac{AC}{AD}, \quad AF = AO . \frac{AC}{AD}.$$

Or

$$DF = AD - AF, \quad \text{et} \quad AC = AO + OC;$$

on conclut de là

$$CF = \frac{DO . AO + DO . OC}{AD},$$

$$DF = \frac{\overline{OD}^2 - OA . OC}{AD}.$$

Telles sont les expressions des racines de l'équation proposée: elles sont rationnelles, puisque CO et DO le sont par hypothèse, et OD, DA par construction.

Pour donner à ces formules la forme de celles de Léonard de

Pisc, faisons

$$CO = x', \quad OD = y', \quad CF = x, \quad DF = y,$$
$$OA = a, \quad AD = c;$$

il viendra

$$x = \frac{ay' + y'x'}{c},$$
$$y = \frac{ax' - y'^2}{c}.$$

On a entre a, c et y' la relation

$$c^2 - a^2 = y'^2;$$

ou

$$\frac{a^2}{c^2} + \frac{y'^2}{a^2} = 1.$$

Représentons $\frac{a}{c}$ par $\frac{\alpha}{\gamma}$, $\frac{y'}{c}$ par $\frac{6}{\gamma}$; les trois indéterminées α, 6, γ, seront liées par l'équation

$$\alpha^2 + 6^2 = \gamma^2;$$

et les formules deviendront

$$x = \frac{\alpha y' + 6x'}{\gamma},$$
$$y = \frac{\alpha x' - 6y'}{\gamma}.$$

Elles sont les mêmes que celles d'Euler, pour le cas particulier $x^2 + y^2 = A$.

Il est facile de passer de là à la résolution de l'équation $Cx^2+y^2=A$.

En effet, dans l'équation $x^2 + y^2 = A$, et dans les deux équations de condition

$$x'^2 + y'^2 = A,$$
$$\alpha^2 + 6^2 = \gamma^2,$$

remplaçons x par $x\sqrt{C}$, x' par $x'\sqrt{C}$, α par $\alpha\sqrt{C}$; elles deviendront

$$\begin{aligned} Cx^2 + y^2 &= A, \\ Cx'^2 + y'^2 &= A, \\ \alpha^2 + 6^2 &= \gamma^2. \end{aligned}$$

Et les expressions des racines x et y, trouvées ci-dessus, deviendront

$$\begin{aligned} x\sqrt{C} &= \frac{\alpha y'\sqrt{C} + 6x'\sqrt{C}}{\gamma}, \\ y &= \frac{C\alpha x' - 6y'}{\gamma}, \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} x &= \frac{\alpha y' + 6x'}{\gamma}, \\ y &= \frac{C\alpha x' - 6y'}{\gamma}. \end{aligned}$$

Ce sont les racines qui répondent à l'équation

$$Cx^2 + y^2 = A.$$

Maintenant, ces racines rendant identique cette équation, quelles que soient les valeurs des deux nombres C et A, on peut les supposer négatives; de sorte que l'équation peut prendre la forme

$$Cx^2 \pm A = y^2,$$

et ses racines deviennent

$$\begin{aligned} x &= \frac{\alpha y' + 6x'}{\gamma}, \\ y &= \frac{C\alpha x' + 6y'}{\gamma}. \end{aligned}$$

Nous donnons le signe $+$ à la valeur de y, parce que cette variable n'entrant qu'au carré dans l'équation, son signe est indifférent.

Les équations de condition pour x', y', et pour α, 6, γ, sont

$$Cx'^2 \pm A = y'^2,$$

et

$$C\alpha^2 + 1 = \beta^2.$$

C'est-à-dire que x' et y' sont un système de racines de l'équation proposée, et $\frac{\alpha}{\gamma}$, $\frac{\beta}{\gamma}$, sont un système de racines de l'équation $Cx^2 + 1 = y^2$.

Nous avons donc obtenu précisément la solution de Brahmegupta et d'Eulér, et nous l'avons déduite, ainsi que nous l'avions annoncé, de pures considérations de géométrie, qui n'ont demandé aucune connaissance de l'algèbre.

Mais nous devons observer que l'introduction du coefficient C, et le changement de son signe, dans l'équation de condition primitive $\alpha^2 + \beta^2 = \gamma^2$, dont nous savions construire géométriquement les racines rationnelles, exige que nous sachions résoudre l'équation $Cx^2 + 1 = y^2$, qui remplace cette équation primitive.

Pour résoudre cette équation, il se présente deux procédés. D'abord nous pouvons nous servir de la même formule

$$4m^2n^2 + (m^2 - n^2)^2 = (m^2 + n^2)^2,$$

qui nous a déjà servi pour former les racines de l'équation $a^2 + b^2 = c^2$.

A cet effet, nous l'écrirons sous la forme

$$\frac{4m^2n^2}{(m^2 - n^2)^2} + 1 = \frac{(m^2 + n^2)^2}{(m^2 + n^2)^2};$$

faisons $n = \sqrt{C}$, il vient

$$\frac{4Cm^2}{(m^2 - C)^2} + 1 = \frac{(m^2 + C)^2}{(m^2 - C)^2};$$

comparant cette identité à l'équation

$$Cx^2 + 1 = y^2,$$

on voit que les racines de celle-ci sont de la forme

$$x = \frac{2m}{m^2 - C}, \quad y = \frac{m^2 + C}{m^2 - C}.$$

Conséquemment, les valeurs de $\frac{\alpha}{\gamma}$ et $\frac{\beta}{\gamma}$, dans l'équation de condition $C\alpha^2 + \beta^2 = \gamma^2$, seront

$$\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{2m}{m^2 - C}, \quad \frac{\beta}{\gamma} = \frac{m^2 + C}{m^2 - C}.$$

La seconde manière d'obtenir ces valeurs de $\frac{\alpha}{\gamma}$ et $\frac{\beta}{\gamma}$, résulte des formules mêmes que nous avons trouvées pour les racines de l'équation $Cx^2 \pm A = y^2$.

En effet ces formules, si l'on y regarde $\frac{\alpha}{\gamma}$, $\frac{\beta}{\gamma}$ comme les inconnues, donneront des valeurs rationnelles de ces quantités, qui seront des racines de l'équation $Cx^2 + 1 = y^2$, en fonction de deux systèmes de racines de l'équation $Cx^2 \pm A = y^2$.

Voici quelles sont ces valeurs

$$\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{xy' - yx'}{y'^2 - Cx'^2}, \quad \frac{\beta}{\gamma} = \frac{yy' - Cxx'}{y'^2 - Cx'^2},$$

x, y et x', y', sont deux systèmes quelconques de racines de l'équation $Cx^2 \pm A = y^2$. On peut supposer $x' = -x$, et $y' = y$. Alors les valeurs de $\frac{\alpha}{\gamma}$ et $\frac{\beta}{\gamma}$ deviennent

$$\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{2xy}{y^2 - Cx^2}, \quad \frac{\beta}{\gamma} = \frac{y^2 + Cx^2}{y^2 - Cx^2}.$$

Ce sont les racines de l'équation $Cx^2 + 1 = y^2$, en fonction d'un système de racines de l'équation $Cx^2 \pm A = y^2$.

Dans celle-ci A est arbitraire; on pourra donc prendre pour x et y deux nombres quelconques, et alors A se trouvera déterminé.

Cela nous donne lieu aux deux observations suivantes :

D'abord x et y pouvant être quelconques, faisant $x = 1$, et remplaçant y par m, on a précisément les expressions de $\frac{\alpha}{\gamma}$, $\frac{\mathcal{C}}{\gamma}$ que nous avions trouvées ci-dessus.

En second lieu, si l'on considère x et y comme racines de l'équation $Cx^2 \pm A = y^2$, et qu'on remplace $y^2 - Cx^2$ par A, les expressions de $\frac{\alpha}{\gamma}$ et $\frac{\mathcal{C}}{\gamma}$ deviennent

$$\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{2xy}{\pm A}, \quad \frac{\mathcal{C}}{\gamma} = \frac{y^2 + Cx^2}{\pm A}.$$

Ces expressions répondent parfaitement à la première des deux règles qui comprennent, dans Brahmegupta, la résolution des équations indéterminées du second degré.

On pourrait donc supposer, jusqu'à un certain point, que ce sont des considérations géométriques, analogues à celles que nous avons employées, qui ont conduit le géomètre indien à la solution de ce problème d'analyse; ajoutons, pour justifier une telle supposition, que c'est dans la partie géométrique même de l'ouvrage de Brahmegupta, que nous avons puisé l'idée de recourir à la géométrie, pour résoudre les questions précédentes; ce que nous exposerons dans un autre écrit.

Nous avons appliqué d'abord la solution géométrique à l'équation particulière $x^2 + y^2 = A$, pour montrer comment on pouvait s'élever naturellement, et sans calcul, de ce cas particulier au cas général, et pour prouver qu'ainsi que nous l'avions avancé, la solution de Lucas de Burgo et de Cardan comprenait virtuellement les formules d'Euler. Mais la solution géométrique peut s'appliquer directement à l'équation $Cx^2 + y^2 = A$.

Pour cela, x' et y' étant les deux racines données, on construira le triangle rectangle COD, en prenant $CO = x'\sqrt{C}$, et $DO = y'$; de manière qu'on aura

$$\overline{CO}^2 + \overline{OD}^2 = A.$$

Soit un second triangle rectangle CFD, on aura

$$\overline{CF}^2 + \overline{DF}^2 = \overline{DC}^2 = A.$$

Donc, si l'on prend

$$x = \frac{CF}{\sqrt{C}} \quad \text{et} \quad y = DF,$$

on aura

$$Cx^2 + y^2 = A;$$

de sorte que x et y seront deux racines cherchées, pourvu toutefois que x soit rationnelle, ce qui exige que CF soit de la forme $a\sqrt{C}$.

Or on a dans le triangle CAD

$$\frac{CF}{DO} = \frac{CA}{DA};$$

donc CF aura la forme $a\sqrt{C}$, si CA est égal à $n\sqrt{C}$, et DA un nombre.

Or

$$CA = CO + OA = x'\sqrt{C} + OA.$$

Il faut donc que OA soit de la forme $a\sqrt{C}$: c'est-à-dire qu'il faut construire sur le côté DO un triangle rectangle dont le second côté OA soit $a\sqrt{C}$, et dont l'hypoténuse soit rationnelle. Ce qu'on fait par la formule

$$4m^2n^2 + (m^2 - n^2)^2 = (m^2 + n^2)^2,$$

ou

$$\frac{4m^2n^2.\overline{OD}^2}{(m^2 - n^2)^2} + \overline{OD}^2 = \frac{(m^2 + n^2)^2}{(m^2 - n^2)^2}.\overline{OD}^2.$$

où l'on fait $n^2 = C$, ce qui donne

$$\frac{4Cm^2.\overline{OD}^2}{(m^2 - C)^2} + \overline{OD}^2 = \frac{(m^2 + C)^2}{(m^2 - C)^2}\overline{OD}^2.$$

Ainsi l'on prendra

$$OA = \frac{2m.OD}{m^2 - C}\sqrt{C}, \quad \text{et} \quad DA = \frac{m^2 + C}{m^2 - C}.OD.$$

De sorte que OA et DA, ont les valeurs voulues.

D'après cela, CF aura une expression de la forme N $\sqrt{C}$, et DF sera rationnel, parce que son expression connue dans la géométrie élémentaire, ne contient que les carrés des deux côtés CD, CA.

Ainsi $\frac{CF}{\sqrt{C}}$ et CD seront rationnelles, or ce sont les racines de l'équation $Cx^2 + y^2 = A$: cette équation est donc résolue géométriquement.

Cherchant les expressions des lignes CF et DF, comme nous l'avons déjà fait, on obtiendra les formules d'Euler.

Remarquons que cette solution consiste uniquement à construire le triangle AOD, dont le côté OA soit de la forme $\alpha\sqrt{C}$, et dont l'hypoténuse DA soit rationnelle, égale à $\mathcal{C}$. Cela répond en analyse, à résoudre l'équation

$$C\alpha^2 + \overline{OD}^2 = \mathcal{C}^2,$$

ou

$$\frac{C\alpha^2}{\overline{OD}^2} + 1 = \frac{\mathcal{C}^2}{\overline{OD}^2},$$

ou

$$Cx^2 + 1 = y^2.$$

Les considérations géométriques montrent donc bien comment cette équation auxiliaire s'introduit dans la question, et y joue le rôle important que Brahmegupta et Euler lui ont reconnu.

MÉMOIRE

Sur la classification des transcendantes et sur l'impossibilité d'exprimer les racines de certaines équations en fonction finie explicite des coefficients;

PAR J. LIOUVILLE.

(Lu à l'Académie des Sciences de Paris, le 8 juin 1835.)

INTRODUCTION.

Les six opérations fondamentales de l'arithmétique, savoir, l'addition, la soustraction, la multiplication, la division, l'élévation aux puissances entières et positives, l'extraction des racines, lorsqu'on les applique à de simples lettres, représentant des nombres tout-à-fait indéterminés, donnent naissance aux fonctions algébriques les plus élémentaires; mais elles sont loin de comprendre toutes les quantités renfermées sous cette dernière dénomination. En effet le mot *fonction algébrique*, dans le sens que les géomètres lui attribuent aujourd'hui, s'applique à toute quantité déterminée par une équation d'un degré quelconque, dont les coefficients sont rationnels par rapport à la variable indépendante. L'équation à laquelle satisfait une fonction de cette espèce prend à son tour le nom d'équation algébrique. Or on sait que les équations algébriques se partagent en deux grandes classes. Quelques-unes, telles que les équations des quatre premiers degrés, sont résolubles par radicaux, ou, autrement dit, la fonction dont elles déterminent la valeur, peut être écrite en employant un nombre limité de fois les signes $+$, $-$, etc., adoptés par les géomètres comme indiquant les six opérations arithmétiques dont j'ai parlé

plus haut. Mais dès qu'on s'élève à l'équation complète du cinquième degré, et *à fortiori* aux équations complètes de degré supérieur, il arrive que leur résolution générale est impossible à moins qu'on ne veuille recourir aux séries et aux intégrales définies; d'où il faut conclure que les fonctions algébriques sont de deux sortes, les unes exprimables et les autres non exprimables par des combinaisons de radicaux. Le problème si fameux de la résolution des équations algébriques consiste à distinguer ces deux genres de fonctions dans chaque cas particulier : on est loin de l'avoir résolu, et ce n'est même que par des démonstrations très délicates et très compliquées, que l'on est parvenu à établir l'impossibilité des racines de l'équation du cinquième degré en quantités purement radicales.

Si nous considérons actuellement, outre les fonctions algébriques, les exponentielles et les logarithmes, ce qui comprend, comme cas particuliers, d'une part les arcs de cercle et leurs sinus, d'autre part les puissances à base variable, dont l'exposant est irrationnel, imaginaire ou variable, en combinant à notre gré les signes relatifs à ces opérations algébriques ou transcendantes, nous obtiendrons toutes les fonctions finies explicites, fonctions dont le caractère propre consiste d'après cela, en ce qu'on peut en écrire la valeur à l'aide d'un nombre limité d'opérations algébriques, exponentielles et logarithmiques.

Une fonction finie implicite, sera au contraire une fonction déterminée par une ou plusieurs équations finies, non résolubles explicitement.

Mais ici l'on voit naître une question semblable à celle qui s'est présentée tout-à-l'heure, quand nous parlions des fonctions algébriques. En effet, on a cru d'abord que toutes les équations algébriques se résoudraient à l'aide de radicaux; et, d'après cette idée, on a cherché long-temps à en obtenir les racines sous la forme indiquée. Les efforts réitérés des plus grands géomètres n'ayant conduit à aucun résultat général, on a été porté ensuite à soupçonner que le problème proposé était impossible, au moins pour l'équation complète du cinquième degré et des degrés supérieurs, et on est parvenu à établir en toute rigueur cette impossibilité : semblablement, quand il s'agit d'équations transcendantes, il est naturel de chercher d'abord à les résoudre, en exprimant les inconnues par des fonctions finies

explicites des coefficients, et comme on ne peut pas y réussir dans la plupart des cas, il faut en second lieu prouver que les valeurs des inconnues ne sont pas exprimables par cette sorte de fonctions. Dès-lors on aura épuisé complétement la question dans le sens où elle était proposée; car tout ce que peut faire une méthode, c'est de conduire à la solution, quand cette solution est possible, ou d'en prouver sans équivoque l'impossibilité.

Dans le mémoire que j'ai l'honneur de soumettre au jugement de l'Académie, je suis bien loin d'avoir envisagé la chose sous un point de vue aussi étendu. Je me suis contenté de traiter certaines équations particulières, et par un procédé direct et uniforme, qu'il serait facile de présenter d'une manière abstraite et générale, je suis parvenu soit à les résoudre, soit à démontrer l'impossibilité de leurs racines en fonction finie explicite des coefficients.

J'ai considéré, par exemple, l'équation qu'on obtient en égalant le logarithme de l'inconnue au produit de cette inconnue par un paramètre indéterminé : la racine de l'équation ainsi formée n'est point exprimable explicitement sous forme finie, en fonction de ce paramètre indéterminé : on ne peut l'obtenir qu'en série ou en intégrale définie. La même chose arrive dans la plupart des cas, et spécialement pour l'équation de laquelle dépend en Astronomie le problème de Képler ou le calcul de l'anomalie excentrique en fonction de l'anomalie moyenne : l'anomalie excentrique n'est donc point exprimable par une fonction finie explicite de l'anomalie moyenne. Cela s'accorde avec le théorème énoncé par Lambert dans les Mémoires de Berlin (année 1767); mais il était plus facile d'énoncer ce théorème que de le démontrer.

Dans certains exemples choisis, que je traite en détail, l'équation transcendante proposée est résoluble, et ma méthode en fait trouver la racine. Le principe de cette méthode paraît avoir la généralité désirable: toutefois pour qu'on pût donner une théorie complète de la résolution des équations transcendantes en quantités finies explicites, il faudrait que l'on eût étudié avec plus de soin qu'on ne l'a fait jusqu'ici, la théorie des équations différentielles ordinaires. Il faudrait surtout, qu'étant donnée une équation différentielle d'un ordre quelconque, on pût décider par une règle certaine, si elle a ou n'a pas

une intégrale algébrique, et quelle est la valeur exacte de cette intégrale, lorsqu'on en a démontré l'existence.

L'analyse établit un rapport singulier entre la détermination, sous forme finie explicite, des racines des équations transcendantes, et la détermination, sous cette même forme, des intégrales indéfinies des fonctions d'une seule variable. Non-seulement, comme je viens de l'expliquer, la difficulté principale de la théorie consiste dans l'un et l'autre cas à déterminer les solutions algébriques de certaines équations différentielles; mais l'analogie entre ces deux classes de questions se soutient, pour ainsi dire, jusque dans les derniers détails, tellement que la méthode dont je me sers dans cet écrit peut être regardée comme une simple extension ou mieux comme une application nouvelle de la méthode dont j'ai fait usage dans le vingt-troisième cahier du Journal de l'École Polytechnique, pour découvrir la forme dont l'intégrale d'une fonction algébrique donnée est susceptible, lorsqu'on peut en obtenir la valeur en quantités finies explicites.

Dans le Journal de l'École Polytechnique, comme dans le présent mémoire, et dans plusieurs autres relatifs, soit à l'intégration d'une classe de fonctions transcendantes, soit à l'impossibilité des fonctions elliptiques sous forme finie, soit à l'intégration, sous forme finie, des équations différentielles linéaires, on fait un continuel usage de la classification des transcendantes, dont je crois avoir le premier montré l'utilité. D'après cette classification, une fonction transcendante de première espèce, est celle où les signes relatifs aux opérations transcendantes, portent sur de simples fonctions algébriques, tandis que dans une transcendante de $n^{ième}$ espèce les signes dont il s'agit peuvent porter sur toutes les quantités d'espèce inférieure. Cette classification paraît d'abord bien peu de chose, et néanmoins je ne vois pas qu'il soit possible de s'en passer dans les recherches relatives à l'intégration des formules différentielles et à la résolution des équations sous forme finie explicite. En rédigeant donc ce nouvel écrit, j'ai dû profiter de l'occasion pour exposer dans le plus grand détail les principes sur lesquels cette classification est fondée, car jusqu'ici je m'étais pour ainsi dire contenté de l'indiquer, vu qu'il n'était pas

nécessaire de l'approfondir davantage dans les questions dont je m'occupais alors.

Voici l'énoncé succinct des problèmes qu'il a fallu résoudre pour éclaircir entièrement les idées à ce sujet.

D'abord je passe en revue les diverses fonctions simples dont la combinaison dans un ordre quelconque produit toutes les quantités finies explicites. Ces fonctions simples sont de trois sortes, algébriques, logarithmiques, exponentielles : le logarithme d'une variable x, savoir $\log x$, et l'exponentielle la plus simple e^x ne peuvent en aucune manière s'écrire en indiquant sur la variable x un nombre limité d'opérations algébriques. Ce théorème était connu depuis long-temps; mais on avait coutume de le démontrer en s'appuyant sur la nature du développement des fonctions algébriques en série. Après l'avoir établi d'une manière entièrement rigoureuse, je passe à des propositions plus générales : je fais voir, par exemple, que la fonction $\log x$ ne peut être écrite, sous forme finie explicite, par aucune combinaison quelle qu'elle soit des signes exponentiels et des signes algébriques, et de même la fonction e^x n'est équivalente à aucune fonction purement algébrique et logarithmique. Il résulte de là que les fonctions exponentielles et les fonctions logarithmiques sont essentiellement différentes entre elles, en sorte que les signes dont nous faisons usage dans notre classification des transcendantes sont réellement réduits au moindre nombre possible.

Nous avons dit tout-à-l'heure qu'une fonction transcendante de seconde espèce était celle où les signes exponentiels et logarithmiques se trouvaient appliqués sur des transcendantes de première espèce; mais comme, dans certains cas, cette complication de la fonction n'est qu'apparente, puisque le logarithme d'une exponentielle qui semble, par exemple, appartenir, d'après cette définition, à la seconde espèce, n'est en réalité qu'une simple fonction algébrique, il est visible qu'avant de classer la fonction dont on s'occupe, il faut d'abord en supposer l'expression simplifiée autant que possible. Aussi dans un des paragraphes de notre mémoire, traitons-nous cette question : *Étant donnée une fonction finie explicite de x, comment pourra-t-on reconnaître d'une manière certaine, à quelle espèce cette fonction appartient ?*

La méthode dont nous proposons de faire usage pour résoudre le problème dont on vient d'écrire l'énoncé nous prouve en outre qu'il existe (quelque grand que soit le nombre n) des transcendantes de $n^{ième}$ espèce, irréductibles à une espèce inférieure; en effet, si l'on considère les quantités successives $\log \log x$, $\log \log \log x$, etc., on les trouve de seconde, de troisième espèce, etc., sans que jamais elles puissent s'abaisser.

L'existence des fonctions finies, véritablement *implicites*, se prouve d'une manière semblable, en faisant voir que certaines équations finies ne se résolvent pas explicitement, et c'est ainsi que je me trouve ramené au problème de la résolution des équations dont j'ai parlé plus haut.

Enfin, je m'occupe des fonctions diverses que l'on rencontre dans les éléments : toutes ces fonctions peuvent être écrites sous forme finie explicite : par conséquent ma classification leur est immédiatement applicable. J'ai surtout étudié avec soin la quantité formée en élevant une base variable à une puissance irrationnelle, et j'ai fait voir que cette quantité doit être rangée parmi les transcendantes de seconde espèce, tandis qu'elle se réduirait à une simple expression algébrique, si l'exposant était rationnel.

Les propositions contenues dans mon Mémoire ont beaucoup d'analogie avec celles dont on s'occupe dans la théorie des nombres; mais tandis que, dans cette dernière théorie, on considère spécialement les valeurs numériques des fonctions, nous nous attachons au contraire à leur forme analytique par rapport à certaines variables x, y, etc., sans faire en général aucune attention à la nature des coefficients constants que ces fonctions renferment. La considération des valeurs successives que nos fonctions peuvent prendre, lorsqu'on fait croître x, y, etc., d'une manière continue, nous est d'une grande utilité dans nos calculs et multiplie beaucoup les moyens de transformation. Néanmoins les géomètres, qui voudront se livrer à des recherches semblables aux nôtres, verront que la matière est encore très délicate, et qu'il faut partout un soin extrême pour donner aux raisonnements cette rigueur absolue, indispensable dans un pareil sujet.

§ I^er.

Des fonctions algébriques, logarithmiques et exponentielles.

1. Dans les recherches de calcul intégral, lorsqu'il s'agit d'obtenir des solutions exprimées sous forme finie, on a souvent besoin de la classification des transcendantes, dont j'ai d'abord montré l'usage au paragraphe I^er de mon Mémoire sur les fonctions elliptiques (*). Aujourd'hui je me propose de considérer cette classification en elle-même, indépendamment des applications dont elle est susceptible. Je serai ainsi conduit à traiter plusieurs questions incidentes qui se présentent naturellement et dont il était bon de donner une solution exacte. L'analyse employée dans mon travail est très simple et surtout très uniforme. Je me suis attaché à donner aux raisonnements cette rigueur absolue sans laquelle les théorèmes du genre de ceux que je démontre ici deviennent insignifiants; et peut-être sous ce rapport, ai-je droit d'espérer un moment d'attention de la part des géomètres.

Avant d'entrer en matière, je poserai quelques définitions assez généralement connues, mais qu'il sera utile de rappeler pour bannir toute équivoque.

Un polynome $A+Bx+Cx^2+\ldots+Hx^\mu$, dans lequel μ désigne un nombre entier positif, et où les coefficients A, B, C,...H, sont des quantités constantes, est ce qu'on nomme une fonction entière de x du degré μ.

On sait qu'un pareil polynome peut toujours se décomposer en facteurs simples, sous la forme

$$H(x-a)^m(x-b)^n\ldots(x-c)^p,$$

m, n,...p, désignant des nombres entiers positifs, et a, b,...c, les racines inégales de l'équation

$$A+Bx+Cx^2+\ldots+Hx^\mu=0.$$

(*) *Journal de l'École Polytechnique*, Cahier XXIII, page 42.

Une fonction est rationnelle, quand on l'obtient en divisant l'un par l'autre deux polynomes entiers U, V.

Toute fonction rationnelle $\frac{U}{V}$ ou X pourra donc se mettre sous la forme

$$X = M(x-a)^{\alpha}(x-b)^{\beta}\ldots(x-c)^{\gamma},$$

M désignant une constante; α, β, ... γ, des nombres entiers positifs ou négatifs, et a, b, ... c, les racines inégales des équations $U = 0$, $V = 0$.

Si, dans un même calcul, on doit employer à la fois deux fonctions rationnelles $X = \frac{U}{V}$, $Y = \frac{W}{T}$, on nommera a, b, ... c, les diverses racines inégales des quatre équations $U=0$, $V=0$, $W=0$, $T=0$, et l'on écrira

$$X = M(x-a)^{\alpha}(x-b)^{\beta}\ldots(x-c)^{\gamma},$$
$$Y = N(x-a)^{\alpha'}(x-b)^{\beta'}\ldots(x-c)^{\gamma'},$$

M et N étant des constantes. Mais alors α, β, ... γ, α', β', ... γ', seront regardés comme représentant des nombres entiers positifs, négatifs ou nuls : on aura par exemple $\alpha = 0$, si le facteur $x - a$ ne doit se trouver ni au numérateur, ni au dénominateur de X.

Je nomme fonction algébrique de x toute fonction u qui peut être regardée comme la racine d'une équation de la forme

$$Pu^n + Qu^{n-1} + \ldots + Ru + S = 0,$$

n étant un nombre entier positif, et les lettres P, Q, ...R, S, représentant des fonctions entières de x. Il importe peu que l'équation soit ou non résoluble par radicaux. Si donc on dénote par $\varpi(x)$ la racine de cette équation, la quantité $u = \varpi(x)$ représentera une fonction algébrique quelconque, et au moyen de ce signe $\varpi(x)$ toutes les fonctions algébriques pourront être regardées comme explicites.

Ces définitions s'étendent d'elles-mêmes aux fonctions de plusieurs variables. En les rapprochant des théories exposées dans les livres élémentaires, on voit que l'on doit regarder comme algébriques toutes les fonctions où la variable x est engagée avec des constantes

seulement par addition, soustraction, multiplication, division, élévation aux puissances entières et positives, extraction de racines, c'est-à-dire toutes les fonctions que l'on écrit sous forme finie, à l'aide des simples signes des six opérations fondamentales que je viens d'indiquer; mais la réciproque n'est pas vraie, par la raison qu'en se bornant à ces mêmes signes, les racines de la plupart des équations de la forme

$$Pu^{\mu} + Qu^{\mu-1} + \ldots + Ru + S = 0,$$

seraient impossibles en quantités finies : en effet, si les équations des quatre premiers degrés sont résolubles par radicaux, l'équation générale du cinquième degré, n'est pas résoluble de cette manière.

De là deux classes de fonctions algébriques, les unes exprimables, et les autres non exprimables par des radicaux; mais, dans les recherches de calcul intégral, ces deux classes de fonctions jouissent à peu près des mêmes propriétés, et il y a rarement de l'avantage à les distinguer dans le discours, et à les représenter par des notations différentes.

2. Non-seulement les fonctions algébriques se partagent en deux grandes classes; mais chacune de ces classes peut encore se subdiviser en espèces distinctes. En considérant les fonctions exprimables par radicaux, j'ai proposé (*) de les nommer *irrationnelles de première espèce* lorsque les radicaux dont elles se composent portent sur des fonctions rationnelles, *irrationnelles de seconde espèce* quand ces mêmes radicaux portent sur des quantités rationnelles ou sur des irrationnelles de première espèce, et ainsi de suite. Par exemple, les trois fonctions irrationnelles que voici $\sqrt{x}$, $x + \sqrt{1 + \sqrt{x}}$, $\sqrt[3]{x + \sqrt{1 + \sqrt{x}}}$, appartiennent respectivement à la première, à la seconde et à la troisième espèce. Il est aisé de comprendre que la forme la plus générale d'une irrationnelle de première espèce se compose d'une partie rationnelle et d'un nombre quelconque de radicaux ajoutés entre eux et portant sur diverses quantités ration-

(*) *Journal de l'École Polytechnique*, XXII[e] cahier, page 128.

nelles : si donc P_1 désigne une fonction quelconque *irrationnelle* de première espèce, la valeur de P_1 sera de la forme

$$P_1 = P + \sqrt[m]{Q} + \sqrt[n]{R} + \ldots + \sqrt[q]{S},$$

$P, Q, R, \ldots S$ désignant des expressions rationnelles. Et l'on peut déterminer semblablement la forme la plus générale de chaque espèce d'irrationnelles. Mais cette distinction des fonctions algébriques en classes et en espèces que j'ai cru devoir indiquer en deux mots comme étant quelquefois utile, n'est point indispensable pour notre théorie. Ce qu'il est essentiel de ne pas oublier, c'est que le mot *fonction algébrique* s'applique à toutes les fonctions u déterminées par une équation de la forme

$$Pu^n + Qu^{n-1} + \ldots + Ru + S = 0,$$

$P, Q, \ldots R, S$ désignant des polynomes entiers en x. Dire qu'une fonction algébrique u est donnée c'est dire que l'on possède l'équation à coefficients entiers qui la détermine ou du moins une expression irrationnelle qui permette de remonter à cette équation par la méthode développée dans les traités d'Algèbre.

3. On dit que l'équation algébrique

$$Pu^n + Qu^{n-1} + \ldots + Ru + S = 0$$

est *irréductible* lorsque nulle de ses racines ne peut satisfaire à une équation moins élevée dont les coefficients soient également des fonctions entières. La condition nécessaire et suffisante pour qu'une équation soit irréductible, c'est que son premier membre ne se décompose pas en facteurs rationnels par rapport à x et y.

Posons

$$Pu^n + Qu^{n-1} + \ldots + Ru + S = U$$

et soient $u_1, u_2, u_3 \ldots u_n$ les racines de l'équation $U = 0$: ces racines jouiront des propriétés fondamentales suivantes.

On ne pourra avoir ni $u_1 = 0$, ni $u_1 = u_2$; car si deux racines de l'équation étaient égales entre elles, son premier membre se décomposerait en deux facteurs rationnels par la méthode connue; et il en

serait de même si l'une des racines était nulle, puisque cette dernière circonstance exige qu'on ait $S=0$, ce qui rend le polynome Pu^n+etc. divisible par u.

Si l'une des racines, savoir u_1, satisfait à une seconde équation algébrique $V=0$, irréductible ou non, de même forme que la proposée, toutes les autres racines $u_2, u_3, \ldots u_n$ satisferont aussi à cette seconde équation. En effet, pour que les deux équations $U=0$, $V=0$ aient une racine commune, il faut que les deux polynomes U, V possèdent un commun diviseur. Or si ce commun diviseur n'était pas égal à U, à un coefficient près indépendant de l'inconnue u, la fonction u se décomposerait en deux facteurs rationnels, ce qui est absurde. Donc V est divisible par U, ou du moins peut se mettre sous la forme

$$V = \frac{UW}{K},$$

K dépendant de x seule, tandis que W est une fonction entière de x et u ou de x seule : par conséquent les valeurs $u=u_1$, $u=u_2$, $u=u_3, \ldots u=u_n$ qui donnent $U=0$ donnent aussi $V=0$. Toutes ces propriétés des équations irréductibles subsisteront évidemment si u devient une fonction de plusieurs variables x, y, z, etc., pourvu que les coefficients $P, Q, \ldots R, S$ ne cessent pas d'être exprimés par des fonctions entières de ces variables indépendantes.

4. Après les fonctions algébriques viennent les fonctions logarithmiques dont la plus simple $\log x$ est ce qu'on nomme le *logarithme népérien* de x. La propriété principale de la fonction $\log x$, pour les recherches de calcul intégral, est renfermée dans l'équation.... $d\log x = \frac{dx}{x}$, d'où l'on déduit, abstraction faite de la constante arbitraire, $\log x = \int \frac{dx}{x}$. On pourrait même partir de cette dernière égalité comme d'une définition et dire qu'on nomme $\log x$ la fonction de x qu'on obtient en intégrant $\frac{dx}{x}$ et assujétissant l'intégrale à s'évanouir pour $x=1$, de telle sorte qu'on a, dans la notation de Fourier, $\log x = \int_1^x \frac{dx}{x}$. Quant aux logarithmes dont la base n'est pas le nombre $e=2,718,\ldots$, ils se déduisent des logarithmes népé-

riens en multipliant ceux-ci par un nombre constant convenable. Ils ne forment donc point une classe nouvelle de fonctions par rapport à la variable x.

En désignant par X, Y deux polynomes entiers premiers entre eux et de la forme

$$a + bx + cx^2 + \ldots + hx^m,$$

le quotient $\frac{X}{Y}$ représentera une fonction algébrique rationnelle quelconque de x. Cela posé, je dis qu'on ne peut pas avoir

$$\log x = \frac{X}{Y}.$$

En effet, si l'on différentie cette équation, puis qu'on chasse le dénominateur Y^2, on obtient

$$\frac{Y^2}{x} = YX' - XY',$$

X', Y' représentant les dérivées $\frac{dX}{dx}$, $\frac{dY}{dx}$ conformément à la notation de Lagrange dont nous ferons un continuel usage. Il résulte de là que Y doit être divisible par x un certain nombre n de fois et que par conséquent X ne doit pas l'être, puisque X et Y sont premiers entre eux. Faisons donc $Y = Zx^n$, Z étant un nouveau polynome non divisible par x : nous en conclurons

$$Y' = nZx^{n-1} + Z'x^n.$$

Je substitue cette valeur et celle de Y dans l'équation précédente qui devient :

$$Z^2x^{2n-1} = ZX'x^n - nZXx^{n-1} - XZ'x^n,$$

et qu'on peut ensuite écrire ainsi

$$nXZ = x(ZX' - XZ') - Z^2x^n,$$

forme sous laquelle l'absurdité de cette équation devient manifeste; car le second membre est divisible par x et le premier ne l'est pas, puisque les facteurs qui le composent sont tous les deux non divisibles par x.

On peut aller plus loin et démontrer que l'intégrale $\int \frac{dx}{x}$ ou $\log x$ n'est point exprimable algébriquement en x, de telle sorte qu'il n'existe aucune fonction algébrique de la lettre x qui soit équivalente à $\log x$. En effet, s'il existe une telle fonction, désignons-la par y: nous aurons $\int \frac{dx}{x} = y$, et y devra satisfaire à une certaine équation algébrique

$$(1) \qquad f(x, y) = 0,$$

$f(x, y)$ désignant une quantité de la forme

$$Py^n + Qy^{n-1} + \ldots + Ry + S$$

dans laquelle les coefficients P, Q,...R, S dépendent de x seule et représentent des polynomes entiers. Il est permis de supposer l'équation (1) irréductible : en effet, si y pouvait satisfaire à une autre équation semblable et de degré $< n$, c'est celle-là que nous devrions employer au lieu de l'équation (1).

Puisqu'on a $\int \frac{dx}{x} = y$, on a aussi

$$\frac{dx}{x} = dy.$$

En différentiant l'équation (1) et remplaçant $\frac{dy}{dx}$ par $\frac{1}{x}$, il vient

$$(2) \qquad xf'_x(x, y) + f'_y(x, y) = 0.$$

Pour que l'équation $\frac{dx}{x} = dy$ soit exacte, il faut et il suffit que les équations (1) et (2) aient lieu en même temps quel que soit x. Mais l'équation (1) étant irréductible, on sait que si l'une de ses racines satisfait à l'équation (2) les autres y satisferont aussi. Désignant donc par $y_1, y_2, \ldots y_n$ les n racines de l'équation $f(x, y) = 0$ résolue par rapport à y, nous voyons que si la différentielle de l'une de ces racines est égale à $\frac{dx}{x}$, les différentielles de toutes les autres seront de même égales à $\frac{dx}{x}$. Il résulte de là que si la quantité $\int \frac{dx}{x}$ est algébrique,

on aura à la fois

$$\frac{dx}{x} = dy_1, \quad \frac{dx}{x} = dy_2, \ldots \quad \frac{dx}{x} = dy_n,$$

d'où l'on tire

$$\frac{ndx}{x} = dy_1 + dy_2 + \ldots + dy_n;$$

et par conséquent, abstraction faite de la constante arbitraire, il viendra

$$\int \frac{dx}{x} = \frac{y_1 + y_2 + \ldots + y_n}{n} = -\frac{Q}{nP},$$

c'est-à-dire que $\int \frac{dx}{x}$ sera une fonction rationnelle de x, ce dont j'ai déjà prouvé l'impossibilité.

La quantité $\log x$ n'est donc point une fonction algébrique de x; et il en est de même de la quantité $\log F(x)$, quelle que soit la fonction algébrique $F(x)$. En effet si l'on avait $\log F(x) = f(x)$, $f(x)$ étant une autre fonction algébrique, en posant $F(x) = z$, ce qui donne pour x une valeur algébrique en z telle que $x = \varpi(z)$, on en déduirait $\log z = f[\varpi(z)]$, c'est-à-dire $\log z =$ *une fonction algébrique de* z, ce qui est absurde.

5. La fonction inverse de $\log x$ donne l'exponentielle e^x, dont la définition par conséquent est comprise dans l'égalité $\log(e^x) = x$. Il est aisé de démontrer que e^x n'est point exprimable algébriquement en x, car si l'on avait $e^x = F(x)$, $F(x)$ désignant une fonction algébrique, on en conclurait $\log F(x) = x$, équation impossible d'après ce qu'on a démontré à la fin du numéro précédent. En général si p et q désignent deux fonctions algébriques, on n'aura jamais $e^p = q$; car il en résulterait $\log q = p$, ce qui est inadmissible.

Soient maintenant $P, Q, R, \ldots T$, des fonctions algébriques de la variable indépendante x qui ne soient pas identiquement nulles et $p, q, r, \ldots$ d'autres fonctions de x algébriques aussi et telles que nulle des quantités $p, q, r, \ldots p-q, p-r, q-r, \ldots$ ne se réduise à une simple constante; je dis qu'on prouvera l'impossibilité de toutes les équations suivantes

$$Pe^p = T,$$
$$Pe^p + Qe^q = T,$$
$$Pe^p + Qe^q + Re^r = T, \text{ etc.},$$

quel que soit le nombre des termes placés dans leur premier membre.

D'abord l'équation $Pe^p = T$ est impossible, puisqu'elle conduit au résultat absurde $\log \frac{T}{P} = p$.

Supposons en second lieu qu'on ait

$$Pe^p + Qe^q = T,$$

sans que les quantités P, Q, T, soient nulles. En différentiant, il vient

$$e^p\left(P\frac{dp}{dx} + \frac{dP}{dx}\right) + e^q\left(Q\frac{dq}{dx} + \frac{dQ}{dx}\right) = \frac{dT}{dx}.$$

Entre cette équation et la précédente, j'élimine e^p : je trouve ainsi

$$\begin{aligned} e^q\left[P\left(Q\frac{dq}{dx} + \frac{dQ}{dx}\right) - Q\left(P\frac{dp}{dx} + \frac{dP}{dx}\right)\right] \\ = P\frac{dT}{dx} - T\left(P\frac{dp}{dx} + \frac{dP}{dx}\right), \end{aligned}$$

résultat impossible puisqu'il rentre dans la forme $Pe^p = T$, examinée ci-dessus. Toutefois ce raisonnement se trouverait en défaut, si l'on avait à la fois

$$P\frac{dT}{dx} - T\left(P\frac{dp}{dx} + \frac{dP}{dx}\right) = 0,$$

et

$$P\left(Q\frac{dq}{dx} + \frac{dQ}{dx}\right) - Q\left(P\frac{dp}{dx} + \frac{dP}{dx}\right) = 0.$$

Mais si l'on avait

$$P\frac{dT}{dx} - T\left(P\frac{dp}{dx} + \frac{dP}{dx}\right) = 0,$$

on tirerait aisément de là

$$\frac{dp}{dp} + \frac{dP}{P} = \frac{dT}{T},$$

puis, en intégrant et désignant par C une constante arbitraire, on en conclurait

$$Pe^p = CT;$$

ce qui est absurde. De même, si l'on avait

$$P\left(Q\frac{dq}{dx}+\frac{dQ}{dx}\right)-Q\left(P\frac{dp}{dx}+\frac{dP}{dx}\right)=0,$$

on en déduirait

$$e^{p-q}=\frac{CQ}{P},$$

ce qui est absurde aussi, puisque p et q sont deux fonctions algébriques de x dont la différence ne se réduit pas à une simple constante. Donc, quoi qu'on fasse, on est conduit à une absurdité, dès que l'on part de l'équation

$$Pe^p+Qe^q=T:$$

donc une telle équation ne peut pas exister. Et, d'une manière semblable, on prouvera l'impossibilité de l'équation

$$Pe^p+Qe^q+Re^r+\text{etc.}=T,$$

quel que soit le nombre des quantités p, q, r, etc. Le théorème démontré au numéro II de mon mémoire sur l'intégration d'une classe de fonctions transcendantes (*) est compris comme cas particulier dans le théorème que je viens d'établir.

§ II.

Division des fonctions transcendantes en espèces.

6. Leibnitz et les Bernouilli, qui paraissent avoir donné les premiers au mot *fonction* l'acception étendue que nous lui attribuons aujourd'hui, ont distingué les fonctions *algébriques* et les fonctions *transcendantes*.

Le nombre de ces dernières est infini; mais dans les éléments on se contente de considérer les exponentielles et les logarithmes, que l'on doit regarder comme renfermant d'une part les puissances à

(*) Journal de M. Crelle, tome XIII, p. 93.

exposant irrationnel, imaginaire ou variable, et d'autre part toutes les fonctions circulaires, tant directes qu'inverses, ainsi qu'on peut aisément s'en convaincre.

Les caractéristiques particulières aux quantités algébriques, logarithmiques et exponentielles, sont les trois suivantes $\varpi(x)$, e^x, $\log x$. Au moyen de ce signe $\varpi(x)$, toutes les fonctions algébriques sont explicites : il n'en est pas de même des fonctions logarithmiques ou exponentielles.

L'emploi des signes $\varpi(x)$, e^x, $\log x$ donne naissance aux fonctions finies qui peuvent, suivant les cas, être explicites ou implicites.

Une fonction finie de x est *explicite, lorsqu'on peut en écrire l'expression en indiquant explicitement sur la variable x un nombre limité d'opérations algébriques, exponentielles et logarithmiques.* La valeur d'une telle fonction dépend donc uniquement des signes $\varpi(x)$, e^x, $\log x$.

Une fonction finie est implicite, lorsqu'elle dépend d'équations finies, non résolubles explicitement. Par exemple, la racine y de l'équation $\log y = xy$ est une fonction finie implicite de x.

Quand on emploie le mot *fonction finie*, sans y ajouter d'épithète, c'est en général d'une fonction finie explicite que l'on entend parler.

7. Les fonctions finies explicites peuvent être classées en espèces par une méthode semblable à celle dont j'ai fait usage au n° 2, pour distinguer les divers ordres d'irrationnalité des quantités algébriques exprimables par radicaux.

En effet, une fonction finie est algébrique ou transcendante.

Elle est transcendante de première espèce, quand les signes relatifs aux opérations transcendantes, dont elle dépend, portent sur de simples fonctions algébriques; par exemple la quantité

$$\frac{e^x + \sqrt{\log x}}{1 + \log x},$$

est une fonction transcendante de première espèce. D'après cette définition, on conçoit que toute fonction finie de x, appartenant à la première espèce, ne pourra être qu'une fonction algébrique de x, d'un certain nombre de logarithmes, de la forme $\log u$, et d'un certain nombre d'exponentielles de la forme e^u, u étant algébrique.

Une fonction finie transcendante est de deuxième espèce, quand les signes relatifs aux opérations transcendantes ne portent pas seulement sur des fonctions algébriques, mais encore sur des fonctions transcendantes de première espèce, comme dans cet exemple $\log(1 + \log x)$.

Une fonction finie est transcendante de troisième espèce, quand les signes relatifs aux opérations transcendantes portent sur des fonctions de seconde espèce, et ainsi de suite.

Je nomme transcendantes *monomes* les transcendantes formées d'un seul terme, comme e^u, $\log u$, quelle que soit d'ailleurs la fonction u. Par conséquent e^{x^2}, $\log(1 + e^x + \log x)$ sont des transcendantes monomes; ces quantités e^u, $\log u$ peuvent d'ailleurs appartenir à une espèce ou à une autre, suivant la nature de u. Elles sont en général de $n^{\text{ième}}$ espèce, lorsque la fonction u est de $(n - 1)^{\text{ième}}$ espèce. En supposant que u désigne une fonction quelconque de $(n - 1)^{\text{ième}}$ espèce, je dirai aussi parfois que e^u est une exponentielle, et $\log u$ un logarithme de $n^{\text{ième}}$ espèce.

D'après cela, e^{x^2} est une exponentielle de première espèce, et $\log(1 + e^x + \log x)$ est un logarithme de seconde espèce.

L'indice n qui désigne l'espèce d'une fonction finie peut diminuer par la différentiation, mais il n'augmente jamais. Par exemple la dérivée d'une fonction finie de première espèce est tout au plus de la première espèce. De plus les transcendantes monomes entrant dans la fonction primitive sont les seules qui puissent entrer dans la dérivée. Cette remarque est une conséquence évidente des règles mêmes du calcul différentiel.

8. Dans le numéro précédent, nous avons regardé les fonctions finies comme renfermant ou pouvant renfermer à la fois des exponentielles et des logarithmes; néanmoins, il est des circonstances, assez rares à la vérité, où l'on a besoin de considérer des fonctions exponentielles dépendant des seuls signes $\varpi(x)$, e^x, et des fonctions purement logarithmiques dépendant des seuls signes $\varpi(x)$, $\log x$. La division des fonctions en espèces ne sera pas moins utile ici que dans le cas général. On nommera fonction exponentielle de première espèce celle où les signes exponentiels ne porteront que sur des quantités algébriques; la fonction exponentielle de première espèce la plus

générale est donc de la forme $f(x, e^u, e^v, \ldots e^w)$, u, v, $\ldots w$, dépendant algébriquement de x, et la caractéristique f étant algébrique par rapport à x, e^u, e^v, $\ldots e^w$. La fonction exponentielle de seconde espèce sera celle où les signes exponentiels porteront sur des fonctions de première espèce. Et ainsi des autres. On distinguera de même en espèces les fonctions purement logarithmiques.

A peine a-t-on besoin d'avertir que notre classification des transcendantes s'étend aux fonctions de plusieurs variables $x, y, z \ldots$

9. Quand le nombre des transcendantes *monomes*, entrant dans une fonction finie explicite, est supposé le plus petit possible, la fonction jouit de propriétés semblables à celles des équations algébriques irréductibles.

Considérons d'abord une fonction de première espèce U, et soient θ, $\eta, \ldots \zeta$, les transcendantes monomes dont elle dépend. D'après nos définitions, la valeur de U sera de la forme

$$U = f(x, \theta, \eta, \ldots \zeta),$$

la caractéristique f dénotant une fonction algébrique par rapport aux lettres comprises entre parenthèses.

Cela posé, si le nombre μ des transcendantes *monomes*, $\theta, \eta, \ldots \zeta$, est supposé réduit à son minimum, c'est-à-dire s'il est impossible de trouver une autre fonction transcendante de première espèce équivalente à U, et contenant moins de transcendantes monomes que $f(x, \theta, \eta, \ldots \zeta)$, je dis que nulle relation algébrique ne pourra exister entre la variable indépendante x et les μ quantités $\theta, \eta, \ldots \zeta$, à moins qu'elle ne soit identique. En effet une telle relation, si elle avait lieu, fournirait la valeur de l'une de ces transcendantes, de θ par exemple, exprimée algébriquement en fonction de x et des autres, et dès-lors on pourrait en reportant dans U cette valeur de θ diminuer μ d'une unité, ce qui est impossible.

Pour rendre notre raisonnement plus précis, concevons que l'on tombe, par une suite quelconque de calculs, sur une équation de la forme

$$\varphi(x, \theta, \eta, \ldots \zeta) = 0,$$

dont le premier membre soit algébrique, par rapport à x, θ, $\eta, \ldots \zeta$.

Je dis que cette équation ne pourra contenir θ, $\eta, \ldots \zeta$ qu'en apparence, de sorte qu'elle subsisterait encore si l'on venait à remplacer θ, $\eta, \ldots \zeta$, soit par d'autres fonctions de x prises au hasard, soit par de simples lettres indéterminées. En effet si cette équation n'était pas identique relativement à θ par exemple, elle fournirait la valeur de θ sous la forme

$$\theta = \varpi(x, \eta, \ldots \zeta),$$

ϖ indiquant une fonction algébrique, et en portant cette valeur de θ dans celle de U, on en conclurait

$$U = f[x, \varpi(x, \eta, \ldots \zeta), \eta, \zeta]:$$

or cette expression de U est absurde, puisqu'elle renferme une transcendante *monome* de moins que la précédente, laquelle était pourtant supposée en contenir le plus petit nombre possible.

Cette démonstration étant générale et rigoureuse pour toutes les fonctions de première espèce, pourvu que le nombre de leurs transcendantes monomes soit un minimum, nous avons droit de dire que, *si, par la marche des calculs, on est conduit à une équation algébrique, entre la variable x et les transcendantes monomes qui composent la fonction sus-dite, on ne troublera pas l'égalité en remplaçant les transcendantes par des fonctions nouvelles prises au hasard ou par des quantités purement littérales.*

Supposons maintenant que U soit une fonction transcendante de $n^{ième}$ espèce, et que θ, $\eta, \ldots \zeta$ représentent les μ transcendantes monomes de $n^{ième}$ espèce, entrant dans cette fonction. La valeur de U, considérée comme dépendante de θ, $\eta, \ldots \zeta$, sera de la forme

$$U = f(\theta, \eta, \ldots \zeta).$$

la fonction f étant algébrique par rapport aux quantités comprises entre parenthèses et contenant en outre d'autres transcendantes d'ordre inférieur dont il est inutile de nous occuper.

Maintenant, si le nombre μ est supposé le plus petit possible, je dis que nulle relation algébrique ne pourra exister entre la variable x, les transcendantes θ, $\eta, \ldots \zeta$ et d'autres transcendantes d'ordre infé-

rieur quelles qu'elles soient. En effet, une telle relation, si elle existait, fournirait la valeur de l'une de ces transcendantes, de θ par exemple, en fonction algébrique des autres, et permettrait, en portant la valeur de θ dans celle de U, de diminuer le nombre μ d'une unité, ce qui est absurde.

Ce raisonnement est tout semblable à celui dont nous nous sommes servis pour établir le théorème relatif aux fonctions de première espèce. *Nous voyons donc en général que si* θ, $\varkappa$,...ζ *désignent les transcendantes monomes de $n^{ième}$ espèce entrant dans une fonction de $n^{ième}$ espèce, toute relation algébrique entre x,* θ, $\varkappa$,...ζ *et des transcendantes d'espèce inférieure à la $n^{ième}$ devra être identique en* θ, $\varkappa$,...ζ, *c'est-à-dire devra subsister si l'on remplace* θ, $\varkappa$,...ζ *soit par d'autres fonctions de x, soit par de simples lettres indéterminées.* Ce principe recevra par la suite de nombreuses applications.

§ III.

Démonstrations de quelques théorèmes relatifs aux fonctions $\log x$, e^x, $\log\log x$, etc.

10. Non-seulement la fonction $\log x$ ne peut être équivalente à aucune fonction algébrique de x; mais même elle ne peut être exprimée par aucune combinaison quelle qu'elle soit d'un nombre limité de signes algébriques avec un nombre limité de signes exponentiels. Et réciproquement l'exponentielle e^x ne peut être exprimée par aucune fonction purement algébrique et logarithmique. Ces théorèmes méritent d'être démontrés d'une manière rigoureuse : on en conclut que les signes $\varpi(x)$, e^x, $\log x$ dont nous faisons usage dans notre classification des fonctions finies explicites sont réduits au moindre nombre possible.

Pour rendre notre démonstration plus claire, prouvons d'abord que la quantité $\log x$ ne peut être équivalente à aucune fonction purement exponentielle de première espèce : en d'autres termes prouvons qu'en désignant par u, v,...w des fonctions algébriques et par ζ, $\varkappa$,...θ les exponentielles e^u, e^v,...e^w, on ne peut pas avoir

$$\log x = f(x, \zeta, \varkappa, \ldots \theta),$$

si la fonction représentée par f est une fonction algébrique.

Représentons par m le nombre des exponentielles $\zeta, \eta, \ldots \theta$ qui entrent dans la valeur précédente de $\log x$. Nous avons évidemment le droit de supposer ce nombre m réduit à son minimum, c'est-à-dire de supposer que $\log x$ ne puisse s'exprimer par aucune autre fonction semblable à la fonction f, mais contenant moins d'exponentielles; car si cette autre valeur de $\log x$ existait, c'est celle-là que nous choisirions pour y appliquer nos calculs. Dès-lors aucune relation algébrique entre les quantités $x, \zeta, \eta, \ldots \theta$ ne pourra avoir lieu à moins qu'elle ne soit identique par rapport à chacune des transcendantes. Or, on obtient une telle relation en différentiant la valeur de $\log x$: la différentiation donne en effet,

$$\frac{dx}{x} = df(x, \zeta, \eta, \ldots \theta),$$

ou bien (en observant que l'on a $\frac{d\zeta}{dx} = \frac{\zeta du}{dx} = \zeta u', \frac{d\eta}{dx} = \eta v', \ldots \frac{d\theta}{dx} = \theta w'$)

$$\frac{1}{x} = f'_x(x, \zeta, \eta, \ldots \theta) + f'_\zeta(x, \zeta, \eta, \ldots \theta)\zeta u' \\ + f'_\eta(x, \zeta, \eta, \ldots \theta)\eta v' + \ldots + f'_\theta(x, \zeta, \eta, \ldots \theta)\theta w'.$$

L'équation que je viens d'écrire doit donc subsister si l'on remplace $\zeta, \eta, \ldots \theta$ par $\alpha\zeta, \beta\eta, \ldots \gamma\theta$, $\alpha, \beta, \ldots \gamma$ désignant des quantités purement littérales. Il résulte de là qu'on a

$$\frac{1}{x} = f'_x(x, \alpha\zeta, \beta\eta, \ldots \gamma\theta) + f'_{\alpha\zeta}(x, \alpha\zeta, \beta\eta, \ldots \gamma\theta)\alpha\zeta u' \\ + f'_{\beta\eta}(x, \alpha\zeta, \beta\eta, \ldots \gamma\theta)\beta\eta v' + \ldots + f'_{\gamma\theta}(x, \alpha\zeta, \beta\eta, \ldots \gamma\theta)\gamma\theta w',$$

c'est-à-dire

$$\frac{dx}{x} = df(x, \alpha\zeta, \beta\eta, \ldots \gamma\theta).$$

En égalant cette valeur de $\frac{dx}{x}$ à la précédente $df(x, \zeta, \eta, \theta)$, puis intégrant, on a donc

$$f(x, \alpha\zeta, \beta\eta, \ldots \gamma\theta) = f(x, \zeta, \eta, \ldots \theta) + C.$$

Pour déterminer la constante C, je nomme a, $b, \ldots c$ les valeurs respectives de $\zeta, \eta, \ldots \theta$ pour une valeur déterminée quelconque $x = g$: il en résulte

$$f(g, \alpha a, \beta b, \ldots \gamma c) = f(g, a, b, \ldots c) + C.$$

Éliminant C, on a

$$f(x, \alpha\zeta, \beta\eta, \ldots \gamma\theta) - f(g, \alpha a, \beta b, \ldots \gamma c)$$
$$= f(x, \zeta, \eta, \ldots \theta) - f(g, a, b, \ldots c).$$

Je différentie cette équation par rapport à α, et après la différentiation, je pose $\alpha = 1$, $\beta = 1, \ldots \gamma = 1$: je trouve par là

$$\zeta f'_{\zeta}(x, \zeta, \eta, \ldots \theta) = a f'_{a}(g, a, b, \ldots c),$$

ou simplement,

$$f'_{\zeta}(x, \zeta, \eta, \ldots \theta) = \frac{A}{\zeta},$$

en représentant par A la constante $a f'_{a}(g, a, b, \ldots c)$. L'équation algébrique précédente subsistera encore (n° 9) si je remplace $\zeta, \eta, \ldots \theta$ par les quantités purement littérales $\lambda, \mu, \ldots \nu$: on a par conséquent,

$$f'_{\lambda}(x, \lambda, \mu, \ldots \nu) = \frac{A}{\lambda},$$

et l'on aura de même,

$$f'_{\mu}(x, \lambda, \mu, \ldots \nu) = \frac{B}{\mu},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$f'_{\nu}(x, \lambda, \mu, \ldots \nu) = \frac{C}{\nu},$$

si l'on représente par B, ... C les constantes $b f'_{b}(g, a, b, \ldots c)$, $c f'_{c}(g, a, b, \ldots c)$. De là il est aisé de conclure

$$f'_\lambda(x,\ \lambda,\ \mu,\ldots\nu)\,d\lambda + f'_\mu(x,\ \lambda,\ \mu,\ldots\nu)\,d\mu + \ldots$$
$$+ f'_\nu(x,\ \lambda,\ \mu,\ldots\nu)\,d\nu = \frac{A\,d\lambda}{\lambda} + \frac{B\,d\mu}{\mu} + \ldots + \frac{C\,d\nu}{\nu}:$$

intégrant donc par rapport à $\lambda,\ \mu,\ldots\nu$, il vient

$$f(x,\ \lambda,\ \mu,\ldots\nu) = A\log\lambda + B\log\mu + \ldots + C\log\nu + \text{const.}$$

La constante est ici une fonction de x : pour la déterminer, soient $\lambda_0,\ \mu_0,\ldots\nu_0$ des valeurs particulières de $\lambda,\ \mu,\ldots\nu$: en les substituant, on obtiendra

$$f(x,\lambda_0,\ \mu_0,\ldots\nu_0) = A\log\lambda_0 + B\log\mu_0 + \ldots + C\log\nu_0 + \text{const.}$$

d'où l'on tire, par la soustraction,

$$f(x,\ \lambda,\ \mu,\ldots\nu) = f(x,\ \lambda_0,\ \mu_0,\ldots\nu_0) + A(\log\lambda - \log\lambda_0)$$
$$+ B(\log\mu - \log\mu_0) + \ldots + C(\log\nu - \log\nu_0).$$

Comme je puis actuellement donner à $\lambda,\ \mu,\ldots\nu$ les valeurs que je veux, je pose $\lambda = \zeta$, $\mu = \eta,\ldots\nu = \theta$: le premier membre devient $f(x,\ \zeta,\ \eta,\ldots\theta)$ ou $\log x$: en observant que $\log\zeta = u$, $\log\eta = v,\ldots$ $\log\theta = w$, j'en tire donc

$$\log x = f(x,\ \lambda_0,\ \mu_0,\ldots\nu_0) + A(u - \log\lambda$$
$$+ B(v - \log\mu_0) + \ldots + C(w - \log\nu_0),$$

équation absurde ; car le second membre est une fonction algébrique de x, laquelle ne peut pas être égale à $\log x$, d'après ce qu'on a démontré ci-dessus.

11. On peut abréger la démonstration précédente, sans d'ailleurs en changer l'esprit ; il suffit pour cela de considérer à part une des exponentielles $\zeta,\ \eta,\ldots\theta$, la première par exemple, au lieu de les considérer toutes à la fois. Je développerai d'autant plus volontiers cette seconde méthode, ou plutôt cette autre manière d'envisager la même méthode, que j'en ferai par la suite un usage continuel et exclusif. Voici comment il faut raisonner alors.

Il s'agit de prouver l'absurdité de l'équation

$$(1)\qquad \log x = f(x,\ \zeta,\ \eta,\ldots\theta),$$

11..

dont le second membre renferme m exponentielles $\zeta, \eta, \ldots \theta$: le nombre m est supposé réduit à son minimum : par conséquent si de l'équation (1) on déduit une autre équation semblable dont le second membre renferme moins de m exponentielles, l'absurdité de l'équation (1) sera par cela même rendue manifeste.

Maintenant pour mettre spécialement en évidence l'exponentielle ζ, j'écrirai

$$\log x = \varphi(x, \zeta),$$

et j'en déduirai en différentiant

$$\frac{1}{x} = \varphi'_x(x, \zeta) + \varphi'_\zeta(x, \zeta)\zeta u',$$

$\varphi'_x(x, \zeta)$ étant l'expression abrégée de

$$f'_x(x, \zeta, \eta, \ldots \theta) + f'_\eta(x, \zeta, \eta, \ldots \theta)\eta v' + \ldots + f'_\theta(x, \zeta, \eta, \ldots \theta)\theta w'.$$

L'équation

$$\frac{1}{x} = \varphi'_x(x, \zeta) + \varphi'_\zeta(x, \zeta)\zeta u'$$

remplace l'équation équivalente

$$\begin{aligned}\frac{1}{x} = f'_x(x, \zeta, \eta, \ldots \theta) &+ f'_\zeta(x, \zeta, \eta, \ldots \theta)\zeta u' \\ &+ f'_\eta(x, \zeta, \eta, \ldots \theta)\eta v' + \ldots + f'_\theta(x, \zeta, \eta, \ldots \theta)\theta w',\end{aligned}$$

dont nous nous sommes servis dans le numéro précédent, mais elle est beaucoup plus simple à écrire. Cette équation doit être identique par rapport à ζ : on peut donc y remplacer ζ par $\alpha\zeta$, α étant une quantité numérique quelconque, ce qui donne

$$\frac{1}{x} = \varphi'_x(x, \alpha\zeta) + \varphi'_{\alpha\zeta}(x, \alpha\zeta)\alpha\zeta u',$$

équation dont le second membre, multiplié par dx, fournit pour résultat la différentielle complète $d\varphi(x, \alpha\zeta)$. En égalant cette valeur de $\frac{1}{x}$ à la précédente, et intégrant l'équation qui en résulte, puis déterminant la constante arbitraire à l'aide d'une valeur particulière $x = g$,

à laquelle répond $\zeta = a$, on obtient

$$\varphi(x, \alpha\zeta) = \varphi(x, \zeta) + \varphi(g, \alpha a) - \varphi(g, a).$$

Je différentie cette équation par rapport à α et je fais ensuite $\alpha = 1$. En posant $a\varphi'_a(g, a) = \mathrm{A}$, je trouve ainsi,

$$\zeta\varphi'_\zeta(x, \zeta) = \mathrm{A}.$$

Cette équation étant algébrique par rapport à $x, \zeta, \eta, \ldots \theta$ doit subsister si l'on remplace ζ par une lettre indéterminée i que l'on pourra regarder comme une variable indépendante. On a donc

$$\varphi'_i(x, i) = \frac{\mathrm{A}}{i}.$$

Multipliant par di et intégrant, j'obtiens

$$\varphi(x, i) = \mathrm{A}\log i + \text{const}.$$

d'où résulte, en déterminant la constante à l'aide d'une valeur particulière i_0 de i,

$$\varphi(x, i) = \mathrm{A}\log i + \varphi(x, i_0) - \mathrm{A}\log i_0.$$

J'ai le droit de donner à i telle valeur qu'il me plaira : je pose donc $i = \zeta$; le premier membre de mon équation devient $\varphi(x, \zeta)$ ou $\log x$: de là je conclus, en observant que $\log \zeta = u$:

$$\log x = \mathrm{A}u + \varphi(x, i_0) - \mathrm{A}\log i_0,$$

équation absurde, car le second membre est une fonction exponentielle de première espèce où ζ n'entre plus et qui renferme seulement $m - 1$ exponentielles $\eta, \ldots \theta$, tandis que la valeur de $\log x$ doit par hypothèse en contenir au moins m. Nous sommes ainsi conduits de nouveau à la conclusion obtenue dans le numéro précédent, savoir qu'une équation de la forme (1) est inadmissible. Le lecteur jugera sans doute avec nous que la démonstration donnée en dernier lieu est plus simple et aussi rigoureuse que celle du n° 10 : elle abrége surtout considérablement l'écriture.

12. Faisons voir maintenant que $\log x$ ne peut être exprimé par aucune fonction exponentielle de $n^{\text{ième}}$ espèce, quel que soit n. Dé-

signons en effet par m le nombre des exponentielles de $n^{ième}$ espèce, et supposons le nombre m réduit à son minimum, en sorte que nulle relation algébrique ne puisse exister entre ces exponentielles de $n^{ième}$ espèce et d'autres, quelles qu'elles soient, d'espèce inférieure. Soit $\zeta = e^u$ une quelconque d'entre elles, u étant une fonction exponentielle de $(n-1)^{ième}$ espèce, et, pour mettre ζ en évidence, écrivons

$$\log x = \varphi(x, \zeta),$$

la fonction φ étant algébrique par rapport à ζ, et contenant en outre, algébriquement aussi, d'autres expronentielles monomes dont il est inutile de faire une mention explicite.

L'équation

$$\frac{dx}{x} = d\varphi(x, \zeta),$$

ou

$$\frac{1}{x} = \varphi'_x(x, \zeta) + \varphi'_\zeta(x, \zeta)\zeta u',$$

que l'on obtient en différentiant la valeur de $\log x$, est algébrique par rapport à ces transcendantes aussi bien que par rapport à ζ. Donc elle doit subsister en remplaçant ζ par $\alpha\zeta$, α étant une quantité numérique quelconque; ainsi l'on a

$$\frac{1}{x} = \varphi'_x(x, \alpha\zeta) + \varphi'_{\alpha\zeta}(x, \alpha\zeta)\alpha\zeta u',$$

d'où il est aisé de conclure

$$\frac{dx}{x} = d\varphi(x, \alpha\zeta).$$

J'égale cette valeur de $\frac{dx}{x}$ à la précédente $d\varphi(x, \zeta)$, après quoi j'intègre, et je détermine la constante à l'aide d'une valeur particulière $x = b$, à laquelle réponde $\theta = a$. Il vient

$$\varphi(x, \alpha\zeta) = \varphi(x, \zeta) + \varphi(b, \alpha a) - \varphi(b, a).$$

Je différentie par rapport à α l'équation que je viens d'écrire, et posant $\alpha = 1$ après la différentiation, je trouve

$$\zeta\varphi'_\zeta(x, \zeta) = a\varphi'_a(b, a),$$

équation algébrique par rapport à ζ et qui doit subsister si l'on remplace ζ par une lettre indéterminée i : remplaçant donc ζ par i et faisant $a\varphi'_{\circ}(b, a) = \mathrm{A}$, j'ai

$$\varphi'_i(x, i) = \frac{\mathrm{A}}{i},$$

ce qui me donne, en intégrant par rapport à i,

$$\varphi(x, i) = \mathrm{A} \log i + \text{const.}$$

En déterminant la constante à l'aide d'une valeur particulière $i_{\circ}$ de i et posant ensuite $i = \zeta$, on obtient enfin, comme ci-dessus,

$$\log x = \mathrm{A}u + \varphi(x, i_{\circ}) - \mathrm{A} \log i_{\circ},$$

équation absurde, puisque le nombre des exponentielles de $n^{\text{ième}}$ espèce contenues dans le second membre est $< m$, ce qui ne se peut.

13. Il est rigoureusement établi par là que la fonction $\log x$ ne peut être équivalente à aucune fonction φ purement exponentielle ou dépendante des seuls signes $\varpi(x)$, e^x. On peut en dire autant des fonctions suivantes $\log \log x$, $\log \log \log x$, etc.; car si l'on avait $\log \log x = \varphi$, on en déduirait $\log x = e^{\varphi}$, ce qui est absurde. Réciproquement nous ferons voir que la quantité e^x ne peut être exprimée par aucune fonction purement logarithmique.

Supposons, par exemple, qu'il soit possible d'exprimer e^x par une fonction logarithmique de première espèce, c'est-à-dire de la forme

$$e^x = f(x, \zeta, \eta, \ldots \theta),$$

ζ, η, ... θ, ayant pour valeurs respectives $\log u$, $\log v$, ... $\log w$ où u, v, ... w, désignent des fonctions algébriques, et le nombre m des quantités ζ, η, ... θ étant réduit à son minimum.

Considérons spécialement ζ par exemple, et remplaçons en conséquence $f(x, \zeta, \eta, \ldots \theta)$, par $\varphi(x, \zeta)$; nous aurons en prenant les logarithmes des deux membres

$$x = \log \varphi(x, \zeta),$$

d'où résulte, en différentiant

$$dx = \frac{d\varphi(x, \zeta)}{\varphi(x, \zeta)},$$

ou

$$1 = \frac{\varphi'_x(x,\zeta) + \varphi'_\zeta(x,\zeta)\frac{u'}{u}}{\varphi(x,\zeta)},$$

équation purement algébrique par rapport à $\zeta, \eta, \ldots \theta$, qui doit être identique par rapport à ζ, et où l'on peut en conséquence remplacer ζ par $\alpha + \zeta$, α étant un nombre quelconque. On a donc

$$1 = \frac{\varphi'_x(x, \alpha+\zeta) + \varphi'_\zeta(x, \alpha+\zeta)\frac{u'}{u}}{\varphi(x, \alpha+\zeta)},$$

ou

$$dx = \frac{d\varphi(x, \alpha+\zeta)}{\varphi(x, \alpha+\zeta)}.$$

J'égale cette valeur de dx à la précédente, ce qui me donne

$$\frac{d\varphi(x, \alpha+\zeta)}{\varphi(x, \alpha+\zeta)} = \frac{d\varphi(x,\zeta)}{\varphi(x,\zeta)};$$

intégrant donc et déterminant la constante arbitraire à l'aide d'une valeur particulière $x=b$, à laquelle réponde $\zeta = a$, on obtient

$$\varphi(x, \alpha+\zeta) = \frac{\varphi(x,\zeta)}{\varphi(b,a)}\varphi(b, \alpha+a).$$

Je différentie maintenant par rapport à α, et après la différentiation je pose $\alpha = 0$: cela me donne

$$\varphi'_\zeta(x,\zeta) = \frac{\varphi'_a(b,a)}{\varphi(b,a)}\varphi(x,\zeta),$$

équation algébrique par rapport à ζ et qui doit subsister encore si l'on remplace ζ par une lettre indéterminée i. On a par conséquent

$$\varphi'_i(x,i) = \frac{\varphi'_a(b,a)}{\varphi(b,a)}\varphi(x,i):$$

en posant $\frac{\varphi'_a(b,a)}{\varphi(b,a)} = h$, on en conclut

$$\frac{\varphi'_i(x,i)\,di}{\varphi(x,i)} = hdi.$$

Intégrant donc par rapport à i, et déterminant la constante que l'intégration introduit à l'aide d'une valeur particulière $i=i_0$, on tire aisément de là

$$\varphi(x,\ i)e^{hi_0} = \varphi(x,\ i_0)e^{hi},$$

résultat absurde, puisqu'on en déduirait $e^{hi}=$ *une fonction algébrique de* i, ce qui ne se peut. Si h était $=0$, ce raisonnement ne serait plus possible; mais on aurait alors $\varphi(x,\ i)=\varphi(x,\ i_0)$; d'où, en posant $i=\zeta$, on conclurait $\varphi(x,\ \zeta)$ ou $e^x=\varphi(x,\ i_0)$, équation absurde, puisque son second membre renferme seulement $(m-1)$ logarithmes, tandis que la valeur de e^x doit, par hypothèse, en contenir au moins m.

On prouvera en général que e^x ne peut être exprimé par aucune fonction purement logarithmique de $n^{\text{ième}}$ espèce. En effet soit ζ une des m exponentielles de $n^{\text{ième}}$ espèce entrant dans la valeur supposée de e^x, et suivant notre usage posons $e^x = \varphi(x,\ \zeta)$. Regardons le nombre m comme réduit à son minimum : dès-lors aucune relation algébrique ne pourra exister entre x, ζ, les autres logarithmes de $n^{\text{ième}}$ espèce contenus dans $\varphi(x,\ \zeta)$ et d'autres logarithmes d'espèce inférieure. On pourra par conséquent répéter ici mot à mot tout ce que nous avons dit au commencement de ce numéro, quand la fonction $\varphi(x,\ \zeta)$ appartenait à la première espèce, et l'on retombera de nouveau sur l'équation absurde $\varphi(x,\ i)e^{hi_0} = \varphi(x,\ i_0)e^{hi}$. Notre analyse établit donc en toute rigueur le théorème que nous avions en vue, savoir que l'exponentielle e^x ne peut être exprimée par aucune fonction purement logarithmique de la variable x.

§ IV.

Des diverses fonctions que l'on rencontre dans les éléments.

14. Si nous passons maintenant en revue les diverses fonctions de x dont on s'occupe dans les éléments d'algèbre, nous verrons que toutes peuvent s'exprimer sous forme finie, à l'aide des simples fonctions algébriques, exponentielles et logarithmiques. Et nous n'avons pas même besoin de comprendre parmi ces dernières les exponentielles de la forme a^x et les logarithmes Log x dont la base n'est

pas le nombre $e = 2,718\ldots$; car on a $a^x = e^{x \log a}$ et $\text{Log}\, x = \text{M} \log x$, M désignant le module du système des logarithmes désignés par $\text{Log}\, x$, par où l'on voit que tous les logarithmes peuvent être transformés en logarithmes népériens, et toutes les exponentielles transformées en d'autres exponentielles rapportées au nombre e.

15. Considérons d'abord les puissances dont l'exposant est un nombre quelconque. Soit α une constante réelle ou imaginaire : la puissance dont il s'agit sera représentée par x^α. Dans le cas très particulier où le nombre α est réel et rationnel, on sait que x^α est une fonction algébrique de x ; car si l'on a $\alpha = \frac{m}{n}$, ou $\alpha = -\frac{m}{n}$, m et n désignant deux nombres entiers positifs, il en résultera

$$x^\alpha = x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m},$$

ou

$$x^\alpha = x^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{x^m}}.$$

Mais toutes les fois que la constante α est irrationnelle ou imaginaire, je dis que x^α n'est pas une fonction algébrique de x. Pour le prouver, posons $y = x^\alpha$, ce qui donne

$$x \frac{dy}{dx} = \alpha y.$$

Admettons pour un instant que y soit une fonction algébrique de x, déterminée par une équation irréductible de degré μ, savoir

$$(1) \qquad f(x, y) = 0,$$

dont le premier membre serait une fonction entière de x et y. En différentiant, il vient

$$f'_x(x, y) + f'_y(x, y) \frac{dy}{dx} = 0,$$

équation qui se transforme dans la suivante

$$(2) \qquad x f'_x(x, y) + \alpha y f'_y(x, y) = 0,$$

lorsqu'on remplace $\frac{dy}{dx}$ par sa valeur $\frac{ay}{x}$ et qu'on chasse ensuite le dénominateur x. Pour que l'équation $x\frac{dy}{dx} = ay$ soit satisfaite, il est donc nécessaire que les deux équations (1) et (2) aient lieu en même temps, sans qu'on soit obligé d'attribuer à x une valeur particulière; et comme l'équation (1) est irréductible, une de ses racines, y_1 par exemple, ne peut satisfaire à l'équation (2), sans que toutes les autres y_2, y_3, ... y_μ, n'y satisfassent aussi. Donc, si l'intégrale particulière $y = y_1$ vérifie l'équation $x\frac{dy}{dx} = ay$, les intégrales particulières $y = y_2$, $y = y_3$, ... $y = y_\mu$, la vérifieront également. Les racines y_1, y_2, ... y_μ étant différentes de zéro par la nature même de l'équation irréductible (1), il résulte de la théorie des équations linéaires que la valeur de y s'obtiendra en multipliant y_1 par une certaine constante C_1, ou bien en multipliant y_2, ... y_μ par des constantes C_2, ... C_μ: on voit donc qu'il est permis de poser à la fois

$$y = C_1 y_1,\quad y = C_2 y_2,\quad y = C_3 y_3, \ldots y = C_\mu y_\mu:$$

je multiplie ces équations membre à membre, et en représentant par C^μ le produit $C_1 C_2 C_3 \ldots C_\mu$, je trouve

$$y^\mu = C^\mu y_1 y_2 y_3 \ldots y_\mu,$$

d'où je tire

$$y = C\sqrt[\mu]{y_1 y_2 y_3 \ldots y_\mu}.$$

Le produit $y_1 y_2 y_3 \ldots y_\mu$ n'est pas nul, puisque l'équation (1) étant irréductible, n'a pas de racine nulle; c'est d'ailleurs une fonction rationnelle et symétrique de y_1, y_2, etc., et par suite une fonction rationnelle de x, que l'on peut représenter par le quotient $\frac{X}{Y}$ de deux polynomes entiers premiers entre eux. Donc si la fonction $y = x^a$ peut s'exprimer algébriquement, sa valeur sera de la forme

$$y = C\sqrt[\mu]{\frac{X}{Y}}.$$

En différentiant cette valeur, je trouve

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{\mu} \cdot \frac{YX' - XY'}{XY},$$

et, comme j'ai d'ailleurs $x\frac{dy}{dx} = \alpha y$, j'en conclus

$$\frac{x}{\mu}(YX' - XY') = \alpha XY.$$

Cette équation nous prouve que XY est divisible par x, et que par conséquent un des deux facteurs X ou Y l'est aussi; car ils ne peuvent pas l'être tous deux à la fois, puisqu'on les suppose premiers entre eux. Admettons d'abord que $\frac{X}{x}$ soit une fonction entière. Il est alors permis de faire $X = Zx^n$, n étant un nombre entier > 0 et Z un nouveau polynome non divisible par x : on a donc

$$X' = nZx^{n-1} + Z'x^n.$$

Portant cette valeur et celle de X dans l'équation précédente, on obtient

$$\frac{x}{\mu}(nYZx^{n-1} + YZ'x^n - ZY'x^n) = \alpha YZx^n,$$

équation qu'on peut écrire ainsi

$$\left(\frac{n}{\mu} - \alpha\right) YZ = \frac{x}{\mu}(ZY' - YZ'),$$

et dont l'absurdité est manifeste toutes les fois que α est une constante irrationnelle ou imaginaire. En effet, dans cette hypothèse, le coefficient $\frac{n}{\mu} - \alpha$, ne peut pas être nul, puisqu'en posant $\alpha = \frac{n}{\mu}$ la valeur de α serait le quotient de deux nombres entiers réels. Par conséquent le premier membre, où se trouvent les deux facteurs Y et Z premiers avec x, est aussi premier avec x, tandis que dans le second membre, ce facteur x est au contraire mis en évidence. En posant $Y = Zx^n$, on arrivera de même à une équation absurde, savoir,

$$\left(\frac{n}{\mu} + \alpha\right) XZ = \frac{x}{\mu}(ZX' - XZ').$$

Donc y ou x^α ne peut pas avoir une valeur de la forme $C\sqrt[\mu]{\frac{X}{Y}}$: donc x^α ne peut s'exprimer par aucune fonction algébrique de x. Il est d'ailleurs aisé de voir que cette quantité peut être représentée par des exponentielles et des logarithmes, puisque l'on a $x^\alpha = e^{\alpha \log x}$.

16. Viennent ensuite les exponentielles dont la base et l'exposant à la fois sont des fonctions de la variable, exponentielles dont la quantité x^x nous offre un exemple. Il est bien facile de prouver que l'on n'a pas $x^x = y$, y étant une fonction algébrique; car en différentiant cette équation, on trouverait

$$y(1 + \log x) = y',$$

d'où l'on déduirait $\log x = \frac{y'}{y} - 1 =$ *fonction algébrique de* x, ce qui est absurde. Mais cette fonction x^x, et la fonction plus compliquée q^p dans laquelle p et q sont deux fonctions algébriques quelconques de x, peuvent s'écrire sous forme finie avec les signes logarithmiques et exponentiels, puisque l'on a

$$x^x = e^{x \log x}, \quad q^p = e^{p \log q}.$$

17. Je m'occuperai en dernier lieu des fonctions circulaires. Et d'abord s'il s'agit du cosinus, on a par une formule connue d'Euler

$$\cos x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2}:$$

donc la quantité $\cos x$ s'exprime en exponentielles imaginaires, et il en est de même de $\sin x$ et des autres lignes trigonométriques, puisque l'on a

$$\sin x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}, \text{ etc.}$$

Il nous sera aisé de prouver en passant que ces lignes trigonométriques ne sont point exprimables en fonction algébrique de x, car si l'on avait par exemple $\cos x = f(x)$, f dénotant une fonction algé-

brique, on aurait aussi

$$\frac{e^{x\sqrt{-1}}+e^{-x\sqrt{-1}}}{2}=f(x),$$

et il en résulterait

$$e^{x\sqrt{-1}}=f(x)\pm\sqrt{f(x)^2-1},$$

c'est-à-dire $e^{x\sqrt{-1}}$ = *une fonction algébrique de* x, ce qui ne se peut.

Les fonctions trigonométriques inverses ne sont pas non plus algébriques, mais elles s'expriment par des logarithmes au moyen des formules de Jean Bernouilli

$$\text{arc sin}\,x=\frac{1}{\sqrt{-1}}\log\left(x\sqrt{-1}+\sqrt{1-x^2}\right),$$

$$\text{arc tang}\,x=\frac{1}{2\sqrt{-1}}\log\left(\frac{1+x\sqrt{-1}}{1-x\sqrt{-1}}\right).$$

. . . .

En résumé, les fonctions que l'on rencontre dans les éléments peuvent toutes s'écrire sous forme finie à l'aide des signes algébriques, exponentiels et logarithmiques; ce que nous nous proposions d'établir.

§ V.

Comment on peut reconnaître d'une manière précise à quelle espèce appartient une fonction finie explicite donnée.

18. D'après la classification des fonctions finies explicites adoptée par nous au paragraphe deuxième de ce mémoire, une fonction finie explicite de la $n^{ième}$ espèce ne peut renfermer dans chacun de ses termes plus de n opérations transcendantes portant successivement l'une sur l'autre; mais de ce qu'une fonction finie explicite renferme un ou plusieurs termes affectés de n opérations transcendantes successives, il n'en résulte pas nécessairement qu'elle appartienne à la $n^{ième}$ espèce:

au contraire il peut arriver qu'elle appartienne à une espèce inférieure à la $n^{ième}$ ou même qu'elle soit purement algébrique. Aussi avant d'affirmer qu'une fonction finie donnée appartient à une espèce ou à une autre, est-il nécessaire de réduire autant que possible les signes exponentiels et logarithmiques, qui se succèdent et qui souvent peuvent s'entre-détruire.

Si vous considérez, par exemple, les fonctions $\log(xe^x)$, $\log(e^{x^2})$, qui sous leur forme actuelle paraissent appartenir à la seconde espèce, vous n'aurez qu'à les écrire ainsi $\log(xe^x) = \log x + x$, $\log(e^{x^2}) = x^2$, pour reconnaître que l'une d'elles est de première espèce et que l'autre est purement algébrique.

Ces réflexions conduisent à un problème nouveau difficile autant qu'utile et dont voici l'énoncé : *Étant donnée une fonction finie explicite, trouver une méthode exacte qui fasse connaître avec certitude à quelle espèce cette fonction donnée appartient.* Sans essayer de traiter ce problème dans toute sa généralité, nous allons montrer, par des exemples choisis, quels principes on doit employer pour le résoudre dans chaque cas particulier. Mais, avant d'entrer en matière, il faut démontrer un théorème dont nous ferons, dans ce qui va suivre, un fréquent usage.

19. Soient A, B, ... C, des constantes quelconques et x une variable indépendante : je dis qu'il est impossible de trouver des fonctions $u, v, \ldots w$, algébriques en x et telles que l'on ait

$$(1) \qquad A \log u + B \log v + \ldots + C \log w = x.$$

Pour établir ce théorème, nous ferons voir que l'équation (1), si elle était admise ($u, v, \ldots w$ désignant des fonctions algébriques de x) conduirait à une absurdité.

En effet soit θ une fonction algébrique de x, telle que toutes les quantités $u, v, \ldots w$ puissent être regardées comme des fonctions rationnelles de x et θ, et qu'il en soit de même par conséquent de leurs dérivées $u', v', \ldots w'$. Il existe une infinité de fonctions θ qui jouissent de cette propriété, et l'on peut prendre, par exemple, $\theta = \alpha u + \beta v + \ldots + \gamma w$, $\alpha, \beta, \ldots \gamma$, étant des constantes arbitraires. Puisque θ est algébrique en x, on peut regarder cette quantité comme la racine d'une équation irréductible $f(x, \theta) = 0$, $f(x, \theta)$

désignant un polynome entier par rapport à x et θ, et de degré μ relativement à cette dernière lettre.

Cela posé, en différentiant l'équation (1), il vient

$$\frac{Au'}{u} + \frac{Bv'}{v} + \ldots + \frac{Cw'}{w} = 1.$$

D'après ce qu'on a dit plus haut, le premier membre de cette équation est une fonction rationnelle de x et θ, ou peut facilement se transformer en une telle fonction. Ce premier membre doit être égal à l'unité, en prenant pour θ une des racines de l'équation irréductible $f(x, \theta) = 0$: donc, par le théorème du n° 3, il devra aussi se réduire à l'unité pour toutes les autres racines.

D'après cela, en nommant $\theta_1, \theta_2, \ldots \theta_\mu$ les μ racines de l'équation $f(x, \theta) = 0$, puis $u_1, v_1, \ldots w_1, u'_1, v'_1, \ldots w'_1$ les valeurs correspondantes de $u, v, \ldots w, u', v', \ldots w'$, on aura quel que soit x :

$$\frac{Au'_1}{u_1} + \frac{Bv'_1}{v_1} + \ldots + \frac{Cw'_1}{w_1} = 1,$$
$$\frac{Au'_2}{u_2} + \frac{Bv'_2}{v_2} + \ldots + \frac{Cw'_2}{w_2} = 1,$$
$$\frac{Au'_\mu}{u} + \frac{Bv'_\mu}{v_\mu} + \ldots + \frac{Cw'_\mu}{w_\mu} = 1.$$

Je multiplie ces équations par dx et je les ajoute, ce qui, en ayant égard à la relation

$$\frac{u'_1}{u_1}dx + \frac{u'_2}{u_2}dx + \ldots + \frac{u'_\mu}{u_\mu}dx = d\log(u_1u_2\ldots u_\mu),$$

me donne

$$Ad\log(u_1u_2\ldots u_\mu) + Bd\log(v_1v_2\ldots v_\mu) + \ldots + Cd\log(w_1w_2\ldots w_\mu) = \mu dx :$$

or les produits $u_1u_2\ldots u_\mu$, $v_1v_2\ldots v_\mu$, $w_1w_2\ldots w_\mu$ sont des fonctions rationnelles de α, $\theta_1, \theta_2\ldots\theta_\mu$, symétriques en $\theta_1, \theta_2\ldots\theta_\mu$: donc, par un théorème connu, on peut les exprimer rationnellement en x et les représenter respectivement par X, Y, ... Z.

D'où l'on voit que si l'équation (1) était possible, on pourrait trouver

des fonctions rationnelles de x, savoir X, Y,...Z, propres à satisfaire à l'autre équation

$$(2)\qquad A d\log X + B d\log Y + \ldots + C d\log Z = dx.$$

On sait (n° 19) que toute fonction rationnelle X peut se mettre sous la forme

$$X = M(x-a)^{\alpha}(x-b)^{\beta}\ldots(x-c)^{\gamma},$$

et on pourra écrire de même

$$Y = M_1(x-a)^{\alpha_1}(x-b)^{\beta_1}\ldots(x-c)^{\gamma_1},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$Z = M_i(x-a)^{\alpha_i}(x-b)^{\beta_i}\ldots(x-c)^{\gamma_i}.$$

En posant, pour abréger,

$$A\alpha + B\alpha_1 + \ldots + C\alpha_i = N,$$
$$A\beta + B\beta_1 + \ldots + B\beta_i = P,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$A\gamma + B\gamma_1 + \ldots + C\gamma_i = Q,$$

l'équation (2) deviendra donc

$$\frac{N}{x-a} + \frac{P}{x-b} + \ldots + \frac{Q}{x-c} = 1.$$

Quelques-uns des coefficients N, P,...Q peuvent être nuls; mais comme tous ne doivent pas s'annuler à la fois, supposons N différent de zéro. L'équation précédente peut s'écrire ainsi

$$\frac{N}{x-a} = 1 - \frac{P}{x-b} - \ldots - \frac{Q}{x-c}:$$

je puis représenter la quantité

$$1 - \frac{P}{x-b} - \ldots - \frac{Q}{x-c},$$

par

$$\frac{U}{(x-b)\ldots(x-c)},$$

U étant une fonction entière de x : j'aurai donc

$$\frac{\mathrm{N}}{x-a}=\frac{\mathrm{U}}{(x-b)\ldots(x-c)},$$

d'où je tire enfin

$$\mathrm{N}(x-b)\ldots(x-c)=\mathrm{U}(x-a),$$

équation absurde, puisque le second membre est divisible et le premier membre non divisible par $x-a$. Donc, en partant de l'équation (1) supposée possible, on est inévitablement conduit à une absurdité : donc une telle équation ne peut pas exister.

En nommant $u, v, \ldots w, t$, des fonctions algébriques quelconques de x dont la dernière ne se réduit pas à une simple constante, on ne pourra pas davantage avoir l'équation

$$\mathrm{A}\log u+\mathrm{B}\log v+\ldots+\mathrm{C}\log w=t,$$

car rien n'empêchera de regarder alors x comme une fonction algébrique de t, et par suite $u, v, \ldots w$, comme des fonctions algébriques de cette même lettre t, ce qui réduira la nouvelle équation à la forme de l'équation (1).

20. Actuellement considérons la fonction x^{α}, α étant une constante irrationnelle ou imaginaire : cette fonction, comme nous l'avons vu n° 15, n'est point algébrique ; elle est transcendante. Mais à quelle espèce appartient-elle ? C'est là ce que nous ignorons jusqu'ici. Concevons donc qu'on nous propose de décider par une méthode certaine dans quelle classe cette fonction doit être rangée. D'abord, puisque l'on a $x^{\alpha}=e^{\alpha\log x}$, la quantité x^{α} que nous désignerons désormais par y est tout au plus de seconde espèce, et elle sera vraiment de seconde espèce si nous montrons qu'elle ne peut pas descendre à la première. C'est ce que nous allons faire à l'instant.

Pour développer notre démonstration dans laquelle, suivant notre usage, nous aurons recours au principe de la réduction à l'absurde, admettons qu'il soit possible de trouver une fonction de première espèce équivalente à y. Réduisons à son minimum le nombre des transcendantes monomes contenues dans cette fonction, et soit, s'il est possible, $\theta=\log u$ une de ces transcendantes, u étant algébrique ; la valeur

de y dans cette hypothèse sera de la forme

$$y = \varphi(x, \theta),$$

la fonction φ étant algébrique par rapport à θ et contenant en outre, algébriquement aussi, d'autres transcendantes monomes dont il est inutile de parler ici. Il viendra donc

$$\frac{dy}{dx} = \varphi'_x(x, \theta) + \varphi'_\theta(x, \theta)\frac{u'}{u}.$$

Mais l'équation $y = x^\alpha$ nous donne d'autre part $\frac{dy}{ydx} = \frac{\alpha}{x}$: il en résulte, en remplaçant y et $\frac{dy}{dx}$ par leurs valeurs :

$$\frac{\varphi'_x(x, \theta) + \varphi'_\theta(x, \theta)\frac{u'}{u}}{\varphi(x, \theta)} = \frac{\alpha}{x}.$$

Cette équation étant algébrique par rapport à θ et par rapport aux autres transcendantes contenues dans $\varphi(x, \theta)$, on peut y remplacer θ par $\mu+\theta$, μ étant une constante indéterminée : cela nous donne

$$\frac{\varphi'_x(x, \mu+\theta) + \varphi'_\theta(x, \mu+\theta)\frac{u'}{u}}{\varphi(x, \theta)} = \frac{\alpha}{x}:$$

ainsi l'on a quel que soit μ

$$\frac{d\varphi(x, \mu+\theta)}{\varphi(x, \theta)} = \frac{\alpha dx}{x},$$

et par suite

$$\frac{d\varphi(x, \mu+\theta)}{\varphi(x, \mu+\theta)} = \frac{d\varphi(x, \theta)}{\varphi(x, \theta)}.$$

J'intègre cette dernière équation, et déterminant la constante à l'aide d'une valeur particulière $x = b$ à laquelle répond $\theta = a$, j'obtiens

$$\varphi(b, a)\,\varphi(x, \mu+\theta) = \varphi(x, \theta)\varphi(b, \mu+a).$$

13..

Cette équation subsistant pour toutes les valeurs de μ, je puis la différentier par rapport à μ et poser ensuite $\mu = 0$; or l'équation nouvelle

$$\varphi(b, a)\,\varphi'_\theta(x, \theta) = \varphi(x, \theta)\,\varphi'_a(b, a),$$

qui résulte de cette opération, est algébrique par rapport aux transcendantes θ, etc., en sorte que l'on peut remplacer θ par une lettre indéterminée i considérée comme variable indépendante. Il vient par-là

$$\varphi(b, a)\,\varphi'_i(x, i) = \varphi(x, i)\,\varphi'_a(b, a),$$

c'est-à-dire

$$\frac{\varphi'_i(x, i)}{\varphi(x, i)} = \frac{\varphi'_a(b, a)}{\varphi(b, a)}.$$

Multipliant donc les deux membres de l'équation que je viens d'écrire par di, puis intégrant par rapport à i et déterminant la constante arbitraire produite par l'intégration à l'aide d'une valeur particulière $i = i_0$, on a

$$\log \varphi(x, i) = \frac{\varphi'_a(b, a)}{\varphi(b, a)}(i - i_0) + \log \varphi(x, i_0),$$

résultat absurde, puisque le logarithme d'une fonction algébrique de i se trouverait exprimé par une autre fonction algébrique de cette même lettre i. Donc si la quantité y est exprimable par une fonction transcendante de première espèce, cette fonction ne peut contenir aucun logarithme, mais seulement des exponentielles.

Continuons à la représenter par $\varphi(x, \theta)$, θ étant non plus un logarithme, mais bien une exponentielle de la forme e^u, u étant algébrique, et cette exponentielle entrant algébriquement seule ou avec d'autres dans la fonction $\varphi(x, \theta)$. L'absurdité de l'équation $y = \varphi(x, \theta)$ ainsi définie sera facile à établir: on en déduit en effet

$$\frac{dy}{dx} = \varphi'_x(x, \theta) + \varphi'_\theta(x, \theta)\,\theta u',$$

à cause de $\frac{dx}{ydx} = \frac{\alpha}{x}$ il vient d'après cela

$$\frac{\varphi'_x(x, \theta) + \varphi'_\theta(x, \theta)\,\theta u'}{\varphi(x, \theta)} = \frac{\alpha}{x};$$

équation algébrique par rapport aux exponentielles θ, etc., où l'on peut changer θ en $\mu\theta$ (μ étant une lettre indéterminée), ce qui fournit

$$\frac{\varphi'_x(x,\mu\theta)+\varphi'_{\mu\theta}(x,\mu\theta)\mu\theta u'}{\varphi(x,\mu\theta)}=\frac{\alpha}{x},$$

ou

$$\frac{d\varphi(x,\mu\theta)}{\varphi(x,\mu\theta)}=\frac{\alpha dx}{x},$$

on conclut de là que

$$\frac{d\varphi(x,\mu\theta)}{\varphi(x,\mu\theta)}=\frac{d\varphi(x,\theta)}{\varphi(x,\theta)}.$$

Intégrant cette dernière équation et nommant a la valeur de θ qui répond à une valeur quelconque $x=b$, on obtient

$$\varphi(b,a)\varphi(x,\mu\theta)=\varphi(x,\theta)\,\varphi(b,\mu a).$$

Je différentie par rapport à μ l'équation que je viens d'écrire; je fais ensuite $\mu=1$, et j'ai

$$\theta\varphi(b,a)\,\varphi'_\theta(x,\theta)=a\varphi(x,\theta)\,\varphi'_a(b,a),$$

équation dans laquelle on peut (n° 9) remplacer θ par une lettre indéterminée i, ce qui donne

$$\frac{\varphi'_i(x,i)}{\varphi(x,i)}=\frac{a\varphi'_a(b,a)}{\varphi(b,a)\,.\,i}.$$

Je pose pour abréger

$$\frac{a\varphi'_a(b,a)}{\varphi(b,a)}=m,$$

et je multiplie par di les deux membres de l'équation

$$\frac{\varphi'_i(x,i)}{\varphi(x,i)}=\frac{m}{i}:$$

j'intègre ensuite par rapport à i: en représentant par i_0 une valeur particulière quelconque de i, j'obtiens

$$\varphi(x,i)=\frac{\varphi(x,i_0)}{i_0^m}\,.\,i^m,$$

Puisque la lettre i est tout-à-fait indéterminée, et que l'équation précédente est identique par rapport à cette lettre, rien n'empêche de faire $i = \theta = e^x$. C'est ainsi que l'on trouve

$$y \text{ ou } \varphi(x, \theta) = \frac{\varphi(x, i_0)}{i_0^m} \cdot e^{mx}.$$

Ainsi notre analyse nous fait connaître la seule forme sous laquelle une exponentielle e^x ou e^{mx} pourra entrer dans l'expression de $\varphi(x, \theta)$. Cette exponentielle s'y trouve nécessairement en facteur à tous les termes : il en est de même des autres exponentielles $e^v \ldots e^w$, ou si l'on veut $e^{nv}, \ldots e^{pw}$ ($n, \ldots p$ étant des constantes et $v, \ldots w$, des fonctions algébriques de x), que l'on regardera comme renfermées dans cette fonction. D'ailleurs en posant $mu + nv + \ldots + pw = t$, le produit $e^{mu}.e^{nv} \ldots e^{pw}$ sera égal à e^t : donc la fonction $\varphi(x, \theta)$ ne peut être que de la forme

$$\varphi(x, \theta) = ze^t,$$

z et t désignant des fonctions algébriques de x : puisque l'on a à la fois $\varphi(x, \theta) = x^\alpha$ et $\varphi(x, \theta) = ze^t$, il vient

$$x^\alpha = ze^t,$$

d'où l'on tire, en prenant les logarithmes,

$$\alpha \log x - \log z = t :$$

or on a vu au n° 19 qu'une équation de cette dernière forme est toujours impossible. A la vérité dans ce n° 19 la fonction t est supposée ne pas pouvoir se réduire à une simple constante. Mais c'est ce qui a lieu ici, car si t était une constante, le produit ze^t et par suite la fonction x^α se trouverait fonction algébrique de x, ce qui n'est pas (n° 15).

Concluons de cette discussion que, toutes les fois que l'exposant α est irrationnel ou imaginaire, la fonction x^α est transcendante de seconde espèce, en sorte qu'on ne peut espérer de l'exprimer ni par des quantités algébriques, ni par des transcendantes de première espèce.

Comme second exemple, proposons-nous de chercher à quelle espèce appartient la fonction $\log \log x$.

D'abord il est clair qu'on ne peut pas avoir

$$\log \log x = \textit{une fonction algébrique } f(x);$$

car on en déduirait par la différentiation

$$\frac{1}{x \log x} = f'(x),$$

et par suite $\log x =$ une fonction algébrique de x, ce qui est absurde.

A présent je dis que la quantité $\log \log x$ n'est équivalente à aucune fonction transcendante de première espèce, ou (ce qui revient au même) je dis qu'on ne peut pas avoir $\log \log x =$ une fonction algébrique de x, d'une ou de plusieurs exponentielles de la forme e^u, et d'un ou de plusieurs logarithmes de la forme $\log u$, u étant algébrique en x.

Car si une telle équation est possible, nommons θ ou e^u une des exponentielles que l'on suppose contenues dans son second membre, et pour mettre θ en évidence posons simplement

$$\log \log x = \varphi(x, \theta),$$

la fonction φ étant algébrique par rapport à θ et contenant en outre, algébriquement aussi, des exponentielles et des logarithmes dont il est inutile de faire mention. Nous supposerons (ce qui est permis) le nombre des exponentielles renfermées dans la fonction φ réduit à son minimum, et dès-lors il ne pourra exister entre ces exponentielles, la variable x, et des logarithmes de première espèce, aucune équation algébrique, à moins que cette équation ne soit identique.

On produira une équation du genre de celle dont nous venons de parler, en différentiant l'égalité

$$\log \log x = \varphi(x, \theta),$$

ce qui donnera

$$\frac{1}{x \log x} = \varphi'_x(x, \theta) + \varphi'_\theta(x, \theta)\, \theta u'.$$

Dans cette dernière équation qui doit être identique, on pourra

donc remplacer θ par $\mu\theta$, μ étant une lettre indéterminée : il viendra ainsi

$$\frac{1}{x\log x}=\varphi'_x(x,\theta)+\varphi'_{\mu\theta}(x,\mu\theta)\mu\theta u',$$

d'où l'on conclut aisément

$$d\varphi(x,\mu\theta)=d\varphi(x,\theta).$$

le signe d indique une différentielle totale prise par rapport à x et par rapport à θ qui est fonction de x. Intégrant donc et déterminant la constante arbitraire à l'aide d'une valeur particulière $x=b$, à laquelle répond $\theta=a$, on aura

$$\varphi(x,\mu\theta)=\varphi(x,\theta)+\varphi(b,\mu a)-\varphi(b,a),$$

équation de laquelle je déduis, en différentiant par rapport à μ, et posant ensuite $\mu=1$,

$$\theta\varphi'_\theta(x,\theta)=a\varphi_a'(b,a).$$

Ici, puisque l'équation est algébrique par rapport à θ et aux autres transcendantes contenues dans la fonction φ, je puis remplacer θ par une variable indépendante i. J'obtiens de la sorte

$$\varphi'_i(x,i)di=\frac{a\varphi'_a(b,a)\,di}{i},$$

d'où je conclus, en intégrant par rapport à i et représentant par i_0 une valeur particulière de i,

$$\varphi(x,i)=a\varphi'_a(b,a)(\log i-\log i_0)+\varphi(x,i_0):$$

or, si la dérivée $\varphi'_a(b,a)$ n'est pas nulle, cette équation est absurde, puisqu'elle fournit pour $\log i$ une valeur algébrique en i, et si l'on suppose $\varphi'_a(b,a)=0$, elle donne

$$\varphi(x,i)=\varphi(x,i_0),$$

c'est-à-dire que la quantité $\varphi(x,i)$ est indépendante de i : donc l'exponentielle θ n'entre pas dans la quantité $\varphi(x,\theta)$, d'où résulte im-

médiatement que cette quantité ne peut renfermer aucune exponentielle.

Si donc la valeur de $\log\log x$ est exprimable par une transcendante de première espèce, elle ne pourra contenir que des logarithmes et point d'exponentielles. Soit $\theta = \log u$ l'un de ces logarithmes, u étant algébrique. Pour mettre θ en évidence, nous écrirons simplement suivant notre usage

$$\log\log x = \varphi(x, \theta),$$

la fonction φ étant algébrique par rapport à θ.

Les logarithmes qui entrent dans cette fonction φ ou portent sur la simple variable x et sont de la forme $\log x$, ou portent sur des quantités algébriques différentes de x. Rien ne m'empêche de supposer le nombre de ces derniers réduit à son minimum, et dès-lors il ne pourra exister aucune relation algébrique entre eux et les deux quantités x et $\log x$. On s'en convaincra aisément par un raisonnement analogue à celui du n° 9. Reprenons donc l'équation.... $\log\log x = \varphi(x, \theta)$, et supposons que θ soit différent de $\log x$. En différentiant cette équation, j'en obtiens une autre, savoir

$$\frac{1}{x\log x} = \varphi'_x(x, \theta) + \varphi'_\theta(x, \theta)\frac{u'}{u},$$

laquelle est algébrique par rapport à x, $\log x$, θ et par rapport aux autres transcendantes contenues dans la fonction φ, ce qui me permet de changer, quel que soit μ, θ en $\mu + \theta$, et me donne

$$\frac{1}{x\log x} = \varphi'_x(x, \mu + \theta) + \varphi'_\theta(x, \mu + \theta)\,\frac{u'}{u}.$$

J'égale ces deux valeurs de $\frac{1}{x\log x}$, et j'obtiens

$$\varphi'_x(x, \mu + \theta) + \varphi'_\theta(x, \mu + \theta)\frac{u'}{u} = \varphi'_x(x, \theta) + \varphi'_\theta(x, \theta)\,\frac{u'}{u}.$$

Multipliant les deux membres par dx, et intégrant dans l'hypothèse que pour $x = b$ on a $\theta = a$, je trouve

$$\varphi(x,\ \mu+\theta)=\varphi(x,\ \theta)+\varphi(b,\ \mu+a)-\varphi(b,\ a).$$

Je différentie cette équation par rapport à μ et je pose $\mu=0$ après la différentiation : j'ai ainsi

$$\varphi'_\theta(x,\ \theta)=\varphi'_a(b,\ a),$$

relation algébrique par rapport à $\log x$, θ, et où je puis remplacer θ par une lettre indéterminée i. Multipliant donc par di et intégrant par rapport à i l'équation nouvelle

$$\varphi'_i(x,\ i)=\varphi'_a(b,\ a)$$

à laquelle ce raisonnement conduit, puis désignant par i_0 une valeur particulière quelconque de i, je trouve

$$\varphi(x,\ i)=\varphi'_a(b,\ a)(i-i_0)+\varphi(x,\ i_0).$$

Dans la fonction $\varphi(x,\ i)$ la quantité i entre donc sous forme linéaire et avec un coefficient indépendant de x. Dans la fonction $\varphi(x,\ \theta)$ la quantité θ entrera donc aussi sous forme linéaire avec un coefficient constant : dès-lors si nous désignons par $\log u$, $\log v, \ldots \log w$, les logarithmes autres que $\log x$ entrant dans $\varphi(x,\ \theta)$ et par A, B,... C des constantes, la valeur de $\varphi(x,\ \theta)$ ou $\log\log x$ ne pourra être que de la forme

$$\log\log x=\mathrm{A}\log u+\mathrm{B}\log v+\ldots+\mathrm{C}\log w+\Psi(x,\ \log x),$$

$\Psi(x,\ \log x)$ étant une certaine fonction algébrique de x et $\log x$.

Pour abréger je pose $\log x=\zeta$: il vient

$$\log\zeta=\mathrm{A}\log u+\mathrm{B}\log v+\ldots+\mathrm{C}\log w+\Psi(x,\ \zeta),$$

d'où je déduis, en différentiant et observant que $d\zeta=\frac{dx}{x}$,

$$\frac{1}{x\zeta}=\frac{\mathrm{A}u'}{u}+\frac{\mathrm{B}v'}{v}+\ldots+\frac{\mathrm{C}w'}{w}+\Psi'_x(x,\ \zeta)+\frac{1}{x}\Psi'_\zeta(x,\ \zeta):$$

or si cette équation n'est pas identique par rapport à ζ elle est absurde, puisqu'elle fournirait alors pour ζ ou $\log x$ une valeur algébrique en x. Si au contraire elle est identique par rapport à ζ, on pourra y changer ζ en $\mu+\zeta$, μ étant une lettre indéterminée, indépendante de x, et l'on aura

$$\frac{1}{x(\mu+\zeta)} = \mathrm{A}\frac{u'}{u} + \mathrm{B}\frac{v'}{v} + \ldots + \mathrm{C}\frac{w'}{w} \\ + \Psi'_x(x,\ \mu+\zeta) + \frac{1}{x}\Psi'_\zeta(x,\ \mu+\zeta).$$

Je multiplie les deux membres de cette équation par dx, après quoi j'intègre par rapport à x : je trouve ainsi un résultat de la forme

$$\log(\mu+\zeta) = \mathrm{A}\log\frac{u}{u_0} + \mathrm{B}\log\frac{v}{v_0} + \ldots + \mathrm{C}\log\frac{w}{w_0} \\ + \Psi(x,\ \mu+\zeta) - \Psi(b,\ \mu+a) + \log(\mu+a),$$

b désignant une valeur particulière quelconque de x, et a, u_0, v_0, ... w_0 étant les valeurs de ζ, u, v, ... w, pour $x=b$.

Maintenant je différentie par rapport à μ l'équation que je viens d'écrire, et posant $\mu=0$, après la différentiation, j'obtiens

$$\frac{1}{\zeta} = \Psi'_\zeta(x,\ \zeta) - \Psi'_a(b,\ a) + \frac{1}{a},$$

équation algébrique entre x et ζ, qui doit être identique en ζ et où l'on peut par conséquent remplacer ζ par une lettre indéterminée i. Mais l'équation

$$\frac{1}{i} = \Psi'_i(x,\ i) - \Psi'_a(b,\ a) + \frac{1}{a}$$

sur laquelle je tombe par le changement de ζ en i, étant multipliée par di et intégrée par rapport à i, me conduit à une autre équation

$$\log i = \Psi(x,\ i) - \Psi(x,\ i_0) - \left[\Psi'_a(b,\ a) - \frac{1}{a}\right](i-i_0) + \log i_0,$$

dans laquelle i_0 est une valeur particulière de i, et qui doit être regardée comme absurde, puisqu'elle fournit pour $\log i$ une valeur

algébrique en i. Donc quoi qu'on fasse, on est conduit à une absurdité en regardant la transcendante $\log \log x$ comme réductible à la première espèce, ce qu'il fallait démontrer.

Étant donnée une fonction finie explicite quelconque $f(x)$, si l'on veut décider d'une manière certaine à quelle espèce cette fonction appartient, il faudra évidemment faire usage d'une méthode semblable à celle que nous venons d'employer pour les fonctions particulières x^a, $\log \log x$. Cette méthode est fondée sur un principe général : néanmoins, dans la pratique, il restera à vaincre les difficultés propres à chaque exemple. Au reste on trouvera là-dessus de nouveaux détails dans le paragraphe suivant.

(*La suite à un autre cahier.*)

Sur le développement de $(1-2xz+z^2)^{-\frac{1}{2}}$;

PAR MM. IVORY ET JACOBI.

On a souvent besoin de développer $(1-2xz+z^2)^{-\frac{1}{2}}$ en une série ordonnée suivant les puissances ascendantes de z, série dont le terme général peut être représenté par $X_n z^n$: y et z sont deux variables comprises entre -1 et $+1$. Or M. Ivory (dans les *Transactions philosophiques*) et ensuite M. Jacobi ont mis depuis long-temps la valeur de X_n sous cette forme très simple

$$(1) \qquad X_n = \frac{1}{1.2.3\ldots n.2^n} \cdot \frac{d^n.(x^2-1)^n}{dx^n}.$$

C'est dans le journal de M. Crelle (tome II, page 223) que se trouve le mémoire de M. Jacobi ; mais comme cet excellent recueil est malheureusement peu répandu en France, nous pensons faire plaisir à nos lecteurs en transcrivant ici la démonstration de la formule (1).

D'après la formule de Lagrange, en résolvant l'équation..... $y-x=zF(y)$ par rapport à y, on a

$$y = x + zF(x) + \ldots + \frac{z^n}{1.2.3\ldots n} \cdot \frac{d^{n-1}.F(x)^n}{dx^{n-1}} + \ldots,$$

d'où résulte

$$(2) \qquad \frac{dy}{dx} = 1 + z\frac{dF(x)}{dx} + \ldots + \frac{z^n}{1.2.3\ldots n} \cdot \frac{d^n.F(x)^n}{dx^n} + \ldots.$$

Appliquons la formule (2) au cas particulier où $F(y) = \frac{1}{2}(y^2-1)$: l'équation dont y dépend devient alors $y-x=\frac{z}{2}(y^2-1)$, et l'on

en déduit $1 - zy = \sqrt{1 - 2xz + z^2}$, puis $\frac{dy}{dx} = (1 - 2xz + z^2)^{-\frac{1}{2}}$:
en vertu de la formule (2), on a donc

$$(1 - 2xz + z^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{z}{2} \cdot \frac{d.(x^2 - 1)}{dx} + \ldots + \frac{z^n}{1.2.3\ldots n.2^n} \cdot \frac{d^n (x^2-1)^n}{dx^n} + \ldots$$

et par conséquent

$$X_n = \frac{1}{1.2.3\ldots n.2^n} \cdot \frac{d^n.(x^2 - 1)^n}{dx^n},$$

C. Q. F. D.

Au reste, la formule (1) étant donnée, on peut en démontrer l'exactitude de plusieurs manières, et par exemple en faisant usage de la relation connue $nX_n - (2n - 1)xX_{n-1} + (n - 1)X_{n-2} = 0$.

D'après la forme de la fonction X_n, les intégrales .... $\int X_n dx$, $\int dx \int X_n dx, \ldots \int^n X_n dx^n$, dans lesquelles on prend toujours -1 pour limite inférieure et x pour limite supérieure, s'évanouissent toutes si l'on pose après l'intégration $x = 1$. Cela étant, soit y une fonction de x telle que y et ses dérivées ne deviennent pas infinies lorsque x croît depuis -1 jusqu'à $+1$. En intégrant plusieurs fois par parties, on trouve

$$\int_{-1}^{-1} yX_n dx = \frac{1}{1.2.3\ldots n.2^n} \cdot \int_{-1}^{+1} (1 - x^2)^n \cdot \frac{d^n y}{dx^n} \cdot dx$$

équation dont le second membre se réduit à zéro, lorsque y est un polynome entier de degré inférieur à n : si l'on fait en particulier $y = X_m$, m étant $< n$, on tombe sur la formule bien connue $\int_{-1}^{+1} X_m X_n dx = 0$: en posant $y = X_n$, on a au contraire ...... $\int_{-1}^{+1} X_n^2 dx = \frac{2}{2n+1}$.

Sur la sommation d'une série;

PAR J. LIOUVILLE.

En représentant par $X_0 + X_1 z +$ etc. ou par $\Sigma X_n z^n$ le développement de $(1 - 2xz + z^2)^{-\frac{1}{2}}$, on sait que $X_0 = 1$ et qu'en général X_n est une fonction entière de x de degré n : de plus, si m est différent de n, on a les deux formules connues

$$\int_{-1}^{+1} X_m X_n dx = 0, \quad \int_{-1}^{+1} X_n^2 dx = \frac{2}{2n+1}.$$

Soit $\Psi(x)$ une fonction entière de x de degré n : $\Psi(x)$ peut toujours se mettre sous la forme $A_0 X_0 + \ldots + A_{n-1} X_{n-1} + A_n X_n$, $A_0 \ldots A_{n-1}$, A_n étant des constantes : cela est évident lorsque $\Psi(x)$ se réduit à une constante A_0, puisque dans ce cas $\Psi(x) = A_0 X_0$: il suffit donc de prouver que si le théorème énoncé est exact pour les fonctions de degré $(n-1)$, il aura lieu pour celles de degré n : or en prenant A_n tel que les coefficients de x^n soient égaux dans $\Psi(x)$ et dans $A_n X_n$, $\Psi(x) - A_n X_n$ n'étant plus de degré $(n-1)$, devient réductible à la forme $A_{n-1} X_{n-1} + \ldots + A_0 X_0$, d'où résulte $\Psi(x) = A_0 X_0 +$ etc. En particulier, on peut mettre sous la forme citée $A_0 X_0 + \ldots + A_n X_n$ une puissance quelconque x^n.

Maintenant soit proposé de trouver la valeur $F(x)$ de la série

$$(1) \qquad F(x) = \Sigma \left\{ \frac{2n+1}{2} \cdot X_n \cdot \int_{-1}^{+1} f(x) X_n dx \right\},$$

dans laquelle n est successivement $0, 1, 2, 3, \ldots$: la variable x

reste comprise entre -1 et $+1$, et $f(x)$ est une fonction arbitraire de x qui ne devient jamais infinie. Multiplions par $X_n dx$ et intégrons de $x=-1$ à $x=+1$ les deux membres de l'équation (1): cette intégration fera disparaître tous les termes du second membre à l'exc eption d'unseul, et l'on trouvera

$$\int_{-1}^{+1} [F(x) - f(x)] X_n dx = 0 :$$

en multipliant l'intégrale précédente par une constante A_n, il vient

$$\int_{-1}^{+1} [F(x) - f(x)] A_n X_n dx = 0 :$$

n étant quelconque dans cette équation, on en tire sans peine

$$\int_{-1}^{+1} [F(x) - f(x)] (A_0 X_0 + \ldots + A_n X_n) dx = 0,$$

et par conséquent

$$\int_{-1}^{+1} [F(x) - f(x)] x^n dx = 0,$$

d'où par un lemme démontré (page 1 de ce volume), on conclut $F(x) = f(x)$, résultat auquel les géomètres sont arrivés depuis longtemps par d'autres méthodes moins simples ou moins rigoureuses que la nôtre. De plus, si l'on désigne par σ la somme des n premiers termes de la série (1), on peut prouver que la différence $f(x) - \sigma$ change de signe au moins n fois lorsque x croît de -1 à $+1$.

MÉMOIRE

SUR

Une méthode générale d'évaluer le travail dû au frottement, entre les pièces des machines qui se meuvent ensemble, en se pressant mutuellement. — Application aux engrenages cylindriques, coniques, et à la vis sans fin;

PAR M. COMBES.

Lorsque deux corps A et B se meuvent, en se pressant mutuellement par des points de leurs surfaces, le travail résistant développé par le frottement, pendant un temps infiniment petit, est égal à l'intensité du frottement multipliée par l'étendue du glissement des deux surfaces l'une sur l'autre, pendant ce même temps. Or l'étendue du glissement ne sera point changée, si l'on ajoute au mouvement effectif des deux corps A et B, un mouvement commun de translation dans une direction quelconque, un mouvement de rotation commun autour d'un axe donné, ou à la fois un mouvement commun de translation et de rotation. Ce mouvement commun ajouté aux mouvements effectifs des deux corps ne changera point en effet leur mouvement relatif, et ne saurait en conséquence altérer l'étendue du glissement.

Cela posé, si l'on connaît d'avance le mouvement de chacun des corps A et B, comme cela a lieu généralement pour les pièces qui entrent dans la composition des machines, on pourra ajouter au mouvement effectif, un mouvement commun de translation et de rotation, égal et directement opposé à celui du corps A. Celui-ci sera ainsi réduit à l'immobilité. Le mouvement du corps B, résultant de son mou-

vement effectif et du mouvement ajouté, pourra être déterminé, d'après les lois connues de la composition des mouvements de translation et de rotation. Le chemin décrit, pendant un instant infiniment petit, dans ce mouvement composé, par l'élément de la surface de B en contact avec la surface de A, sera aussi déterminé, sans difficulté, dès que le mouvement résultant sera connu : et il est évident que ce chemin sera l'étendue du glissement des deux surfaces l'une sur l'autre, dans le mouvement relatif du corps B par rapport à A considéré comme immobile, et par conséquent aussi l'étendue du glissement, dans le mouvement effectif et simultané des deux corps A et B. C'est par ce chemin qu'il faudra multiplier l'intensité du frottement, pour avoir l'expression du travail résistant élémentaire dû à cette force.

Cette méthode est d'une application facile, générale et sûre, ainsi qu'on pourra le voir par l'application que nous en avons faite au cas de l'engrenage de deux roues d'angle, et d'une vis sans fin avec une roue. Pour l'appliquer, il faut se familiariser avec les lois de la composition des mouvements de rotation. On sait que ces lois sont les mêmes que celles de la composition des forces et des couples de forces, ce qui peut se démontrer par les notions les plus simples de la Géométrie. Voici l'énoncé des théorèmes dont chacun de nos lecteurs pourra facilement trouver la démonstration.

1°. Si un corps est animé de deux mouvements de rotation simultanés, (Pl. I, fig. 1) autour de deux axes AB, AC qui se rencontrent en A, et que des longueurs Aa, Ab respectivement proportionnelles aux vitesses angulaires soient portées sur ces axes, à partir du point A, le mouvement résultant sera un mouvement de rotation autour de l'axe AD, diagonale du parallélogramme construit sur les lignes Aa, Ab, avec une vitesse angulaire proportionnelle à la longueur Ad de cette diagonale.

Les deux axes qui se rencontrent, formant ensemble quatre angles égaux deux à deux, on portera les longueurs Aa et Ab sur les côtés comprenant entre eux un de ces quatre angles, choisi de façon qu'un observateur qui serait placé debout sur le plan des deux axes, et aurait la face tournée vers l'ouverture de cet angle, vît le corps tourner dans le même sens, c'est-à-dire de sa gauche à sa droite, ou de sa droite

à sa gauche, autour de chacun d'eux. La rotation du corps autour de la diagonale, dans le mouvement résultant, sera dans le même sens que la rotation autour de chacun des axes primitifs, c'est-à-dire de la gauche à la droite ou de la droite à la gauche de l'observateur.

2°. Si un corps est animé de deux mouvements (Pl. I, fig. 2) simultanés de rotation autour de deux axes parallèles AB, CD, et si ces mouvements sont dans le même sens, le mouvement résultant est une rotation autour d'un axe EF, parallèle à chacun des deux premiers, situé dans le même plan, et partageant la distance IK qui les sépare, en parties IO et KO inversement proportionnelles aux vitesses angulaires autour des axes AB et CD. La vitesse angulaire autour de l'axe EF, dans le mouvement résultant, est égale à la somme des vitesses angulaires autour des axes primitifs AB, CD.

(Pl. I, fig. 3). Si les deux rotations composantes sont de sens contraire, la rotation résultante a lieu autour d'un axe parallèle à chacun des deux axes donnés, situé dans leur plan et qui coupe la ligne IK sur son prolongement au-delà de l'axe, autour duquel la vitesse angulaire est la plus grande : la vitesse angulaire de la rotation résultante est égale à la différence entre les vitesses angulaires des rotations composantes. Elle est dans le même sens que la plus grande de ces vitesses. Enfin les distances IO et OK sont entre elles dans le rapport inverse des vitesses angulaires composantes autour des axes AB, CD.

3°. Si les deux vitesses angulaires autour de deux axes parallèles sont égales et de sens contraire, elles forment alors *un couple de rotations*. Le mouvement résultant est un mouvement de translation, dans une direction perpendiculaire au plan commun des deux axes, avec une vitesse égale au produit de la vitesse angulaire, autour de chacun des axes donnés, par leur distance. Le sens du mouvement de translation est d'ailleurs donné par le sens des rotations composantes. Ainsi, si l'on se représente le plan des deux axes donnés comme horizontal, le mouvement de translation sera vertical ascendant, ou vertical descendant, suivant que la rotation autour de l'un des axes tendra à élever au-dessus du plan, ou à abaisser au-dessous de lui, les points situés sur le second axe.

4°. Une rotation autour d'un axe peut être remplacée par une rota-

tion égale et de même sens autour d'un axe parallèle, et par un couple de rotations, équivalent à une translation dans une direction perpendiculaire au plan des deux axes. Cela permet de composer ensemble deux rotations autour d'axes non situés dans le même plan, ou plus généralement, de composer un nombre quelconque de rotations autour d'axes qui ne se coupent pas, et de les réduire à une rotation autour d'un axe, et à un couple de rotations équivalent à un mouvement de translation.

Il est avantageux pour l'étude des machines de se rendre ces théorèmes familiers; et comme leur démonstration n'exige pas d'autres connaissances que celles de la Géométrie élémentaire, il serait utile de les répandre dans l'enseignement inférieur, et de les placer à la suite des lois de composition des vitesses, ou mouvements de translation. Nous les avons appliqués au calcul du travail résistant développé par le frottement, entre des pièces qui entrent habituellement dans la composition des machines. On pourra comparer cette méthode à celle suivie par les auteurs qui ont traité le même sujet avant nous. Voir (Mémoire sur les engrenages, par MM. Lamé et Clapeyron; *Annales des Mines*, 1re série, tome IX, p. 601. — Mémoire sur l'évaluation du travail dû aux frottements dans les engrenages coniques, par M. Coriolis; *Journal de l'École Polytechnique*, cahier XXV, page 44).

L'évaluation du frottement dans les engrenages cylindriques se trouve aussi dans les leçons lithographiées de M. Navier pour l'École des Ponts et Chaussées, et de M. Poncelet pour l'École de Metz; j'ai également donné, depuis quatre ans, dans mes leçons à l'École des Mines, le frottement dans les engrenages coniques, mais par une méthode moins simple que celle que j'expose dans ce Mémoire.

Frottement dans les engrenages cylindriques.

(Pl. I, fig. 4). Soient C et O les traces des axes des deux roues d'engrenage sur le plan commun des deux roues :

$CA = R$ et $OA = R'$ les rayons des circonférences primitives :

am, *an* les contours de deux dents appartenant la première à la roue (*c*), la seconde à la roue (*o*); ces dents, dans la position actuelle des roues, se touchent le long de la génératrice dont la trace sur le plan des roues est en *a*.

La forme des dents doit être telle que, dans le mouvement du système, les points situés sur les circonférences primitives qui ont pour rayons CA et OA prennent des vitesses égales.

Il suit de là, que si nous désignons par *u* la vitesse d'un point à la circonférence primitive de l'une et de l'autre roue, la vitesse angulaire de la roue (*c*) autour de son axe sera $\frac{u}{R}$, et la vitesse angulaire de la roue (*o*) autour de son axe sera $\frac{u}{R'}$.

Le mouvement relatif des deux roues ne sera point changé si nous imprimons à chacune d'elles un mouvement de rotation autour d'un axe fixe, qui se composera avec le mouvement de rotation qu'elle possède autour de son axe. Or, si nous imprimons aux deux roues un mouvement de rotation autour de l'axe C, avec une vitesse angulaire égale à $\frac{u}{R}$ dirigée en sens contraire du mouvement de rotation de la roue (*c*) autour de son axe, cette dernière roue sera réduite au repos, et la roue (*o*) sera animée de deux mouvements de rotation, l'un autour de l'axe C avec une vitesse angulaire égale à $\frac{u}{R}$, et l'autre autour de son axe propre avec une vitesse angulaire égale à $\frac{u}{R'}$. Ces deux mouvements sont de même sens et se composent en un seul. L'axe autour duquel a lieu le mouvement résultant est parallèle aux deux axes C et O et sa trace sur le plan des deux roues est en A, au point de contact des deux circonférences primitives; car on a

$$\mathrm{CA} : \mathrm{OA} :: \frac{u}{\mathrm{R'}} : \frac{u}{\mathrm{R}}.$$

La vitesse angulaire autour de cet axe est égale à la somme $\frac{u}{\mathrm{R}} + \frac{u}{\mathrm{R'}}$ des vitesses angulaires composantes. On voit que le mouvement relatif de la roue (o) par rapport à la roue (c) regardée comme immobile, est un roulement de la circonférence (o) sur la circonférence (c), sans glissement, puisque l'axe autour duquel tourne la circonférence (o) est toujours au point de contact des deux circonférences.

Il suit de là que la normale commune en a aux deux contours am et an qui se pressent mutuellement, doit passer, pour une position quelconque du système, par le point de contact A des circonférences primitives.

En effet, lorsque la roue (c) est réduite au repos, sans que le mouvement relatif soit altéré, l'élément a de la dent an appartenant à la roue mobile (o) doit glisser sur le contour de la dent am appartenant à la roue fixe (c). Or cet élément a de la dent an décrit alors un arc de cercle infiniment petit dont le centre est en A, et dont le rayon est Aa. Aa doit donc être la normale commune en a aux contours des deux dents en prise, sans quoi elles cesseraient de se toucher, dans le mouvement relatif, et aussi dans le mouvement effectif du système. Nous pouvons en outre, connaissant la vitesse angulaire de la roue mobile (o) autour de l'axe instantané A, déterminer quelle sera l'étendue du glissement de l'élément a de la dent an sur le contour de la dent immobile am. En effet, dans un instant infiniment petit dt, l'élément a décrit un arc de cercle égal à

$$\left(\frac{u}{\mathrm{R}} + \frac{u}{\mathrm{R}}\right)dt \times \mathrm{A}a = \left(\frac{1}{\mathrm{R}} + \frac{1}{\mathrm{R'}}\right)\mathrm{A}a \times udt.$$

Or si l'on désigne par ds l'arc infiniment petit de la circonférence mobile (o) qui s'applique pendant l'instant dt sur un arc égal de la circonférence fixe (c), nous aurons $udt = ds$: donc l'étendue du glissement des contours de deux dents en prise, l'une sur l'autre, pour un arc infiniment petit ds parcouru par un point de la circonférence primitive de l'une ou de l'autre roue, est égale à $\mathrm{A}a\left(\frac{1}{\mathrm{R}}+\frac{1}{\mathrm{R'}}\right)ds$, expression dans laquelle Aa est le rayon vecteur variable, qui va du point de contact des

circonférences primitives au point de contact des deux dents en prise. Si donc nous désignons par p la pression mutuelle des deux contours am et an, par f le rapport du frottement à la pression, par z le rayon vecteur variable Aa, l'expression du travail résistant élémentaire dû au frottement, pour un arc ds dont chacune des circonférences primitives aura tourné, sera

$$fp\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}\right)zds,$$

et l'intégrale

$$f\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}\right)\int_0^S pzds \qquad (a)$$

exprimera le travail résultant du frottement correspondant à l'arc S dont tourne chacune des circonférences primitives, depuis le moment où deux dents commencent à se pousser dans la ligne des centres, jusqu'à ce qu'elles se quittent.

Supposons que la roue (c) conduise la roue (o), et que la résistance agissant sur la roue (o) soit une force Q agissant tangentiellement à la circonférence primitive. Appelons α l'angle aAT, compris entre la normale commune Aa et la tangente commune AT aux deux circonférences primitives, d la distance Ai du point A au point où la tangente commune en a aux dents en prise coupe la ligne des centres OC; nous aurons, pour déterminer la pression p, l'équation suivante :

$$Q \times R' = pR'\cos\alpha + fp(R'-d)\sin\alpha, \qquad (1)$$

qui exprime que la force Q, la pression p et le frottement fp qui résulte de cette pression, se font équilibre autour de l'axe fixe O. $R'-d$ peut être positif, négatif ou nul. Comme l'angle α demeure toujours très petit, quand les dents des roues sont petites, et comme le rapport f est lui-même une petite fraction, on peut généralement négliger le dernier terme du second membre de l'équation précédente, et poser simplement

$$Q \times R' = pR'\cos\alpha; \quad \text{d'où} \quad p = \frac{Q}{\cos\alpha}.$$

Cette valeur de p portée dans l'expression du travail résistant (a) donne

$$fQ\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}\right)\int_0^S \frac{zds}{\cos\alpha}.$$

Si les contours des dents sont de petites portions d'épicycloïdes engendrées par une circonférence de cercle dont nous désignerons le rayon par r, il est facile de voir que l'on aura

$$z = 2r \sin \alpha \quad \text{et} \quad \alpha = \frac{s}{2r}.$$

Ces valeurs de z et α étant portées dans l'expression précédente, elle devient

$$fQ\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right) 2r \int_0^S \frac{\sin \frac{s}{2r}\, ds}{\cos \frac{s}{2r}} =$$
$$- fQ\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right) \times 4r^2 \log.\cos \frac{S}{2r}.$$

Or, quand S est un petit arc, on peut développer $\log \cos \frac{S}{2r}$ en une série très convergente, et l'on a

$$\log \cos \frac{S}{2r} = - \frac{S^2}{8r^2},$$

en s'en tenant au premier terme de la série, et négligeant la quatrième puissance et les puissances supérieures de $\frac{S}{2r}$.

L'expression du travail résistant dû au frottement devient par la substitution de cette valeur

$$\frac{1}{2} fQ\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right) S^2:$$

l'arc parcouru par la circonférence de la roue (o) correspondant à cette quantité de travail étant égal à S, il s'ensuit que le frottement donne lieu au même travail résistant qu'une force égale à $\frac{1}{2} fQ\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right) S$, qui serait appliquée tangentiellement à la circonférence primitive de la roue (o). La valeur du frottement rapporté à la circonférence de la roue primitive augmente donc proportionnellement à l'arc S correspondant à une dent de chaque roue. Si m est le nombre de dents de la roue (c), et n le nombre des dents de la roue (o), on a

$$2\pi R = mS, \qquad \text{d'où} \qquad \frac{1}{R} = \frac{2\pi}{mS},$$
$$2\pi R' = nS, \qquad\qquad \frac{1}{R'} = \frac{2\pi}{nS},$$

et

$$\frac{1}{2} f Q\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right) S = \pi f Q\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right).$$

Telle est l'expression dont on fait usage ordinairement, pour représenter la force résistante moyenne résultante du frottement, rapportée à la circonférence de la roue conduite. Elle est généralement trop petite : mais elle approche d'autant plus d'être exacte que les dents sont plus petites.

Dans le cas où les contours des dents seraient engendrés, par un cercle d'un rayon infini, roulant sur l'une et l'autre circonférence, c'est-à-dire où ils deviendraient des développantes de cercle, le point de contact serait constamment situé sur la tangente commune aux deux circonférences primitives. On aurait $\alpha = 0$ et $z = s$: l'expression

$$f Q\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right) \int_0^S \frac{z ds}{\cos \alpha}$$

deviendrait

$$f Q\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right) \int_0^S s ds = \frac{1}{2} f Q\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right) S^2,$$

c'est-à-dire que la valeur donnée précédemment, pour la force résistante équivalente au frottement, serait rigoureusement exacte, dans ce cas, si nous n'avions pas négligé d'abord le second terme du deuxième membre de l'équation (1).

Il est aisé de voir que, dans le cas dont il s'agit, la valeur exacte de la pression p est

$$p = \frac{QR'}{R' - fs}.$$

L'expression de la force équivalente au frottement est donc encore, pour ce cas, un peu trop faible.

Engrenage d'une roue et d'une lanterne.

(Pl. I, fig. 5). Soit O l'axe de la lanterne, c le centre, ou la trace de l'axe de l'un des fuseaux dont nous représenterons le rayon par r, am le contour de la dent qui presse le fuseau. L'élément par lequel se toucheront la dent et le fuseau, doit être normal au rayon vecteur Ac, mené du point A au centre c du fuseau; ainsi cet élément est situé en a. Conservant d'ailleurs les mêmes notations que dans l'article précédent, voyons ce que devient l'intégrale $\int \frac{z ds}{\cos \alpha}$.

L'angle α est la moitié de l'angle AOc; la corde.......... $Ac = z + r = 2 \sin \frac{1}{2} AOc \times R'$: on a donc

$$z + r = 2R' \sin \alpha. \qquad (1)$$

Si un arc infiniment petit ds de la circonférence (O) s'applique sur un arc égal de la circonférence (C), le centre c de la lanterne viendra en c', cc' étant l'arc infiniment petit ds, la corde Ac deviendra Ac', et si l'on prolonge l'élément cc' suivant la tangente cb, il est évident que l'on aura $dz = Ac' - Ac = ds \cos Acb = ds \cos \alpha$.

D'où

$$ds = \frac{dz}{\cos \alpha}.$$

On a donc $\int \frac{z ds}{\cos \alpha} = \int \frac{z dz}{\cos^2 \alpha}$; et en substituant à $\cos^2 \alpha$ sa valeur $\frac{4R'^2 - (z + r)^2}{4R'^2}$, tirée de l'équation (1), il vient,

$$\int \frac{z ds}{\cos \alpha} = 4R'^2 \int_0^Z \frac{z dz}{4R'^2 - (z + r)^2}.$$

La valeur de cette intégrale est

$$2R'^2 \left[\log . \frac{4R'^2 - r^2}{4R'^2 - (Z + r)^2} - \frac{r}{R'} \log . \frac{2R' + r + Z}{2R' - r - Z} \times \frac{2R' - r}{2R' + r} \right].$$

Il est permis de négliger le second terme écrit dans la parenthèse, d'une part parce que sa valeur est très petite, quand Z est lui-même petit par rapport à $2R' - r$, et ensuite parce que l'omission de ce terme donnera pour le frottement une valeur un peu trop grande.

L'expression précédente devient alors

$$2R'^2 \log . \frac{4R'^2 - r^2}{4R'^2 - (Z + r)^2}.$$

Pour qu'elle coïncide avec celle obtenue dans le cas des engrenages épicycloïdaux, il faut, en prenant pour la valeur du logarithme, le premier terme de son développement en série, qui est

$$\frac{Z(2r + Z)}{4R'^2 - (r + Z)^2},$$

négliger au dénominateur $(r + Z)^2$ par rapport à $4R'^2$ et poser au numérateur

$$Z(2r + Z) = S^2.$$

On commet ainsi deux erreurs, généralement dans le même sens, qui diminuent l'expression du frottement.

Et l'on a

$$2R'^2 \log \frac{4R'^2 - r^2}{4R'^2 - (Z + r)^2} = \frac{1}{2} S^2.$$

Je ne m'arrêterai pas à discuter l'engrenage d'une roue et d'une crémaillère, qui est un cas particulier de l'engrenage de deux roues planes; je passe à l'engrenage de deux roues non situées dans le même plan, mais dont les axes se rencontrent.

Engrenage de deux roues d'angle.

(Pl. I, fig. 6). Soient MC et MO les deux axes qui se coupent en M: u la vitesse que prennent dans le mouvement du système, les points situés à la circonférence de l'une et de l'autre roue, R, R' les rayons CA et OA des circonférences primitives :

γ l'angle compris entre les plans des deux roues; cet angle γ peut varier de o à 180°; il est nul quand les deux roues sont intérieures

l'une à l'autre; il est de 180°, lorsqu'elles sont placées extérieurement l'une à l'autre dans un même plan.

$\frac{u}{R}$, $\frac{u}{R'}$, seront les vitesses angulaires des deux roues autour de leurs axes respectifs.

Si l'on imprime aux deux roues un mouvement de rotation, autour de l'axe MC, avec une vitesse angulaire égale à $\frac{u}{R}$, et en sens contraire du mouvement de la roue (c), celle-ci sera réduite au repos. Le mouvement de la seconde roue sera le mouvement résultant de sa rotation autour de son axe MO et de la rotation autour de MC; portons sur les axes MC et MO deux longueurs Ma et Mb, respectivement proportionnelles aux vitesses angulaires $\frac{u}{R}$, $\frac{u}{R'}$. La diagonale du parallélogramme Maib, construit sur ces lignes, sera suivant l'axe autour duquel aura lieu le mouvement de rotation résultant, et la grandeur de cette diagonale sera égale à la vitesse angulaire dans ce mouvement; or il est clair que la diagonale sera suivant la génératrice MA, le long de laquelle se touchent les deux surfaces coniques, ayant leur sommet commun en M et pour bases les circonférences primitives; en effet les sinus des angles compris entre la diagonale, et les côtés Ma, Mb doivent être entre eux dans le rapport inverse de ces mêmes côtés, c'est-à-dire dans le rapport de $\frac{u}{R'}$ à $\frac{u}{R}$, ou de R à R': or on a $\sin \text{AMC} = \frac{R}{\text{MA}}$, $\sin \text{AMO} = \frac{R'}{\text{MA}}$: ces sinus étant entre eux comme R est à R', il en résulte que la diagonale du parallélogramme, où l'axe du mouvement de rotation résultant, est suivant MA. La vitesse angulaire autour de cet axe est égale à la longueur Mi de la diagonale, c'est-à-dire à

$$\begin{aligned}
&\sqrt{\overline{\text{M}a}^2 + \overline{\text{M}b}^2 - 2\text{M}a \times \text{M}b \cos ia\text{M}} \\
&= \sqrt{\frac{u^2}{R^2} + \frac{u^2}{R'^2} - \frac{2u^2}{RR'}\cos\gamma} \\
&= u\sqrt{\frac{1}{R^2} + \frac{1}{R'^2} - \frac{2\cos\gamma}{RR'}}.
\end{aligned}$$

On voit donc que le mouvement relatif de la roue (o) par rapport à la roue (c), est le même que si le cône ayant son sommet en M et

pour base la circonférence OA, roulait, sans glisser, sur le cône ayant même sommet et pour base la circonférence CA.

Il suit de là que si *am* et *an* sont les contours de deux dents en prise (ces dents sont ici des portions de surfaces coniques attachées aux deux roues, et ayant leur sommet en M, lesquelles se touchent le long d'une génératrice; *am* et *an*, représentent dans la figure, les directrices de ces surfaces), la normale commune au point de contact aux deux contours, devra être perpendiculaire à la génératrice MA par laquelle se touchent les cônes ayant pour bases les cercles primitifs des deux roues. Appelant z la longueur de la perpendiculaire abaissée du point a, pris au milieu de la longueur de l'élément de contact, sur MA, l'étendue du glissement de la dent *an* sur la dent *am* sera, pendant un instant dt, égale à

$$u\sqrt{\frac{1}{R^2}+\frac{1}{R'^2}-\frac{2\cos\gamma}{RR'}}\times zdt:$$

si ds est l'arc infiniment petit de la circonférence (o), qui s'applique pendant l'instant dt sur un arc égal de la circonférence (c), l'étendue du glissement correspondant à l'arc ds, dont chacune des circonférences a tourné dans le mouvement effectif du système, sera exprimée par

$$\sqrt{\frac{1}{R^2}+\frac{1}{R'^2}-\frac{2\cos\gamma}{RR'}}\,zds;$$

p désignant la pression mutuelle des dents en prise l'une sur l'autre,

$$fp\sqrt{\frac{1}{R^2}+\frac{1}{R'^2}-\frac{2\cos\gamma}{RR'}}\,zds$$

sera le travail résistant élémentaire développé par le frottement, et l'intégrale

$$f\sqrt{\frac{1}{R^2}+\frac{1}{R'^2}-\frac{2\cos\gamma}{RR'}}\int_0^S pzds,$$

sera le travail résistant pour l'arc S parcouru par un point de la circonférence de l'une ou de l'autre roue, depuis le moment où deux dents commencent à se pousser dans le plan des axes des roues, jusqu'à ce qu'elles se quittent.

Soit (Pl. I, fig. 6 *bis*), le point de contact des deux dents, dans le plan moyen de la roue conduite (o). Mo représentant l'axe de cette roue, et MA la génératrice de contact des cônes primitifs, z est la perpendiculaire am abaissée du point a sur MA. Or, quand les dents sont petites, cette ligne am ou z se confond sensiblement avec la ligne Aa, menée du point a au point de contact des circonférences primitives, et contenue dans le plan moyen de la roue (o). En effet, si nous menons la ligne ak, dans le plan de la roue, perpendiculaire au rayon Ao, et si nous joignons les points m et k, la ligne mk sera une perpendiculaire commune aux lignes MA et ak. Appelant α l'angle compris entre la ligne Aa, et la tangente commune AT aux deux circonférences primitives, et δ le demi-angle au centre du cône AMo, nous aurons les relations

$$\begin{gathered}\overline{am}^2 = z^2 = \overline{ak}^2 + \overline{mk}^2,\\ mk = Ak\cos\delta = Aa\sin\alpha\cos\delta,\\ ak = Aa\cos\alpha,\end{gathered}$$

d'où

$$z^2 = \overline{Aa}^2(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha\cos^2\delta),$$

et

$$\cos aAm = \frac{am}{Aa} = \sqrt{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha\cos^2\delta}:$$

dans l'engrenage cylindrique, l'angle $\delta = 0$, $\cos\delta = 1$; et l'on a $z = Aa$, $\cos Aam = 1$; les deux lignes aA et am se confondent.

Dans l'engrenage conique, si les dents sont petites, l'angle α demeurera toujours très petit. Son sinus sera presque nul et son cosinus égal à 1, de sorte que les lignes am et aA seront encore très près de se confondre, et pourront être prises, sans erreur sensible, l'une pour l'autre.

Si nous appelons Q la résistance agissant tangentiellement à la roue conduite (o), la valeur approchée de p, dans l'hypothèse que z se confond avec Aa, sera, comme pour l'engrenage cylindrique, $p = \frac{Q}{\cos\alpha}$, et l'expression du frottement sera

$$fQ\sqrt{\frac{1}{R^2} + \frac{1}{R'^2} - \frac{2\cos\gamma}{RR'}}\int_0^S \frac{zds}{\cos\alpha}.$$

Cette expression coïncide avec celle obtenue pour l'engrenage plan de deux roues extérieures l'une à l'autre, lorsque l'on y pose $\gamma = 180^\circ$ et $\cos\gamma = -1$.

Dans le cas où les deux roues sont intérieures l'une à l'autre, on a $\gamma = 0$, $\cos\gamma = 1$, et l'expression précédente devient

$$fQ\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R'}\right)\int_0^S \frac{zds}{\cos\alpha}.$$

Lorsque les directrices *am* et *an* des portions de surfaces coniques, formant les contours des dents, sont des courbes engendrées par une circonférence de cercle située dans le plan de la roue (*o*), ce qui donne pour la courbe *an* une épicycloïde plane et pour la courbe *am* une épicycloïde sphérique, on trouvera pour la valeur moyenne du frottement, considéré comme une force appliquée à la circonférence primitive de la roue conduite,

$$\frac{1}{2} fQ\sqrt{\frac{1}{R^2} + \frac{1}{R'^2} - \frac{2\cos\gamma}{RR'}} \times S:$$

m et n étant les nombres de dents des deux roues, on a

$$\frac{1}{R} = \frac{2\pi}{mS}, \quad \frac{1}{R'} = \frac{2\pi}{nS},$$

et l'expression précédente devient

$$\pi fQ\sqrt{\frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2} - \frac{2\cos\gamma}{mn}}.$$

Pour $\gamma = 180^\circ$, $\cos\gamma = -1$, la résistance du frottement est la plus grande. C'est le cas de l'engrenage de deux roues situées extérieurement dans le même plan.

Pour $\gamma = 0$, $\cos\gamma = 1$, la résistance du frottement est la plus petite. Elle est exprimée par

$$\pi fQ\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right):$$

c'est le cas où les deux roues sont dans le même plan, et situées intérieurement l'une à l'autre.

Frottement dans la vis sans fin.

(Pl. I, fig. 7 et 7 bis). Soient O l'axe de la vis sans fin, que nous supposerons vertical :

C l'axe horizontal de la roue :

CA $=$ R le rayon de la circonférence primitive de la roue (le point de contact du filet de la vis et de la dent pressée par ce filet, est toujours situé sur un point de la tangente AT à cette circonférence, parallèle à l'axe de la vis).

OA $= r$ le rayon du cylindre sur lequel est enveloppée l'hélice ou l'élément hélicoïdal, qui presse les dents de la roue : i l'inclinaison constante de cette hélice sur le plan horizontal.

Le filet serpente sur le noyau de la vis et s'élève en tournant dans le sens xy. Lorsque la vis entière tourne sur son axe dans ce même sens, le filet de la vis presse successivement les dents de la roue de haut en bas et fait tourner celle-ci dans le sens yz. La condition de ce mouvement est que la vitesse d'un point de la circonférence CA, soit à la vitesse d'un point du filet situé sur la circonférence OA comme le pas de la vis est à la circonférence qui a pour rayon OA. Ainsi en désignant par u la vitesse d'un point de la circonférence OA tournant autour de l'axe vertical MO, u tang i sera la vitesse d'un point de la circonférence CA, tournant autour de l'axe C. Les vitesses angulaires de la vis et de la roue, autour de leurs axes, seront donc respectivement égales à $\frac{u}{r}$ et $\frac{u \tang i}{\mathrm{R}}$.

Au mouvement de rotation de la roue autour de l'axe C, nous pouvons substituer un mouvement de rotation autour d'un axe parallèle OY passant par le point O, de même sens et avec même vitesse angulaire, et un couple de rotations équivalent à un mouvement de translation dans le sens vertical, qui sera ici de haut en bas, avec une vitesse égale au produit de la distance CO par la vitesse angulaire $\frac{u \tang i}{\mathrm{R}}$, c'est-à-dire à $(\mathrm{R} + r) \frac{u \tang i}{\mathrm{R}}$.

Si maintenant nous réduisons la vis au repos, en superposant aux mouvements effectifs un mouvement commun de rotation autour de l'axe vertical de la vis, avec une vitesse angulaire égale et

de sens contraire à celle $\frac{u}{r}$ que la vis possède, le mouvement de la roue se composera :

1°. Du mouvement de translation de haut en bas, avec une vitesse égale à $(R+r)\frac{u \tang i}{R}$;

2°. D'un mouvement de rotation autour de l'axe horizontal OY avec une vitesse angulaire $\frac{u \tang i}{R}$, et dans lequel le corps tournera de l'axe OZ vers l'axe OX ;

3°. D'un mouvement de rotation autour de l'axe vertical OZ avec une vitesse angulaire égale à $\frac{u}{r}$, dans lequel le corps tournera en sens contraire du mouvement effectif de la vis, c'est-à-dire de OY vers OX.

Cela posé, soit a, dans la projection verticale, la situation actuelle du point de contact du filet de la vis et d'une dent de la roue. Ce point est sur la verticale AT et se projette horizontalement en A. Menons la ligne aO, la ligne mn perpendiculaire à aO, contenue dans le plan, passant par l'axe de la vis et perpendiculaire à l'axe de la roue, enfin la tangente AU, projection de la tangente en a à la circonférence que décrirait le point a s'il tournait autour de l'axe MOZ. Posons $a\mathrm{O} = z$, l'angle $a\mathrm{OA} = \alpha$.

La vitesse du point a due à la rotation autour de l'axe oY est dirigée suivant am, et égale à

$$a\mathrm{O} \times \frac{u \tang i}{R} = \frac{u \tang i}{R} \times z.$$

Elle a pour composante horizontale suivant ao'

$$\frac{u \tang i}{R} z \sin \alpha,$$

pour composante verticale dirigée de bas en haut, suivant aT

$$\frac{u \tang i}{R} z \cos \alpha.$$

La vitesse du point a due à la rotation autour de l'axe vertical OZ est

égale à $\frac{u}{r} \times ao' = u$. Sa projection horizontale est suivant la tangente AU.

La vitesse verticale du point a de haut en bas due au mouvement de translation est $(\mathrm{R}+r)\,\frac{u\,\mathrm{tang}\,i}{\mathrm{R}}$. Ainsi, les composantes parallèles aux trois axes OX, OY et OZ de la vitesse du point a sont :

Suivant	OX.......	$u\,\frac{\mathrm{tang}\,i}{\mathrm{R}}\,z\sin\alpha$,
Suivant	OY.......	u
Suivant	OZ.......	$\frac{u}{\mathrm{R}}\,\mathrm{tang}\,i\,(\mathrm{R}+r-z\cos\alpha)$.

Cette dernière composante est dirigée de haut en bas. La vitesse du point a, dans le mouvement relatif du filet de la vis et de la dent de la roue, est donc

$$u\sqrt{1+\frac{\mathrm{tang}^2 i}{\mathrm{R}^2}[(\mathrm{R}+r)^2+z^2-2(\mathrm{R}+r)z\cos\alpha]}.$$

Si ds désigne l'arc infiniment petit que décrit, dans le mouvement effectif du système, pendant un instant dt, un point de la circonférence qui a pour rayon CA, on aura $ds = u\,\mathrm{tang}\,i\,dt$ et

$$udt\sqrt{1+\frac{\mathrm{tang}^2 i}{\mathrm{R}^2}[(\mathrm{R}+r)^2+z^2-2(\mathrm{R}+r)z\cos\alpha]}$$
$$=\frac{1}{\mathrm{tang}\,i}\sqrt{1+\frac{\mathrm{tang}^2 i}{\mathrm{R}^2}[(\mathrm{R}+r)^2+z^2-2(\mathrm{R}+r)z\cos\alpha)]}\,ds$$

sera l'étendue du glissement du point a de la roue sur le filet de la vis correspondant à l'arc infiniment petit ds.

Si nous désignons par p la pression mutuelle du filet de la vis et de la dent de la roue,

$$\int_0^{\mathrm{S}}\frac{fp}{\mathrm{tang}\,i}\sqrt{1+\frac{\mathrm{tang}^2 i}{\mathrm{R}^2}[(\mathrm{R}+r)^2+z^2-2(\mathrm{R}+r)z\cos\alpha]}\,ds$$

sera l'expression du travail résistant dû au frottement, pour l'arc S dont tourne la circonférence CA, depuis le moment où le filet de la vis

vient appuyer sur une dent de la roue, jusqu'à ce qu'il cesse de la presser, ce qui arrive, quand le point de contact mutuel est sur la ligne CO.

Il est d'ailleurs facile de voir que l'on a

$$z \cos \alpha = r, \quad z^2 = r^2 + s^2,$$

on a, pour déterminer p, l'équation

$$QR = p \cos i \times R, \quad \text{d'où} \quad p = \frac{Q}{\cos i},$$

en désignant par Q la résistance appliquée à la roue rapportée à l'extrémité du rayon CA, et négligeant, dans cette relation, l'effet du frottement, ce qui est permis, lorsque i est un petit angle.

Effectuant ces substitutions et les réductions possibles, le travail du frottement devient

$$f \frac{Q}{\cos i} \int_0^S \sqrt{\frac{1}{\sin^2 i} + \frac{s^2}{R^2}}\, ds.$$

On sait intégrer l'expression précédente, mais le résultat se présente sous une forme trop compliquée, pour être de quelque usage dans la pratique. D'ailleurs on peut remarquer que i est en général un petit angle, et que par conséquent $\frac{1}{\sin^2 i}$ est très grand, tandis que $\frac{s^2}{R^2}$, est une petite fraction, quand la roue a un grand nombre de dents, de telle sorte que $\frac{s^2}{R^2}$ est négligeable par rapport à $\frac{1}{\sin^2 i}$. On peut même, d'après un théorème donné par M. Poncelet, déterminer dans chaque cas la limite de l'erreur commise. Supposons par exemple, que $\sin i$ soit égal à $\frac{1}{3}$; supposons en même temps que le nombre des dents de la roue, soit égal à 20. On aura $20S = 2\pi R$; d'où $\frac{S}{R} = \frac{2\pi}{20} = 0.34$: ainsi le rapport de $\frac{S}{R}$ à $\frac{1}{\sin i}$ sera égal à $\frac{0,34}{3} = 0.11$. Comme S est la plus grande valeur de l'arc variable s, le rapport de $\frac{s}{R}$ à $\frac{1}{\sin i}$ sera constamment inférieur à 0.11; or, d'après le théorème cité de M. Poncelet, un radical de la forme $\sqrt{P^2 + Q^2}$ a pour ex-

pression linéaire approchée

$$\frac{2}{1+\cos\frac{\varphi}{2}}\left(\mathrm{P}\cos\frac{\varphi}{2}+\mathrm{Q}\sin\frac{\varphi}{2}\right),$$

φ désignant l'angle dont la tangente est égale à la valeur maximum que puisse avoir le rapport $\frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{P}}$. La limite de l'erreur commise, en substituant l'expression linéaire ci-dessus au radical, est exprimée par le radical multiplié par la fraction $\frac{1-\cos\frac{\varphi}{2}}{1+\cos\frac{\varphi}{2}}$.

Posant donc $\mathrm{P}=\frac{1}{\sin i}$, $\mathrm{Q}=\frac{s}{\mathrm{R}}$, $\tang\varphi=0.11$: il vient pour la valeur de $\sqrt{\frac{1}{\sin^2 i}+\frac{s^2}{\mathrm{R}^2}}$,

$$0{,}999\times\frac{1}{\sin i}+0{,}055\frac{s}{\mathrm{R}},$$

et cette valeur est approchée à $\frac{7}{10000}$ près. Substituant au radical la valeur approchée sous le signe $\int$, le travail résistant du frottement sera

$$\frac{f\mathrm{Q}}{\cos i}\left(\frac{0.999\,\mathrm{S}}{\sin i}+0.055\,\frac{\mathrm{S}^2}{2\mathrm{R}}\right);$$

la valeur moyenne de la force équivalente au frottement, rapportée à la circonférence primitive de la roue, sera donc

$$\frac{f\mathrm{Q}}{\cos i}\left(\frac{0.999}{\sin i}+0{,}055\,\frac{\mathrm{S}}{2\mathrm{R}}\right).$$

Si m désigne le nombre des dents de la roue, $\frac{\mathrm{S}}{2\mathrm{R}}=\frac{\pi}{m}$, et cette expression devient

$$\frac{f\mathrm{Q}}{\cos}\left(\frac{0.999}{\sin i}+0.055\,\frac{\pi}{m}\right).$$

Si $m=20$, on aura $0.055\,\frac{\pi}{m}=0.0086$, tandis que $\frac{0.999}{\sin i}$ se ra

égal à 3, en supposant que $\sin i = \frac{1}{3}$. En négligeant donc $0.055\,\frac{\pi}{m}$ par rapport à $\frac{0.999}{\sin i}$, l'erreur commise sera moins de $\frac{1}{300}$. On voit que, généralement, il sera permis d'adopter pour la valeur moyenne de la force équivalente au frottement, rapportée à la circonférence primitive de la roue,

$$\frac{0{,}999\, fQ}{\sin i \cos i} \quad \text{où simplement} \quad \frac{fQ}{\sin i \cos i} = \frac{2fQ}{\sin 2i}.$$

Lorsque l'inclinaison i de l'élément héliçoïdal, qui presse la dent de la roue est considérable, la valeur $p = \frac{Q}{\cos i}$ n'est pas suffisamment approchée. Il faut alors, dans l'équation d'équilibre de la roue, tenir compte de la force produite par le frottement du filet et de la dent, ce qui donne

$$Q \times R = (p \cos i - fp \sin i)\, R,$$

d'où

$$p = \frac{Q}{\cos i - f \sin i}.$$

Cette valeur de p substituée à $\frac{Q}{\cos i}$, dans les calculs précédents, donnera pour l'expression de la résistance moyenne du frottement rapportée à la circonférence de la roue dont le rayon est R,

$$\frac{fQ}{\cos i - f \sin i}\left(\frac{\alpha}{\sin i} + \frac{T\pi}{m}\right):$$

α et T sont des coefficients numériques que l'on déterminera par le théorème de M. Poncelet.

NOTE

Sur une manière simple de calculer la pression produite contre les parois d'un canal dans lequel se meut un fluide incompressible;

PAR G. CORIOLIS.

Les sections d'un canal ou filet fluide variant assez peu pour qu'on puisse admettre le parallélisme des tranches, c'est-à-dire pour qu'on puisse supposer que les vitesses dans une même section sont parallèles à la tangente à la courbe qu'on prend pour axe, on peut dans cette hypothèse exprimer très simplement la pression totale supportée dans un certain sens par les parois qui forment le canal : il suffit pour cela de connaître seulement les intensités et les directions des vitesses dans les deux sections extrêmes qui terminent la masse fluide.

Si X, Y, Z sont les composantes, dans le sens des trois axes coordonnés, des forces accélératrices auxquelles le fluide est soumis, on sait qu'en désignant par p le poids d'une tranche de fluide (les forces produites contre les parois par cette tranche étant représentées par E, F, G, dans le sens des axes coordonnés) on aura

$$E = \frac{p}{g}\left(X - \frac{d^2x}{dt^2}\right),$$
$$F = \frac{p}{g}\left(Y - \frac{d^2y}{dt^2}\right),$$
$$G = \frac{p}{g}\left(Z - \frac{d^2z}{dt^2}\right).$$

En prenant le poids du mètre cube d'eau pour unité et désignant par ω la section dans le filet faite perpendiculairement à son axe et par

ds la différentielle de la longueur de cet axe, on a

$$p = \omega ds.$$

La somme des pressions produites sur les parois dans le sens de l'axe des x pour toute l'étendue du canal, entre les limites s_0 et s_1 de la longueur de l'axe, étant désignée par E, on aura

$$E = \int_{s_0}^{s_1} X \frac{\omega ds}{g} - \int_{s_0}^{s_1} \frac{\omega ds}{g} \cdot \frac{d^2 x}{dt^2}.$$

Si l'on désigne par u la vitesse de la tranche ωds et par α l'angle que fait l'élément ds de l'axe du canal avec l'axe des x, on a, en vertu de ce que u est une fonction de t et de s,

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{d(u\cos\alpha)}{dt} + u \cdot \frac{d(u\cos\alpha)}{ds}.$$

Ainsi

$$E = \int_{s_0}^{s_1} X \frac{\omega ds}{g} - \int_{s_0}^{s_1} \frac{\omega ds}{g} \frac{d(u\cos\alpha)}{dt} - \int_{s_0}^{s_1} \frac{\omega u ds}{g} \frac{d(u\cos\alpha)}{ds}:$$

$\cos\alpha$ étant indépendant de t, on a

$$\frac{\omega ds}{g} \frac{d(u\cos\alpha)}{dt} = \frac{1}{g} \cdot ds\cos\alpha \cdot \omega \frac{du}{dt} = \frac{1}{g} dx \cdot \omega \frac{du}{dt}.$$

En vertu de l'incompressibilité du fluide, ωu est constant dans l'étendue du canal; en désignant par u_0 et ω_0 les valeurs de ces variables à l'origine du canal, il vient donc

$$\omega u = \omega_0 u_0,$$

et

$$\omega \frac{du}{dt} = \omega_0 \frac{du_0}{dt}.$$

Introduisant ces relations dans les formules ci-dessus pour intégrer dans toute l'étendue du canal et dénotant par les indices 1 et 0 les valeurs des variables pour les deux extrémités du canal, on aura

$$E = \int_{s_0}^{s_1} X \frac{\omega ds}{g} - \frac{\omega_0}{g} \cdot \frac{du_0}{dt} \cdot (x_1 - x_0) - \frac{\omega_0 u_0}{g} [u_1 \cos\alpha_1 - u_0 \cos\alpha_0].$$

Dans les applications, la force X ne sera que la composante de la gravité, de sorte qu'en désignant par P le poids total du fluide entre les extrémités du filet et par a l'angle que fait l'axe des x avec la verticale, on aura

$$E = P\cos a - \frac{\omega_0}{g}(x_1 - n_0)\frac{du_0}{dt} + \frac{\omega_0 u_0}{g}\cos\alpha_0 - \frac{\omega_0 u_0}{g}u_1\cos\alpha_1,$$

Si le mouvement est permanent, c'est-à-dire si les vitesses ne varient pas avec le temps, on aura $\frac{du_0}{dt} = 0$, et E se réduira à

$$E = P\cos a + \frac{\omega_0 u_0^2}{g}\cos\alpha_0 - \frac{\omega_0 u_0}{g}u_1\cos\alpha_1.$$

Ainsi l'effort total E ne dépend nullement de la forme du filet.

Si l'on prend l'axe des x dans un sens perpendiculaire à la vitesse u_1, c'est-à-dire si l'on veut la pression sur les parois dans un sens perpendiculaire à la vitesse de sortie, on aura $\cos\alpha_1 = 0$: il en résultera

$$E = P\cos a + \frac{\omega_0 u_0^2}{g}\cos\alpha_0 - \frac{\omega_0}{g}.\frac{du_0}{dt}.(x_1 - x_0),$$

et pour le cas de permanence

$$E = P\cos a + \frac{\omega_0 u_0^2}{g}\cos\alpha_0.$$

Ces formules ont été données par Euler et reproduites par M. Navier. On compliquait inutilement leur démonstration par l'introduction de la force centrifuge et de la force tangentielle.

On voit qu'il suffit de composer le terme $\frac{d^2x}{dt^2}$ en ses deux dérivées partielles.

Sur la mesure de la surface convexe d'un prisme ou d'un cylindre tronqué;

PAR M. PAUL BRETON,

Élève ingénieur des Ponts-et-Chaussées.

La surface convexe d'un prisme ou d'un cylindre terminé par deux plans non parallèles a pour mesure *le produit de la longueur de la section droite par la parallèle aux arètes qui passe par le centre de gravité du contour de cette section et se termine aux deux bases.*

En effet, soient B_1, B_0 les deux bases, et concevons la surface prolongée jusqu'à la rencontre d'un plan perpendiculaire aux arètes, lequel détermine la section B qui prend le nom de *section droite.*

La surface qui s'étend de B_1 à B se compose de trapèzes dont chacun a pour mesure le produit de celui de ses côtés qui fait partie de B par sa distance au milieu du côté qui lui correspond sur B_1; cette surface a donc pour expression la somme des produits des côtés de B par les parallèles à une même direction menées des milieux de ces côtés à un même plan B_1; et l'on démontre *en Statique* que cette somme de produits est égale au produit du contour de B par la parallèle à la même direction, menée de son centre de gravité au même plan B_1. On ferait voir de la même manière que la surface comprise entre B_0 et B a pour mesure une expression semblable. La différence entre les surfaces que nous venons de mesurer, et qui est la surface proposée elle-même, est donc égale au produit du contour de la section droite par la longueur de la parallèle aux arètes menée de son centre de gravité jusqu'aux deux bases. Ce qui est le théorème énoncé.

REMARQUES.

I. Si les plans des deux bases se coupaient dans l'intérieur du prisme, on n'obtiendrait par la proposition précédente que la différence des

aires interceptées par les angles opposés de ces plans. Il faut pour en avoir la somme appliquer la proposition à chacune des portions séparément, en cherchant le centre de gravité de l'arc de section droite auquel elle correspond.

II. Lorsque la section droite a un centre, toutes les autres sections en ont un aussi, et la parallèle aux arètes menée par le centre de la section droite passe par les centres de gravité des deux bases; dans le cas contraire, on ne peut plus affirmer que la parallèle aux arètes menée du centre de gravité du contour de la section droite aux deux bases soit la distance des centres de gravité de leurs contours. Cela est facile à vérifier en prenant un prisme triangulaire pour exemple.

III. La proposition qui fait le sujet de cet article est l'analogue d'une poposition connue et qui s'énonce ordinairement ainsi :

Le volume d'un prisme ou d'un cylindre à bases planes non-parallèles, a pour mesure le produit de l'aire de l'une d'elles par la distance de celle-ci au centre de gravité de la surface de l'autre.

L'analogie dont il s'agit devient parfaite en énonçant la proposition de la manière suivante :

Le volume d'un prisme ou d'un cylindre terminé par deux plans non-parallèles, a pour mesure le produit de l'aire de la section droite par la parallèle aux arètes qui passe par le centre de gravité de cette section et se termine aux deux bases.

NOTE

Sur le développement de $(1 - 2xz + z^2)^{-\frac{1}{2}}$;

PAR J. LIOUVILLE.

Représentons par $X_0 + X_1 z + \ldots + X_n z^n + \ldots$ le développement du radical $(1 - 2xz + z^2)^{-\frac{1}{2}}$ ordonné suivant les puissances ascendantes de z : X_n sera une fonction entière de x de degré n, et l'on a vu dans le cahier précédent que la valeur de cette fonction est

$$(1) \qquad X_n = \frac{1}{1.2.3\ldots n.2^n} \cdot \frac{d^n.(x^2-1)^n}{dx^n}.$$

A l'aide de la formule (1) on prouve sans peine que, si l'indice m est $< n$, on a

$$(2) \qquad \int_{-1}^{+1} X_m X_n dx = 0.$$

Quand on fait $m = n$, il vient au contraire

$$(3) \qquad \int_{-1}^{+1} X_n^2 dx = \frac{2}{2n+1}.$$

Mais on peut aussi établir les équations (2), (3) sans connaître l'expression analytique de X_n. Pour y parvenir, Legendre considère l'intégrale (*)

$$P = \int_{-1}^{+1} \frac{dx}{\sqrt{1 - 2rxz + r^2z^2}\sqrt{1 - \frac{2xz}{r} + \frac{z^2}{r^2}}}.$$

(*) *Exercices de Calcul intégral*, tome II, page 250.

Si l'on fait $1+r^2z^2-2rxz=y^2$, ou $x=\frac{1+r^2z^2-y^2}{2rz}$, on aura, dit-il, la transformée

$$P=-\frac{1}{z}\int\frac{dy}{\sqrt{y^2-1+r^2+z^2-r^2z^2}},$$

d'où résulte l'intégrale indéfinie

$$P=C+\frac{1}{z}\log\left(-y+\sqrt{y^2-1+r^2+z^2-r^2z^2}\right).$$

Les limites de x étant $x=-1$, $x=+1$, celles de y sont $y=1+rz$, $y=1-rz$: on aura donc l'intégrale cherchée

$$P=\frac{1}{z}\log\left(\frac{r-z-1+rz}{r+z-1-rz}\right)=\frac{1}{z}\log\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$$

ou $$P=2+\frac{2}{3}z^2+\frac{2}{5}z^4+\ldots\ldots+\frac{2}{2n+1}z^{2n}+\ldots.,$$

quantité indépendante de r.

Cette intégrale est celle de la différentielle

$$dx\,(1+X_1zr+X_2z^2r^2+\text{etc.})\left(1+X_1\frac{z}{r}+X_2\frac{z^2}{r^2}+\text{etc.}\right),$$

et puisque r disparaît entièrement du résultat, il faut qu'on ait généralement, m et n étant inégaux, $\int_{-1}^{+1}X_mX_ndx=0$. On voit en même temps que m et n étant égaux, on aura

$$\int_{-1}^{+1}X_n^2dx=\frac{2}{2n+1}, \quad \text{C. Q. F. D.}$$

Maintenant je dis qu'en s'appuyant sur la formule (2), on obtient aisément l'expression générale de X_n, d'où résulte une démonstration nouvelle de la formule (1). Cette démonstration que je vais exposer en peu de mots n'est pas indigne, ce me semble, de l'attention des géomètres.

Pour fixer les idées cherchons par exemple X_3. En faisant $n=3$, puis successivement $m=0$, $m=1$, $m=2$ dans l'équation (2), on a

$$\int_{-1}^{+1}X_0X_3dx=0\quad \int_{-1}^{+1}X_1X_3dx,\quad \int^{+1}X_2X_3dx=0,$$

d'où l'on tire

$$(4) \qquad \int_{-1}^{+1}(A_0X_0 + A_1X_1 + A_2X_2)\,X_3dx = 0\,,$$

quels que soient les coefficients constants A_0, A_1, A_2. Mais un polynome y du second degré par rapport à x peut toujours être mis sous la forme $A_0X_0 + A_1X_1 + A_2X_2$. En effet par une détermination convenable de la constante A_2, rendons égaux les coefficients de x^2 dans y et dans A_2X_2 : dès-lors $y - A_2X_2$ ne sera plus que du premier degré par rapport à x_1 : de même $y - A_2X_2 - A_1X_1$ se réduira à une simple constante A_0X_0 si l'on attribue au coefficient A_1 une valeur convenable. Finalement on aura donc $y = A_0X_0 + A_1X_1 + A_2X_2$, et l'équation (4) deviendra

$$(5) \qquad \int_{-1}^{+1} yX_3dx = 0.$$

En intégrant par parties trois fois de suite et se rappelant que $d^3y = 0$, on trouve

$$\int_{-1}^{x} yX_3dx = y\int_{-1}^{x} X_3dx - \frac{dy}{dx}\int_{-1}^{x} dx\int_{-1}^{x} X_3dx + \frac{d^2y}{dx^2}\int_{-1}^{x} dx\int_{-1}^{x} dx\int_{-1}^{x} X_3dx.$$

Lorsqu'on fait $x = 1$, le résultat de l'intégration doit se réduire à zéro en vertu de l'équation (5), et comme les valeurs de y, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ pour $x = 1$ sont arbitraires, cela exige que l'on ait séparément

$$\int_{-1}^{x} X_3dx = 0, \quad \int_{-1}^{x} dx\int_{-1}^{x} X_3dx = 0, \quad \int_{-1}^{x} dx\int_{-1}^{x} dx\int_{-1}^{x} X_3dx = 0$$

pour $x = 1$. En d'autres termes si l'on pose

$$\int_{-1}^{x} dx\int_{-1}^{x} dx\int_{-1}^{x} X_3dx = \varphi(x)\,,$$

il faut que l'on ait à la fois

$$\varphi(x) = 0, \quad \frac{d\varphi(x)}{dx} = 0, \quad \frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} = 0 \quad \text{pour} \quad x = 1\,:$$

l'équation algébrique $\varphi(x) = 0$ a donc une racine triple égale à 1 et

son premier membre doit être divisible par $(x-1)^3$. D'un autre côté il est évident que l'on a aussi

$$\varphi(x)=0, \quad \frac{d\varphi(x)}{dx}=0, \quad \frac{d^2\varphi(x)}{dx^2}=0 \quad \text{pour} \quad x=-1,$$

en sorte que $\varphi(x)$ est divisible par $(x+1)^3$. Or X_3 étant du troisième degré en x, $\varphi(x)$ est du sixième degré par rapport à cette variable : il résulte de là que $\varphi(x)$ ne peut être que de la forme

$$\varphi(x) \quad \text{ou} \quad \int dx \int_{-1}^{x} dx \int_{-1}^{x} X_3 dx = H_3.(x^2-1)^3,$$

ce qui donne

$$X_3 = H_3.\frac{d^3.(x^2-1)^3}{dx^3},$$

H_3 désignant une constante arbitraire.

En appliquant à la fonction X_n un calcul semblable, on a

$$X_n = H_n.\frac{d^n.(x^2-1)^n}{dx^n}.$$

L'analyse précédente suppose seulement 1°. que X_n soit un polynome entier de degré n, 2°. que l'équation (2) ait lieu pour toutes les valeurs de $m<n$. Il importe peu que les fonctions X_0, X_1,... proviennent du développement de $(1-2xz+z^2)^{-\frac{1}{2}}$. La considération de ce développement ne devient utile que quand on veut déterminer H_n.

En décomposant $(x^2-1)^n$ en ses facteurs $(x+1)^n.(x-1)^n$, il vient par une formule connue

$$X_n = H_n\left[(x+1)^n.\frac{d^n.(x-1)^n}{dx^n} + \frac{n}{1}.\frac{d.(x+1)^n}{dx}.\frac{d^{n-1}(x-1)^n}{dx^{n-1}} + \text{etc.}\right],$$

et, en faisant $x=1$, il reste simplement,

$$X_n = 1.2.3\ldots n.2^n.H_n.$$

Or, pour $x = 1$, le radical $(1 - 2xz + z^2)^{-\frac{1}{2}}$ se réduisant à...... $(1 - z)^{-1}$, c'est-à-dire à $1 + z + z^2 + \ldots$, on a $X_n = 1$: par conséquent

$$H_n = \frac{1}{1.2.3\ldots n.2^n}.$$

La valeur définitive de X_n est donc

$$X_n = \frac{1}{1.2.3\ldots n.2^n}.\frac{d^n.(x^2-1)^n}{dx^n},$$

ce qu'il fallait démontrer.

NOTE

Sur un passage de la seconde partie de la Théorie des Fonctions analytiques;

PAR M. POISSON.

En un point donné M sur une surface aussi donnée, le contact du second ordre avec une autre surface exige que celle-ci satisfasse à six conditions : il faut qu'en ce point, l'ordonnée z, ses deux dérivées z' et $z_{\prime}$ du premier ordre, ses trois dérivées du second ordre z'', $z'_{\prime}$, $z_{\prime\prime}$, soient égales pour les deux surfaces; la quantité z étant considérée comme une fonction des deux autres coordonnées x et y. Or l'équation générale de la sphère ne contenant que quatre constantes, savoir, son rayon et les trois coordonnées de son centre, elles ne suffisent pas pour satisfaire à ces six conditions; en sorte qu'il n'existe pas en chaque point M d'une surface donnée, une *sphère osculatrice*, ou qui ait avec cette surface, un contact du second ordre; au lieu qu'il y a toujours un *cercle osculateur*, pour chaque point d'une courbe, à simple ou à double courbure. Après avoir fait cette remarque dans le chapitre VIII, Lagrange ajoute, dans le chapitre suivant, que si l'on trace une ligne quelconque sur la surface donnée, on pourra toujours déterminer en chaque point, une sphère osculatrice de cette ligne, ou de la surface suivant cette ligne : il entend par là une sphère tangente en M à la surface, et pour laquelle la dérivée seconde de l'ordonnée z soit la même que pour cette surface, mais seulement dans la direction de la ligne donnée. Cette ligne sera déterminée en prenant pour y une fonction de x, dont y' et y'' désigneront les deux premières dérivées; la seconde dérivée de z, qui

devra être égale pour les deux surfaces, aura alors pour expression

$$z'' + 2z'_{,}y' + z_{,,}y'' + z_{,,}y'^{2} + z_{,}y'' ;$$

et de cette égalité, jointe à la condition du plan tangent commun aux deux surfaces qui fournit trois équations, on déduira les valeurs du rayon et des trois coordonnées du centre de la sphère demandée. Dans tout ce chapitre IX, il n'est question que des sphères osculatrices, ainsi définies, et relatives aux différentes courbes que l'on peut tracer sur une même surface; les mots *rayon de courbure* et *centre de courbure*, s'y rapportent à leurs rayons et à leurs centres, et non pas aux rayons et aux centres des cercles osculateurs de ces diverses lignes, qui se détermineraient par d'autres conditions exposées dans le chapitre VII, où l'auteur traite du contact des courbes entre elles.

Cela posé, Lagrange détermine en un point quelconque M d'une surface donnée, les directions suivant lesquelles le rayon de courbure ou de la sphère osculatrice, est un *maximum* ou un *minimum;* il trouve qu'il y en a deux, qui se coupent à angle droit, et dont l'une répond au *maximum* et l'autre au *minimum;* et de là, il conclut que l'on peut tracer sur toute surface donnée, deux séries de lignes, telles que suivant les unes, la courbure de la surface, mesurée par celle de la sphère osculatrice, soit la plus grande en chaque point, et qu'elle soit la plus petite suivant les autres. Il cherche ensuite quelles sont les lignes qui jouissent de cette autre propriété, que les rayons des sphères osculatrices suivant la direction de chacune d'elles, soient tangentes à la ligne des centres de ces sphères; il trouve pour ces lignes, celles-là même qu'il avait d'abord déterminées: *d'où il suit,* dit-il, *que les lignes suivant lesquelles le rayon de courbure sera tangent de la courbe des centres, sont les mêmes que celles de la plus grande ou de la moindre courbure.* D'après le sens que l'auteur attache à ces expressions, et qu'on vient de rappeler, il n'y a rien dans cette conclusion, qui ne soit parfaitement exact: cependant M. Jacobi a pensé qu'elle était erronée (*); mais la méprise de cet illustre géomètre

(*) Voyez le dernier numéro du Journal de M. Crelle.

vient de ce qu'il a supposé à la proposition, dont il s'agit, un sens qu'elle n'a pas et que Lagrange n'a pas voulu lui donner.

Plus loin, Lagrange dit encore : *il n'y aura, sur une surface quelconque, que ces lignes qui puissent avoir* (et qui aient effectivement suivant lui), *une développée formée par les rayons de courbure;* ce que M. Jacobi considère aussi comme une erreur. Mais il ne faut pas perdre de vue qu'il s'agit toujours des rayons des sphères osculatrices, normaux à la surface donnée, et non pas des rayons de courbure, proprement dits, des lignes dont on parle, qui seraient compris dans leurs plans osculateurs. Le mot *développée* est pris ici dans l'acception générale que Monge lui a donnée, et que Lagrange a indiquée à la fin du chapitre VII : dans ce sens, une développée d'une courbe plane ou à double courbure, est le lieu des intersections successives d'un système de normales à cette courbe; chaque ligne donnée a alors une infinité de développées, qui sont toutes situées sur la surface développable, formée par les intersections successives de ses plans normaux; mais ce n'est que dans le cas particulier d'une courbe plane, que ces développées comprennent le lieu des centres des cercles osculateurs, et dans tout autre cas, les rayons de ces cercles ne sont pas tangents à la ligne de leurs centres.

Euler a déterminé le premier, les rayons de courbure des sections normales des surfaces. Il a fait voir que pour chaque point d'une surface proposée, les rayons de courbure de toutes les courbes résultantes de ces sections, sont liés entre eux par des formules qu'il a données, et qui montrent qu'on peut les déduire tous, soit de trois quelconques d'entre eux, soit de deux seulement, quand on prend pour ceux-ci, le plus grand et le plus petit rayon, appartenant à des sections perpendiculaires l'une à l'autre, dont il a déterminé les directions. C'est Meunier qui a montré ensuite comment les rayons de courbure de toutes les sections obliques, faites par une même tangente à la surface, se déduisent très simplement de celui de la section normale. D'un autre côté, Monge a considéré les courbes suivant lesquelles il faut marcher sur une surface donnée, pour que chaque normale à cette surface soit coupée par la normale infiniment voisine; lesquelles courbes, qu'il a nommées *lignes de courbure de la surface*, sont au nombre de deux en chaque point, et se coupent à

angle droit. Par la considération des sphères osculatrices, Lagrange a rapproché ces deux théories différentes, et fait voir qu'en chaque point d'une surface, les sections normales de plus grande et de moindre courbure, qu'Euler a déterminées, sont tangentes aux lignes dont Monge a considéré les principales propriétés, auxquelles M. Ch. Dupin en a ajouté de nouvelles, dans ses *Développements de géométrie.* Il restait à examiner plus complétement qu'on ne l'avait fait auparavant, ce qui arrive aux points particuliers que Monge a nommés des *Ombilics*; et c'est ce que je me suis proposé dans un mémoire sur la courbure des surfaces, qui fait partie du tome VIII du Journal de M. Crelle, et du XXI° cahier du Journal de l'École Polytechnique.

Les lignes de coubures de Monge n'ont pas, en général, leur plan osculateur en chaque point, perpendiculaire à la surface à laquelle elles appartiennent. Pour s'en assurer, il suffit de considérer les surfaces de révolution. Dans ce cas, les deux lignes de courbure sont planes; l'une est la courbe génératrice, et l'autre un cercle : le plan osculateur de la première est normal à la surface; mais évidemment, celui du cercle ne l'est pas. C'est la ligne la plus courte d'un point à un autre sur une surface donnée, qui jouit, comme on sait, de la propriété d'avoir, en tous ses points, son plan osculateur normal à cette surface; et comme le dit très bien M. Jacobi, une même courbe ne peut être, à la fois, une ligne de courbure et la ligne la plus courte entre deux points donnés, à moins qu'elle ne soit une courbe plane. Par inadvertance, j'ai énoncé, dans mon *Traité de Mécanique* (*), cette proposition fausse, que si les deux points donnés se trouvent sur une même ligne de courbure, cette ligne sera la plus courte; mais j'ai eu soin, dans mes cours, d'avertir de cette erreur qui m'est échappée.

L'équation générale de la surface d'un ellipsoïde contient neuf coefficients constants; si donc on donne un point M sur une surface aussi donnée, on pourra toujours déterminer une infinité d'ellipsoïdes qui aient en ce point, un contact du second ordre, avec cette surface : trois des neuf coefficients resteront indéterminés; mais ils ne

(*) Tome II, page 300.

suffiront pas pour élever ce contact au quatrième ordre, c'est-à-dire, pour satisfaire aux quatre conditions que le quatrième ordre exige de plus que le troisième. Au point M, le plan tangent, les plans des sections normales de plus grande et de plus petite courbure, et les rayons de courbure de ces deux sections, seront communs aux deux surfaces. Si ce point est aussi donné sur l'ellipsoïde, que ce soit, par exemple, un de ses sommets; on pourra réduire à

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

l'équation d'un ellipsoïde osculateur, en plaçant l'origine des coordonnées à son centre; prenant pour axe des z, la normale en M à la surface donnée, et les plans de ses sections de plus grande et de moindre courbure, pour ceux des x et z, et des y et z; et désignant par a, b, c, les trois demi-axes de cet ellipsoïde, dont les deux premiers sont parallèles au plan tangent en M, et le troisième lui est perpendiculaire. Ses deux rayons de courbure principaux au point M, auront pour valeur $\frac{a^2}{c}$ et $\frac{b^2}{c}$; en désignant par α et $\mathcal{C}$ ceux de la surface donnée en ce même point, on aura donc

$$a^2=\alpha c,\quad b^2=\mathcal{C}c;$$

ce qui fera connaître deux des trois demi-axes a, b, c, et laissera le troisième indéterminé. Par conséquent, en un même point M, une surface donnée a encore un nombre infini d'ellipsoïdes osculateurs, dont l'un des sommets est au point de contact; et cela aura également lieu, lorsque la surface donnée sera elle-même un ellipsoïde, qui aura aussi le point M pour un de ses sommets.

Aux deux équations précédentes, on en pourra joindre une troisième qui achèvera la détermination des trois quantités a, b, c. On pourra, par exemple, supposer qu'on ait $c=b$; d'où il résultera $b=\mathcal{C}$ et $a=\sqrt{\alpha\mathcal{C}}$. L'ellipsoïde osculateur sera alors une surface de révolution dont l'axe de figure se trouvera parallèle au plan tangent en M : il ne pourrait être parallèle à la normale ou perpendiculaire à ce plan, à moins qu'on n'eût $\alpha=\mathcal{C}$. Si l'on fait successivement $c=a$ et $c=b$, il en résultera deux ellipsoïdes osculateurs,

de révolution, mais différents l'un de l'autre; et l'un sera aplati, tandis que l'autre sera allongé (*). On pourra aussi changer l'ellipsoïde osculateur en paraboloïde. Pour cela, si l'on transporte l'origine des coordonnées au point M, et qu'on mette, en conséquence, $z-c$ au lieu de z, dans l'équation de l'ellipsoïde, on aura

$$z^2 - 2cz + c\left(\frac{x^2}{\alpha} + \frac{y^2}{\beta}\right) = 0,$$

en y substituant aussi pour a^2 et b^2 leurs valeurs; en la résolvant par rapport à z, on en déduit

$$z = c \pm c\sqrt{1 - \frac{1}{c}\left(\frac{x^2}{\alpha} + \frac{y^2}{\beta}\right)};$$

et si l'on prend le radical avec le signe inférieur, qu'on le développe suivant les puissances descendantes de c, et qu'on fasse ensuite $c=\infty$, il vient

$$z = \frac{x^2}{\alpha} + \frac{y^2}{\beta},$$

pour l'équation du paraboloïde osculateur. Mais, parmi toutes les conditions que l'on peut ajouter à celles du conctact du second ordre, l'équation nécessaire pour un contact du troisième ordre suivant une direction déterminée, ne se trouve pas comprise; car, dans tous les sens autour du point M, la fonction tierce de z, qui répond à $x=0$ et $y=0$, est zéro pour l'ellipsoïde osculateur, et, en général, elle ne l'est pour la surface donnée, que selon une ou trois directions déterminées par une équation du troisième degré, que l'on formera sans difficulté. Cela établit une différence essentielle entre la sphère tan-

---

(*) Peut-être devrait-on, dans la géodésie, prendre pour l'ellipsoïde osculatrice en chaque point de la Terre, un ellipsoïde de révolution aplati; ce serait celui qui ressemblerait le plus en général, à la figure du globe, et qui la ferait le mieux connaître, si l'on déterminait par l'observation, en un grand nombre de lieux, les deux axes de cet ellipsoïde, et la direction de son équateur: ces données de l'observation, jointes aux longitudes et aux latitudes, aux longueurs du pendule à seconde et aux élévations au-dessus du niveau des mers, formeraient les éléments complets de la Géographie mathématique.

gente et l'ellipsoïde osculateur : la sphère peut toujours être rendue osculatrice, suivant une direction choisie à volonté ; et le contact de l'ellipsoïde ne saurait être élevé à l'ordre supérieur, suivant aucune direction pour laquelle il n'est pas naturellement du troisième ordre.

Note du rédacteur.

La note de M. Jacobi, imprimée dans le *Journal de M. Crelle*, a pour titre : *Nota de erroribus quibusdam geometricis, qui in Theoriâ functionum leguntur.* Pour la commodité de nos lecteurs, nous la transcrirons ici tout entière.

« Demonstravi in aliâ commentatione, præter curvas planas extare nullas, » quarum radii osculi curvam centrorum curvaturæ tangent, sive superficiem » evolubilem forment. Secùs putabat ill. *Lagrange*, qui in Theoriâ functionum » (*pag.*, 229, *etc.*, *N°* 35) conditionem analyticam exhibet, quæ ad hoc locum » haberi debeat, neque videt ter eam integratam in planí æquationem abire. » Sed vir illustris mox adeò ipsas lineas dupliciter curvas assignat, quæ illâ proprietate gaudeant, scilicet lineas curvaturæ in datâ superficie : legimus enim, » (*pag.* 248) :

» *D'où il suit que les lignes, suivant lesquelles le rayon de courbure sera tangent de la courbe des centres, sont les mêmes que celles de la plus grande ou* » *de la moindre courbure ;*

» et mox, (*pag.* 245) :

» *Il n'y aura sur une surface quelconque que ces lignes (les lignes de courbure)* » *qui puissent avoir une développée formée par les rayons de courbure.*

» Scilicet nescio quo factum est, ut vir illustris normales superficiei putaverit » esse linearum curvaturæ radios osculi. Sanè normales ad superficiem, in punctis « lineæ curvaturæ ductæ, formant superficiem evolubilem, sed eæ non sunt lineæ » curvaturæ radii osculi. Novimus enim radios osculi curvæ, in superficie datâ » descriptæ, simul superficiei normales non nisi in lineis superficiei brevissimis esse.

» Sequitur ex antecedentibus, *in datâ superficie lineam curvaturæ simul lineam brevissimam esse non posse, nisi sit curva plana.* Nam normales ad superficiem in punctis lineæ curvaturæ ductæ formant superficiem evolubilem, » ideòque, cùm in lineis brevissimis normales superficiei sint curvæ radii osculi, » radii osculi lineæ curvaturæ, quæ simul linea brevissima est, superficiem evolubilem formant; undè sequitur curvam esse planam. Nam in aliâ commentatione hujus diarii, t. XIV (*zur Theorie der Curven*), sicuti suprà adnotavi, demonstratum est, radios osculi formare superficiem evolubilem non nisi in curvis » planis. Exemplum habemus in meridianis superficierum rotundarum, quæ » sunt curvæ planæ, simulque et lineæ brevissimæ et lineæ curvaturæ. »

MÉMOIRE

Sur les surfaces isothermes dans les corps solides homogènes en équilibre de température ;

PAR M. G. LAMÉ,

Ingénieur des Mines, Professeur de Physique à l'École Polytechnique (*).

PRMIÈRE PARTIE.

§ I.

Lorsqu'un corps solide homogène est en équilibre de température, sous l'influence de sources constantes de chaleur et de froid, contre lesquelles sa surface est immédiatement appliquée, la température (V), constante avec le temps, mais variable d'un point à l'autre de ce corps, est, comme l'on sait, une fonction des coordonnées x, y, z, qui satisfait à l'équation aux différences partielles

$$(1) \qquad \frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{dz^2} = 0.$$

Il existe alors dans ce corps des surfaces où la température reste la même dans toute l'étendue de chacune d'elles. Ces surfaces d'égale température peuvent être conçues représentées par une même équa-

(*) Ce Mémoire est extrait du tome V des *Savans étrangers*. Nous avons cru devoir le réimprimer ici, parce que le recueil dans lequel il se trouve est peu répandu et surtout parce que l'analyse ingénieuse dont l'auteur a fait usage ouvre une route nouvelle dans le calcul des équations différentielles partielles.

(J. LIOUVILLE.)

tion, contenant un paramètre variable de l'une à l'autre, et de la forme

$$F(x, y, z) = \lambda;$$

λ étant ce paramètre, ou la fonction des coordonnées dont la valeur numérique est constamment la même pour tous les points d'une surface individuelle.

Toute fonction F n'est pas propre à représenter des surfaces d'égale température pour un de tous les cas d'équilibre calorifique imaginables; elle doit satisfaire pour cela à une équation aux différences partielles qu'il est facile de trouver.

Si cette fonction (F ou λ) était connue, la température V devrait pouvoir être représentée par une équation de la forme

$$V = \varphi(\lambda),$$

puisque V et λ seraient constants ensemble, variables ensemble, dans toute l'étendue du corps proposé. On aurait d'après cela

$$\begin{aligned}
\frac{dV}{dx} &= \frac{dV}{d\lambda}\frac{d\lambda}{dx}, & \frac{d^2V}{dx^2} &= \frac{d^2V}{d\lambda^2}\left(\frac{d\lambda}{dx}\right)^2 + \frac{dV}{d\lambda}\frac{d^2\lambda}{dx^2},\\
\frac{dV}{dy} &= \frac{dV}{d\lambda}\frac{d\lambda}{dy}, & \frac{d^2V}{dy^2} &= \frac{d^2V}{d\lambda^2}\left(\frac{d\lambda}{dy}\right)^2 + \frac{dV}{d\lambda}\frac{d^2\lambda}{dy^2},\\
\frac{dV}{dz} &= \frac{dV}{d\lambda}\frac{d\lambda}{dz}, & \frac{d^2V}{dz^2} &= \frac{d^2V}{d\lambda^2}\left(\frac{d\lambda}{dz}\right)^2 + \frac{dV}{d\lambda}\frac{d^2\lambda}{dz^2},
\end{aligned}$$

et par suite l'équation (1) pourrait être mise sous la forme

$$\frac{d^2V}{d\lambda^2}\left[\left(\frac{d\lambda}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\lambda}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\lambda}{dz}\right)^2\right] + \frac{dV}{d\lambda}\left(\frac{d^2\lambda}{dx^2} + \frac{d^2\lambda}{dy^2} + \frac{d^2\lambda}{dz^2}\right) = 0.$$

Or, $\frac{dV}{d\lambda}$ et $\frac{d^2V}{d\lambda^2}$ ne contenant d'autre variable que λ, le quotient

$$\left\{\left(\frac{d^2\lambda}{dx^2} + \frac{d^2\lambda}{dy^2} + \frac{d^2\lambda}{dz^2}\right) : \left[\left(\frac{d\lambda}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\lambda}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\lambda}{dz}\right)^2\right]\right\},$$

devrait jouir de la même propriété. Ainsi la fonction λ doit satisfaire à une équation différentielle de la forme

$$(2)\quad \frac{d^2\lambda}{dx^2} + \frac{d^2\lambda}{dy^2} + \frac{d^2\lambda}{dz^2} - \psi(\lambda)\left[\left(\frac{d\lambda}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\lambda}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\lambda}{dz}\right)^2\right] = 0,$$

(ψ étant une fonction arbitraire de λ), pour que l'équation ($\lambda = c$) puisse représenter un système de surfaces isothermes.

En remplaçant $\psi(\lambda)$ par $\frac{1}{\varphi(\lambda)}\frac{d\varphi(\lambda)}{d\lambda}$, on aura

$$\varphi(\lambda)\frac{d^2V}{d\lambda^2} + \frac{d\varphi(\lambda)}{d\lambda}\frac{dV}{d\lambda} = 0,$$

d'où en intégrant deux fois

$$V = A\int_{\lambda_0}^{\lambda}\frac{d\lambda}{\varphi(\lambda)} + A'.$$

Si le corps proposé est limité par deux surfaces représentées par les équations $\lambda = a$, $\lambda = a'$, entretenues à des températures données T et T′, on aura, pour déterminer les deux constantes A et A′, les deux équations

$$T = A\int_{\lambda_0}^{a}\frac{d\lambda}{\varphi(\lambda)} + A', \quad T' = A\int_{\lambda_0}^{a}\frac{d\lambda}{\varphi(\lambda)} + A',$$

d'où

$$A = \frac{T' - T}{\int_{\lambda_0}^{a}\frac{d\lambda}{\varphi} - \int_{\lambda_0}^{a}\frac{d\lambda}{\varphi}},$$

et

$$A' = T - \frac{T' - T}{\int_{\lambda_0}^{a'}\frac{d\lambda}{\varphi} - \int_{\lambda_0}^{a'}\frac{d\lambda}{\varphi}}\cdot\int_{\lambda_0}^{a}\frac{d\lambda}{\varphi};$$

en sorte que l'équation

$$(3) \qquad V = T + \frac{T' - T}{\int_{\lambda_0}^{a'}\frac{d\lambda}{\varphi} - \int^{a}\frac{d\lambda}{\varphi}}\left(\int_{\lambda_0}^{\lambda}\frac{d\lambda}{\varphi} - \int_{\lambda_0}^{a}\frac{d\lambda}{\varphi}\right)$$

donnera la température V, correspondante à une surface quelconque λ.

§ II.

On voit que dans le cas particulier d'une enveloppe solide, dont les parois intérieure et extérieure seraient entretenues à des températures constantes, mais différentes de l'une à l'autre, la loi des températures stationnaires serait connue, si l'on pouvait déterminer *à priori*

l'équation générale des surfaces isothermes qui correspondent à ce cas.

Les surfaces des parois devant être deux d'entre elles, le problème consisterait à intégrer l'équation (2), et à déterminer les formes ou constantes arbitraires que contiendrait la fonction λ, de manière que pour deux valeurs numériques données au paramètre c, l'équation $\lambda = c$ représentât successivement les surfaces des parois. Mais la solution analytique de ce problème serait généralement aussi difficile à trouver que celle qui consisterait à intégrer directement l'équation (1), et à déterminer les fonctions arbitraires de l'intégrale V, de manière qu'elle devînt numériquement égale à T ou à T' pour tous les points des parois de l'enveloppe.

Les cas simples d'une sphère creuse et d'un cylindre creux indéfini à base circulaire, dans lesquels l'épaisseur de l'enveloppe solide serait partout la même, sont les seuls où la détermination préalable des surfaces isothermes n'offre aucune difficulté. Pour tout autre cas, les parois, quoique toujours comprises parmi ces surfaces, doivent le plus souvent s'en distinguer par quelque propriété singulière, et en quelque sorte ombilicale, qui n'appartienne pas à toutes les autres surfaces d'égale température de l'intérieur de l'enveloppe.

Il ne suffirait pas, pour éloigner cette circonstance qui complique la recherche directe de l'équation générale de ces surfaces, que les parois appartinssent à la même famille, et que leurs équations, de même forme et du même degré, continssent le même nombre de paramètres; car, dans ce cas, qui paraît beaucoup plus simple au premier abord que celui où les parois seraient dissemblables, on ne pourrait pas conclure, en général, que les surfaces d'égale température dussent être directement représentées par des équations de même forme et du même degré que celles des surfaces qui limitent l'enveloppe solide. Par exemple, dans un ellipsoïde creux, dont la paroi interne serait semblable à la surface extérieure, les surfaces isothermes ne seraient pas nécessairement des ellipsoïdes semblables aux parois, ni même des ellipsoïdes.

§ III.

Les conditions nécessaires pour que la forme commune des équations des deux parois soit réellement celle qui appartient aux surfaces d'égale température, peuvent se déduire analytiquement de la vérification de l'équation (2).

En prenant cette forme pour l'équation générale des surfaces cherchées, on regardera toutes les constantes qu'elle contient comme des fonctions inconnues du paramètre λ; on en déduira, par des différentiations convenables, les coefficients différentiels partiels de ce paramètre; après les avoir substitués dans l'équation (2), on posera les relations nécessaires pour qu'elle soit satisfaite, quelles que soient les coordonnées; si ces relations entre les variations des constantes arbitraires ne sont pas incompatibles, leurs intégrations feront connaître comment le paramètre λ doit entrer dans les constantes de la forme proposée, pour qu'elle puisse représenter les surfaces d'égale température; enfin, il faudra que deux valeurs numériques données à ce paramètre puissent rendre l'équation générale successivement identique avec les équations des deux parois.

Si cette vérification ne réussit pas, il faudra en conclure que, dans le cas considéré, les surfaces isothermes de l'intérieur de l'enveloppe doivent être exprimées par une équation différente, et probablement plus compliquée que celle des parois; et que ces dernières ne rentrent dans l'équation générale que par la disparition de certains termes, essentiels pour toute autre surface individuelle.

§ IV.

J'appliquerai cette méthode au cas où l'enveloppe est limitée par deux surfaces du second degré ayant même centre, leurs axes principaux étant de plus situés sur les mêmes droites. Leurs équations seront de la forme

$$(4) \qquad mx^2 + ny^2 + pz^2 = 1.$$

Il s'agit de trouver comment les constantes m, n, p, doivent con-

tenir λ, pour que l'équation (4) puisse représenter, par la variation successive de ce paramètre, toutes les surfaces d'égale température de l'intérieur de l'enveloppe proposée.

On regardera donc m, n, p, comme des fonctions inconnues de λ, ce qui donnera

$$2mx + (m'x^2 + n'y^2 + p'z^2)\frac{d\lambda}{dx} = 0,$$

$$\left(m' = \frac{dm}{d\lambda},\quad m'' = \frac{d^2m}{d\lambda^2},\dots\right)$$

$$2mx + 4m'x\frac{d\lambda}{dx} + (m''x^2 + n''y^2 + p''z^2)\left(\frac{d\lambda}{dx}\right)^2$$
$$+ (m'x^2 + n'y^2 + p'z^2)\frac{d^2\lambda}{dx^2} = 0, \text{ etc.}$$

et par suite

$$\left(\frac{d\lambda}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\lambda}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\lambda}{dz}\right)^2 = 4\frac{m^2x^2 + n^2y^2 + p^2z^2}{(m'x^2 + n'y^2 + p'z^2)^2},$$

$$\frac{d^2\lambda}{dx^2} + \frac{d^2\lambda}{dy^2} + \frac{d^2\lambda}{dz^2} = -\frac{\frac{m+n+p}{2}(m'x^2+n'y^2+p'z^2) - 2(mm'x^2+nn'y^2+pp'z^2)}{(m'x^2+n'y^2+p'z^2)^2}$$
$$- \frac{(m^2x^2+n^2y^2+p^2z^2)(m''x^2+n''y^2+p''z^2)}{(m'x^2+n'y^2+p'z^2)^3}.$$

L'équation (2) devient alors, en faisant $\psi = \frac{\varphi'}{\varphi}$, et en posant, pour simplifier, $\frac{m+n+p}{2} = \mathrm{L}$:

$$\begin{aligned}
&\{\varphi[(\mathrm{L} - 2m)m'^2 + m''m^2] + m^2m'\varphi'\}x^4 \\
&+ \{\varphi[(\mathrm{L} - 2n)n'^2 + n''n^2] + n^2n'\varphi'\}y^4 \\
&+ \{\varphi[(\mathrm{L} - 2p)p'^2 + p''p^2] + p^2p'\varphi'\}z^4 \\
&+ \{\varphi[2(\mathrm{L}-m-n)m'n' + m''n^2 + n''m^2] + (m^2n' + n^2m')\varphi'\}x^2y^2 \\
&+ \{\varphi[2(\mathrm{L}-n-p)n'p' + n''p^2 + p''n^2] + (n^2p' + p^2n')\varphi'\}y^2z^2 \\
&+ \{\varphi[2(\mathrm{L}-p-m)p'm' + p''m^2 + m''p^2] + (p^2m' + m^2p')\varphi'\}z^2x^2 = 0.
\end{aligned}$$

Cette dernière équation devant être satisfaite quelles que soient les

valeurs des coordonnées, on devra avoir les six relations

$$\begin{aligned}
&\varphi[(\mathrm{L} - 2m)\,m'^2 + m''m^2] + m^2m'\varphi' = 0,\\
&\varphi[(\mathrm{L} - 2n)\,n'^2 + n''n^2] + n^2n'\varphi' = 0,\\
&\varphi[(\mathrm{L} - 2p)\,p'^2 + p''p^2] + p^2p'\varphi' = 0,\\
&\varphi[2(\mathrm{L} - m - n)\,m'n' + m''n^2 + n''m^2] + (m^2n' + n^2m')\,\varphi' = 0,\\
&\varphi[2(\mathrm{L} - n - p)\,n'p' + n''p^2 + p''n^2] + (n^2p' + p^2n')\,\varphi' = 0,\\
&\varphi[2(\mathrm{L} - p - m)\,p'm' + p''m^2 + m''p^2] + (p^2m' + m^2p')\,\varphi' = 0.
\end{aligned}$$

Ou bien, en posant $m = \frac{1}{a}$, $n = \frac{1}{b}$, $p = \frac{1}{c}$:

$$\begin{aligned}
&\varphi \mathrm{L} a'^2 = a''\varphi + a'\varphi',\\
&\varphi \mathrm{L} b'^2 = b''\varphi + b'\varphi',\\
&\varphi \mathrm{L} c'^2 = c''\varphi + c'\varphi',\\
&\varphi\left[2\mathrm{L}a'b' + 2(a' - b')\left(\frac{a'}{a} - \frac{b'}{b}\right)\right] = (a'' + b'')\varphi + (a' + b')\varphi',\\
&\varphi\left[2\mathrm{L}b'c' + 2(b' - c')\left(\frac{b'}{b} - \frac{c'}{c}\right)\right] = (b'' + c'')\varphi + (b' + c')\varphi',\\
&\varphi\left[2\mathrm{L}c'a' + 2(c' - a')\left(\frac{c'}{c} - \frac{a'}{a}\right)\right] = (c'' + a'')\varphi + (c' + a')\varphi'.
\end{aligned}$$

Les trois premières donnent, par l'élimination de $\frac{\varphi'}{\varphi}$, les relations

$$\begin{aligned}
\mathrm{L}(a' - b') &= \frac{a''}{a'} = \frac{b''}{b'},\\
\mathrm{L}(b' - c') &= \frac{b''}{b'} = \frac{c''}{c'},\\
\mathrm{L}(c' - a') &= \frac{c''}{c'} = \frac{a''}{a'}:
\end{aligned}$$

en outre, si l'on retranche chacune des trois dernières d'un couple convenable des premières, φ' et φ se trouvent encore éliminés, et l'on a

$$\begin{aligned}
\mathrm{L}(a' - b')^2 &= 2(a' - b')\left(\frac{a'}{a} - \frac{b'}{b}\right),\\
\mathrm{L}(b' - c')^2 &= 2(b' - c')\left(\frac{b'}{b} - \frac{c'}{c}\right),\\
\mathrm{L}(c' - a')^2 &= 2(c' - a')\left(\frac{c'}{c} - \frac{a'}{a}\right).
\end{aligned}$$

Or, il est aisé de voir que les six dernières relations ne peuvent admettre d'autre solution que celle indiquée par les équations

$$a' = b' = c', \quad \text{d'où} \quad a'' = b'' = c''.$$

Tout autre système de valeurs conduirait à des expressions indépendantes de λ pour m, n, p.

Ainsi, les constantes a, b, c, ou $\frac{1}{m}$, $\frac{1}{n}$, $\frac{1}{p}$, doivent être égales à une même fonction quelconque de λ, augmentée ou diminuée de constantes différentes. On aura donc les valeurs les plus générales de m, n, p, en posant

$$m = \frac{1}{\lambda^2}, \quad n = \frac{1}{\lambda^2 - b^2}, \quad p = \frac{1}{\lambda^2 - c^2},$$

où b et c sont deux lignes déterminées et constantes. On peut supposer, sans troubler cette généralité, que la constante c soit plus grande que b.

§ V.

Mais l'équation (4) représentant des surfaces très différentes, suivant que λ sera plus grand que b et c, plus grand que b mais plus petit que c, ou à la fois plus petit que c et b, il convient de séparer ces trois cas différents. Désignons par μ, ν, ρ, les valeurs de λ qui leur correspondent : on aura les équations

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{x^2}{\mu^2} + \frac{y^2}{\mu^2 - b^2} + \frac{z^2}{\mu^2 - c^2} &= 1, \\ \frac{x^2}{\nu^2} + \frac{y^2}{\nu^2 - b^2} - \frac{z^2}{c^2 - \nu^2} &= 1, \\ \frac{x^2}{\rho^2} - \frac{y^2}{b^2 - \rho^2} - \frac{z^2}{c^2 - \rho^2} &= 1, \end{aligned} \right.$$

pour représenter trois systèmes de surfaces isothermes compris sous la forme générale (4).

Toutes les surfaces de chaque système, et même celles des trois systèmes réunis, ont pour éléments constants de l'une à l'autre, les

distances focales $2b$, $2c$, $2\sqrt{c^2-b^2}$, de leurs sections principales faites par les mêmes plans coordonnés.

Ainsi, lorsqu'on entretient à des températures constantes les parois d'une enveloppe solide, terminée par des ellipsoïdes, dont les sections principales ont les mêmes foyers, les surfaces d'égale température, dans l'intérieur de cette enveloppe, sont encore des ellipsoïdes ayant les mêmes foyers que les précédents.

Si l'enveloppe a pour limite deux hyperboloïdes à une nappe indéfinie, de mêmes foyers, ses surfaces isothermes seront encore des hyperboloïdes de même espèce et assujettis à la même condition.

Enfin, si les parois indéfinies de l'enveloppe sont les moitiés de deux hyperboloïdes à deux nappes ayant mêmes foyers, ses surfaces d'égale température seront toutes des moitiés d'hyperboloïdes de la même famille.

On peut vérifier, comme on le verra plus bas, que dans chacun de ces trois cas les parties homologues des surfaces isothermes du même système sont effectivement traversées par la même quantité de chaleur dans le même temps. Mais avant d'entreprendre cette vérification, il convient d'étudier de plus près le système des trois équations (5).

§ VI.

Si l'on imagine sur l'axe des x, quatre points B, B', C, C', distants du centre ou de l'origine O, de quantités $OB = OB' = b$, $OC = OC' = c$, les points B et B' seront les foyers de toutes les courbes du second degré, traces sur le plan des xy, de toutes les surfaces représentées par les équations (5); et les traces de ces mêmes surfaces sur le plan des xz, auront toutes pour foyers les points C et C'. J'appelle les points B, B', C, C', les foyers des surfaces du second degré à axes inégaux, représentées par les équations (5). Ces foyers étant donnés, ainsi que le paramètre μ, ν, ou ρ, de l'une de ces surfaces, elle est entièrement connue de forme et de grandeur.

Un point quelconque de l'espace, correspondant aux coordonnées orthogonales x, y, z, sera situé sur trois surfaces appartenant respectivement aux trois systèmes (5), et ayant pour paramètres les

valeurs de μ, ν, ρ, que l'on déduirait des équations (5), en fonction de x, y, z.

Il suit de là que l'on peut regarder les trois paramètres variables μ, ν, ρ, comme composant un nouveau genre de coordonnées. Un point de l'espace est alors donné par l'intersection d'un ellipsoïde et de deux hyperboloïdes, l'un à une nappe, et l'autre à deux nappes, ayant tous trois les mêmes foyers, B, B′, C, C′.

Je donnerai aux trois variables μ, ν, ρ, le nom de *coordonnées elliptiques*; et j'appellerai *surfaces homofocales* toutes celles qui sont représentées par les équations (5).

Les trois coordonnées orthogonales x, y, z, sont liées aux coordonnées elliptiques, μ, ν, ρ, par l'équation (5), ou par les suivantes, que l'on obtient par des éliminations convenables :

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} bc\,.\,x &= \mu\nu\rho, \\ b\sqrt{c^2-b^2}\,.\,y &= \sqrt{\mu^2-b^2}\ \sqrt{\nu^2-b^2}\ \sqrt{b^2-\rho^2}, \\ c\sqrt{c^2-b^2}\,.\,z &= \sqrt{\mu^2-c^2}\ \sqrt{c^2-\nu^2}\ \sqrt{c^2-\rho^2}. \end{aligned}\right.$$

Ces formules démontrent que si l'on imagine, en un point quelconque de l'espace, les trois surfaces homofocales qui y passent, chacune des coordonnées orthogonales de ce point sera égale au produit des trois demi-axes de ces surfaces qui ont la même direction qu'elle, divisé par le rectangle des deux demi-distances focales correspondantes à toutes les sections principales de ces mêmes surfaces, dont les plans sont parallèles à cette coordonnée.

§ VII.

Les plans tangents aux trois surfaces (5), au même point $(x, y, z,)$ ou (μ, ν, ρ), ont pour équations

$$\frac{xx'}{\mu^2} + \frac{yy'}{\mu^2-b^2} + \frac{zz'}{\mu^2-c^2} = 1,$$

$$\frac{xx'}{\nu^2} + \frac{yy'}{\nu^2-b^2} - \frac{zz'}{c^2-\nu^2} = 1,$$

$$\frac{xx'}{\rho^2} - \frac{yy'}{b^2-\rho^2} - \frac{zz'}{c^2-\rho^2} = 1:$$

Fig. 3

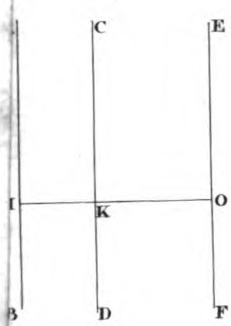


Fig. 5.

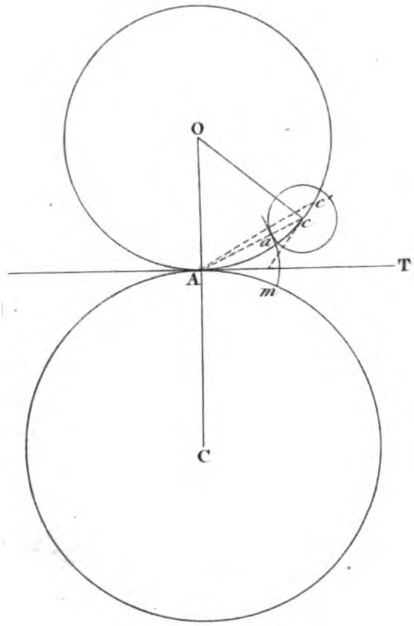


Fig. 4.

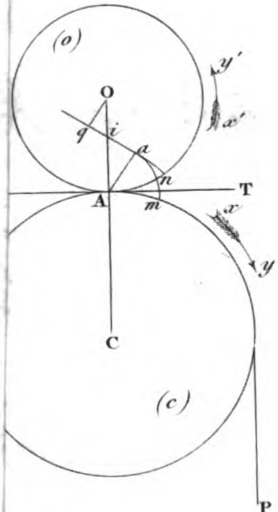


Fig. 6.

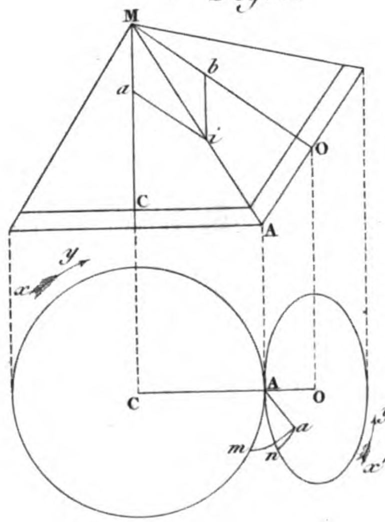
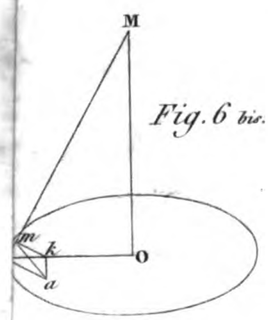


Fig. 6 bis.



ces trois plans sont perpendiculaires entre eux, car les valeurs de x, y, z, données en μ, ν, ρ, par les équations (6) conduisent aux identités

$$\frac{x^2}{\mu^2\nu^2} + \frac{y^2}{(\mu^2-b^2)(\nu^2-b^2)} - \frac{z^2}{(\mu^2-c^2)(c^2-\nu^2)} = 0,$$
$$\frac{x^2}{\nu^2\rho^2} - \frac{y^2}{(\nu^2-b^2)(b^2-\rho^2)} + \frac{z^2}{(c^2-\nu^2)(c^2-\rho^2)} = 0,$$
$$\frac{x^2}{\rho^2\mu^2} - \frac{y^2}{(b^2-\rho^2)(\mu^2-b^2)} - \frac{z^2}{(c^2-\rho^2)(\mu^2-c^2)} = 0,$$

relations qui expriment que les cosinus des angles de ces plans sont nuls.

Ainsi, une surface quelconque de l'un des systèmes (5) coupe normalement toutes les surfaces des deux autres systèmes.

§ VIII.

Considérons particulièrement un des ellipsoïdes au paramètre μ, représenté par la première des équations (5). En un quelconque de ses points passent deux hyperboloïdes, l'un à une nappe et l'autre à deux nappes, ayant les mêmes foyers que cet ellipsoïde, qui sont perpendiculaires à sa surface, et qui se coupent conséquemment suivant une courbe à double courbure normale à l'ellipsoïde proposé. Soit M′ un point de cette intersection voisin de M, et situé sur un second ellipsoïde infiniment voisin du premier et ayant pour paramètre $\mu + \delta\mu$; soit $MM' = \delta s$, et représentons par δx, δy, δz, les projections de cet élément linéaire sur les trois axes. Il est évident qu'en passant de M à M′, ν et ρ restent constants; μ est donc la seule coordonnée elliptique qui varie. D'après cela les équations (6) donneront

$$bc\delta x = \nu\rho\delta\mu,$$
$$b\sqrt{c^2-b^2}\,.\,\delta y = \frac{\mu\sqrt{\nu^2-b^2}\sqrt{b^2-\rho^2}}{\sqrt{\mu^2-b^2}},$$
$$c\sqrt{c^2-b^2}\,.\,\delta z = \frac{\mu\sqrt{c^2-\nu^2}\sqrt{c^2-\rho^2}}{\sqrt{\mu^2-c^2}}.$$

On en conclura facilement l'expression de l'élément linéaire....

$\mathrm{MM}' = \delta s = \sqrt{\delta x^2 + \delta y^2 + \delta z^2}$; on trouve ainsi, toute réduction faite,

$$\delta s = \frac{\sqrt{\mu^2 - \nu^2}\sqrt{\mu^2 - \rho^2}}{\sqrt{\mu^2 - b^2}\sqrt{\mu^2 - c^2}}\,\delta\mu.$$

Pareillement, si l'on désigne par $\delta s'$ l'élément de la courbe d'intersection de l'ellipsoïde et de l'hyperboloïde à deux nappes aux mêmes foyers, qui passent en un même point, on aura

$$\delta s' = \frac{\sqrt{\mu^2 - \nu^2}\sqrt{\nu^2 - \rho^2}}{\sqrt{\nu^2 - b^2}\sqrt{c^2 - \nu^2}}\,\delta\nu.$$

Enfin, si $\delta s''$ est l'élément de la courbe d'intersection de l'hyperboloïde à une nappe et de l'ellipsoïde homofocaux correspondants à un même point de l'espace, on aura

$$\delta s'' = \frac{\sqrt{\mu^2 - \rho^2}\sqrt{\nu^2 - \rho^2}}{\sqrt{b^2 - \rho^2}\sqrt{c^2 - \rho^2}}\,\delta\rho.$$

Si donc s, s', s'', représentent les longueurs finies variables des courbes d'intersection aux éléments δs, $\delta s'$, $\delta s''$, s variant avec μ seulement, s' avec ν, s'' avec ρ, on aura pour déterminer ces trois fonctions les trois intégrales suivantes :

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} s &= \int_c^\mu \frac{\sqrt{\mu^2 - \nu^2}\sqrt{\mu^2 - \rho^2}}{\sqrt{\mu^2 - b^2}\sqrt{\mu^2 - c^2}}\,\delta\mu, \\ s' &= \int_b^\nu \frac{\sqrt{\mu^2 - \nu^2}\sqrt{\nu^2 - \rho^2}}{\sqrt{\nu^2 - b^2}\sqrt{c^2 - \nu^2}}\,\delta\nu, \\ s'' &= \int_0^\rho \frac{\sqrt{\mu^2 - \rho^2}\sqrt{\nu^2 - \rho^2}}{\sqrt{b^2 - \rho^2}\sqrt{c^2 - \rho^2}}\,\delta\rho. \end{aligned}\right.$$

§ IX.

Toutes les courbes s', s'', suivant lesquelles un même ellipsoïde est coupé par tous les hyperboloïdes ayant mêmes foyers que lui, ne sont autres que les lignes de courbure de sa surface. Il s'agit ici de vérifier ce théorème important : les équations de la normale à l'el-

lipsoïde, au point (x, y, z), sont

$$\mu^2 z(x'-x) = (\mu^2 - c^2)\,x(z'-z),$$
$$\mu^2 y(x'-x) = (\mu^2 - b^2)\,y(y'-y),$$

si cette droite est rencontrée en (x', y', z'), par la normale infiniment voisine, correspondante au point $(x+dx, y+dy, z+dz)$, on devra avoir

$$\mu^2(zdx - xdz)x' + c^2x^2dz = 0,$$
$$\mu^2(ydx - xdy)x' + b^2x^2dy = 0;$$

car ces dernières équations s'obtiennent en combinant les équations de la normale, avec celles qu'on en déduit par la différentiation de x, y, z. L'élimination de l'abscisse x' du point de concours supposé des deux normales voisines conduit à la relation

$$b^2\left(\frac{zdx - xdz}{dz}\right) = c^2\left(\frac{ydx - xdy}{dy}\right),$$

ou

$$(8)\ldots \qquad b^2\left(\frac{z}{dz} - \frac{x}{dx}\right) = c^2\left(\frac{y}{dy} - \frac{x}{dx}\right),$$

à laquelle doivent satisfaire les différentielles dx, dy, dz, pour que les normales voisines soient dans le même plan. Cette relation, combinée avec l'équation différentielle de l'ellipsoïde, représente, comme on le sait, les lignes de courbure de sa surface.

Maintenant, lorsqu'on chemine sur une des courbes s', μ et ρ conservent les mêmes valeurs, et ν varie seul; alors on a par les équations (6)

$$\frac{dx}{x} = \frac{d\nu}{\nu}, \quad \frac{dy}{y} = \frac{\nu}{\nu^2 - b^2}, \quad \frac{dz}{z} = \frac{\nu}{\nu^2 - c^2};$$

or ces valeurs de $\frac{dx}{x}$, $\frac{dy}{y}$, $\frac{dz}{z}$, rendent identique l'équation (8); les courbes s' forment donc un des systèmes de lignes de courbure de l'ellipsoïde.

Pareillement lorsqu'on suit une même courbe s'', μ et ν restent constants, et ρ varie seul; les équations (6) donnent alors

$$\frac{dx}{x} = \frac{d\varrho}{\varrho}, \quad \frac{dy}{y} = \frac{\varrho}{\varrho^2 - b^2}, \quad \frac{dz}{z} = \frac{\varrho}{\varrho^2 - c^2};$$

expressions qui rendent encore identique l'équation (8); les courbes s'' forment donc le second système de lignes de courbure de l'ellipsoïde.

On peut énoncer ces propriétés d'une manière plus générale, en disant que *toutes les surfaces homofocales de deux quelconques des trois systèmes* (5) *rencontrent normalement une surface courbe quelconque du troisième système, et tracent sur elle toutes ses lignes de courbure.*

§ X.

Revenons maintenant à la question physique, et cherchons quelle sera la loi des températures stationnaires d'une enveloppe solide dans laquelle les surfaces d'égale température seront représentées par l'une des trois équations (5). Considérons d'abord le cas où ces surfaces sont des ellipsoïdes. Il faut d'abord trouver la valeur de la fonction $\psi(\lambda)$, qui rend identique l'équation (2). Si l'on pose dans l'équation (4), et dans les relations que nous en avons déduites par la différentiation

$$\lambda = \mu, \quad m = \frac{1}{\mu^2}, \quad n = \frac{1}{\mu^2 - b^2}, \quad p = \frac{1}{\mu^2 - c^2},$$

on trouve

$$m' = -\frac{2}{\mu^3}, \quad n' = -\frac{2\mu}{(\mu^2 - b^2)^2}, \quad p' = -\frac{2\mu}{(\mu^2 - c^2)^2},$$

$$m^2 = -\frac{1}{2\mu} m', \quad n^2 = -\frac{1}{2\mu} n', \quad p^2 = -\frac{1}{2} p',$$

et par suite

$$(\mathrm{L} - 2m) m'^2 + m'' m^2 = m'^2 \left(\frac{n+p}{2}\right),$$

$$(\mathrm{L} - 2n) n'^2 + n'' n^2 = n'^2 \left(\frac{n+p}{2}\right),$$

$$(\mathrm{L} - 2p) p'^2 + p'' p^2 = p'^2 \left(\frac{n+p}{2}\right),$$

$$2(\mathrm{L}-m-n)\,m'n'+m''n^2+n''p^2=2m'n'\left(\frac{n+p}{2}\right),$$
$$2(\mathrm{L}-n-p)\,n'p'+n''p^2+p''n^2=2n'p'\left(\frac{n+p}{2}\right),$$
$$2(\mathrm{L}-p-m)\,p'm'+p''m^2+m''p^2=2p'm'\left(\frac{n+p}{2}\right),$$

d'où l'on conclut

$$\left(\frac{d\lambda}{dx}\right)^2+\left(\frac{d\lambda}{dy}\right)^2+\left(\frac{d\lambda}{dz}\right)^2=\frac{1}{\mu^2\left(\frac{x^2}{\mu^4}+\frac{y^2}{(\mu^2-b^2)^2}+\frac{z^2}{(\mu^2-c^2)^2}\right)},$$
$$\frac{d^2\lambda}{dx^2}+\frac{d^2\lambda}{dy^2}+\frac{d^2\lambda}{dz^2}=\left(\frac{1}{\mu^2-b^2}+\frac{1}{\mu^2-c^2}\right)\frac{1}{\mu\left(\frac{x^2}{\mu^4}+\frac{y^2}{(\mu^2-b^2)^2}+\frac{z^2}{(\mu^2-c^2)^2}\right)},$$

ce qui donne, pour $\psi(\lambda)$ ou $\psi(\mu)$:

$$\psi(\mu)=\frac{\mu}{\mu^2-b^2}+\frac{\mu}{\mu^2-c^2}.$$

La fonction ψ étant connue, on en déduira la fonction φ en intégrant l'équation

$$\frac{1}{\varphi}\frac{d\varphi}{d\mu}=\psi=\frac{\mu}{\mu^2-b^2}+\frac{\mu}{\mu^2-c^2},$$

ce qui donne

$$\varphi(\mu)=\sqrt{\mu^2-b^2}\,\sqrt{\mu^2-c^2}.$$

La température V sera enfin donnée, soit par l'équation différentielle

(9). $$\frac{dV}{d\mu}\sqrt{\mu^2-b^2}\,\sqrt{\mu^2-c^2}=\mathrm{A},$$

soit par l'équation intégrale

(10). $$\mathrm{V}=\mathrm{A}\int_c^\mu\frac{d\mu}{\sqrt{\mu^2-b^2}\,\sqrt{\mu^2-c^2}}+\mathrm{B}.$$

On trouvera aussi que pour le second des trois systèmes de sur-

faces d'égale température représentées par les équations (5), on a

$$\psi(\nu) = \frac{\nu}{\nu^2 - b^2} - \frac{\nu}{c^2 - \nu^2},$$

$$\varphi(\nu) = \sqrt{\nu^2 - b^2}\ \sqrt{c^2 - \nu^2},$$

$$(9)_1 \qquad \frac{dV}{d\nu}\sqrt{\nu^2 - b^2}\ \sqrt{c^2 - \nu^2} = A,$$

$$(10)_1 \qquad V = A\int_b^\nu \frac{d\nu}{\sqrt{\nu^2 - b^2}\ \sqrt{c^2 - \nu^2}} + B.$$

Enfin, dans le cas où l'enveloppe solide aurait pour surfaces d'égale température les hyperboloïdes à deux nappes représentés par la troisième des équations (5), on aura

$$\psi(\rho) = -\frac{\rho}{b^2 - \rho^2} - \frac{\rho}{c^2 - \rho^2},$$

$$\varphi(\rho) = \sqrt{b^2 - \rho^2}\ \sqrt{c^2 - \rho^2},$$

$$(9)_2 \ldots\ldots \qquad \frac{dV}{d\rho}\sqrt{b^2 - \rho^2}\ \sqrt{c^2 - \rho^2} = A,$$

$$(10)_2 \ldots \qquad V = A\int_0^\rho \frac{d\rho}{\sqrt{b^2 - \rho^2}\ \sqrt{c^2 - \rho^2}} + B.$$

Ainsi la température stationnaire, et variable d'un point à l'autre, dans les trois genres d'enveloppe dont les surfaces isothermes sont du second degré et homofocales, est exprimée par une transcendante elliptique de la première espèce; et les trois variétés de cette transcendante correspondent respectivement aux trois cas que nous avons considérés.

§ XI.

Nous pouvons maintenant vérifier que dans chacun de ces cas toutes les surfaces isothermes sont traversées par la même quantité de chaleur dans le même temps, lorsque la température varie de l'une à l'autre, suivant les lois qui viennent d'être trouvées.

Considérons d'abord l'enveloppe ellipsoïdale. La quantité de chaleur qui traverse l'élément de volume compris entre deux ellipsoïdes infiniment voisins, ayant pour paramètres μ et $\mu + d\mu$, et les courbes s, correspondantes aux différents points du périmètre d'un

élément $d\omega^2$, de la surface de l'ellipsoïde (μ), aura évidemment pour expression

$$K\,\frac{dV}{d\mu}\,\frac{\delta\mu}{\delta s}\,d\omega^2;$$

K étant le coefficient de la conductibilité intérieure, de la matière dont l'enveloppe est composée.

Il s'agit d'intégrer cette expression pour toute la surface de l'ellipsoïde μ; or, cette intégration peut se faire de deux manières: en exprimant l'élément $d\omega^2$ en coordonnées orthogonales, ou en coordonnées elliptiques.

En employant les coordonnées orthogonales, on remarquera d'abord que δs est égal à la partie de la normale à l'ellipsoïde (μ) comprise entre les deux ellipsoïdes qui limitent la couche considérée, en sorte que si δx, δy, δz, sont les projections de δs sur les axes, on a

$$\frac{z}{\mu^2-c^2}\,\delta x=\frac{x}{\mu^2}\,\delta z,\qquad \frac{y}{\mu^2-b^2}\,\delta x=\frac{x}{\mu^2}\,\delta y,$$

d'où

$$\delta s=\frac{\mu^2}{x}\,\delta x\sqrt{\frac{x^2}{\mu^4}+\frac{y^2}{(\mu^2-b^2)^2}+\frac{z^2}{(\mu^2-c^2)^2}},$$

ou, en remarquant que $\frac{\delta x}{x}=\frac{\delta\mu}{\mu}$, comme l'indiquent les équations (6), puisque sur la courbe s, ν et ρ restent constants

$$\delta s=\mu\sqrt{\frac{x^2}{\mu^4}+\frac{y^2}{(\mu^2-b^2)^2}+\frac{z^2}{(\mu^2+c^2)^2}}\,\delta\mu,$$

ce qui donnera

$$\frac{\delta\mu}{\delta s}=\frac{1}{\mu\sqrt{\frac{x^2}{\mu^4}+\frac{y^2}{(\mu^2-b^2)^2}+\frac{z^2}{(\mu^2-c^2)^2}}}.$$

Quant à l'élément de surface $d\omega^2$, sa valeur est

$$d\omega^2=\frac{\mu^2-c^2}{z}\,dxdy\sqrt{\frac{x^2}{\mu^4}+\frac{y^2}{(\mu^2-b^2)^2}+\frac{z^2}{(\mu^2-c^2)^2}};$$

on peut donc poser

$$\mathrm{K}\,\frac{d\mathrm{V}}{d\mu}\,\frac{\delta\mu}{\delta s}\,d\omega^2 = \mathrm{K}\,\frac{d\mathrm{V}}{d\mu}\,\frac{\mu^2-c^2}{\mu}\,\frac{dxdy}{z}.$$

Ou bien, en remarquant que l'équation de l'ellipsoïde donne

$$\frac{z}{\sqrt{\mu^2-c^2}} = \sqrt{1-\frac{x^2}{\mu^2}-\frac{y^2}{\mu^2-b^2}},$$

on aura

$$\mathrm{K}\,\frac{d\mathrm{V}}{d\mu}\,\frac{\delta\mu}{\delta s}\,d\omega^2 = \mathrm{K}\,\frac{d\mathrm{V}}{d\mu}\,\frac{\sqrt{\mu^2-c^2}}{\mu}\,\frac{dxdy}{\sqrt{1-\frac{x^2}{\mu^2}-\frac{y^2}{\mu^2-b^2}}}.$$

L'intégration de cette expression, par rapport à y, conduit à l'intégrale indéfinie

$$\mathrm{K}\,\frac{d\mathrm{V}}{d\mu}\,\frac{\sqrt{\mu^2-b^2}\,\sqrt{\mu^2-c^2}}{\mu}\left(\text{arc sin}\,\frac{\frac{y}{\sqrt{\mu^2-b^2}}}{\sqrt{1-\frac{x^2}{\mu^2}}}+\text{const.}\right)dx,$$

qui doit être prise de

$$\left(\frac{y}{\sqrt{\mu^2-b^2}}=-\sqrt{1-\frac{x^2}{\mu^2}}\right) \text{ à } \left(\frac{y}{\sqrt{\mu^2-b^2}}=+\sqrt{1-\frac{x^2}{\mu^2}}\right),$$

ce qui donne

$$\pi\mathrm{K}\,\frac{d\mathrm{V}}{d\mu}\,\frac{\sqrt{\mu^2-b^2}\sqrt{\mu^2-c^2}}{\mu}\,dx.$$

Enfin l'intégration par rapport à x, de $(x=-\mu)$ à $(x=+\mu)$, donne définitivement, en doublant le résultat, pour la quantité de chaleur cherchée

$$4\pi\mathrm{K}\,\frac{d\mathrm{V}}{d\mu}\,\sqrt{\mu^2-b^2}\;\sqrt{\mu^2-c^2},$$

ou, en vertu de l'équation (9),

$$4\pi\mathrm{KA}.$$

Cette quantité de chaleur est donc constante, quel que soit μ, ou quelle que soit la couche ellipsoïdale considérée.

§ XII.

En employant les coordonnées elliptiques, on substituera à l'élément $d\omega^2$, le rectangle $\delta s' \delta s''$, et l'on aura [équations (7)],

$$K \frac{dV}{d\mu} \frac{\delta\mu}{\delta s} \delta s' \delta s'' = K \frac{dV}{d\mu} \sqrt{\mu^2 - b^2} \sqrt{\mu^2 - c^2} \frac{(\nu^2 - \rho^2)\, \delta\nu \delta\rho}{\sqrt{c^2 - \nu^2} \sqrt{b^2 - \nu^2} \sqrt{b^2 - \rho^2} \sqrt{c^2 - \rho^2}}.$$

Cette expression devra être intégrée de $\nu = b$ à $\nu = c$, de $\rho = 0$ à $\rho = b$, et ensuite multipliée par 8, pour avoir la quantité de chaleur cherchée, qui sera, en vertu de l'équation $(9)_0$,

$$8KA \int_0^b \int_b^c \frac{(\nu^2 - \rho^2)\, \delta\nu \delta\rho}{\sqrt{\nu^2 - b^2} \sqrt{c^2 - \nu^2} \sqrt{b^2 - \rho^2} \sqrt{c^2 - \rho^2}}.$$

Sous cette forme cette quantité totale de chaleur est encore indépendante de μ, ou de la couche ellipsoïdale considérée.

Son expression différentielle

$$KA \frac{(\nu^2 - \rho^2)\, \delta\nu \delta\rho}{\sqrt{\nu^2 - b^2} \sqrt{c^2 - \nu^2} \sqrt{b^2 - \rho^2} \sqrt{c^2 - \rho^2}},$$

est elle-même indépendante de μ. Ainsi, si l'on considère à travers l'enveloppe proposée, un canal infiniment délié, ayant pour axe une courbe s, et pour section normale le rectangle $\delta s' \delta s''$, dont la grandeur varie avec μ, ou d'une couche ellipsoïdale à la suivante, ce canal laissera écouler une même quantité de chaleur dans le même temps, par toutes ses sections normales; et ses parois, qui appartiennent à quatre hyperboloïdes aux mêmes foyers, infiniment voisins deux à deux, ne seront traversés par aucune molécule calorifique. Sous ce point de vue, on peut appeler ce canal *un filet de chaleur*, et la différentielle qui précède donne la *dépense de ce filet* pendant l'unité de temps.

§ XIII.

Soit toujours $d\omega^2$ un élément de la surface de l'ellipsoïde (μ); la quantité (ΔQ) qui le traverse sera égale à la dépense du filet de

section $\delta s' \delta s''$, multipliée par le rapport $\frac{d\varpi^2}{\delta s' \delta s''}$; elle est donc, d'après les équations (7), égale à

$$\Delta Q = \frac{KA d\varpi^2}{\sqrt{\mu^2 - \nu^2}\sqrt{\mu^2 - \rho^2}}.$$

Si l'élément $d\varpi^2$, conservant toujours la même grandeur, est successivement placé aux extrémités des trois axes de l'ellipsoïde (μ), l'expression précédente prendra les trois formes suivantes:

1°. A une des extrémités du grand axe 2μ, où $x = \mu$, $y = 0$, $z = 0$, et $\nu = c$, $\rho = b$, elle devient

$$\Delta' Q = \frac{KA d\varpi^2}{\sqrt{\mu^2 - c^2}\ \sqrt{\mu^2 - b^2}};$$

2°. A l'extrémité de l'axe moyen, où $x = 0$, $y = \sqrt{\mu^2 - b^2}$, $z = 0$, et $\nu = c$, $\rho = 0$,

$$\Delta'' Q = \frac{KA d\varpi^2}{\mu \sqrt{\mu^2 - c^2}};$$

3°. Enfin à l'extrémité du petit axe, où $x = 0$, $y = 0$, $z = \sqrt{\mu^2 - c^2}$, et $\nu = b$, $\rho = 0$,

$$\Delta''' Q = \frac{KA d\varpi^2}{\mu \sqrt{\mu^2 - b^2}}.$$

On déduit de là

$$\Delta' Q : \Delta'' Q : \Delta''' Q :: \mu : \sqrt{\mu^2 - b^2} : \sqrt{\mu^2 - c^2},$$

c'est-à-dire que *les flux de chaleur aux extrémités des axes d'une même surface ellipsoïdale d'égale température ont des intensités respectivement proportionnelles à ces axes.*

§ XIV.

En égalant les deux expressions trouvées pour la quantité totale de chaleur qui traverse une surface ellipsoïdale quelconque d'égale température, on obtient

$$\int_0^b\int_b^c \frac{(\nu^2-\rho^2)\,d\nu\,d\rho}{\sqrt{\nu^2-b^2}\,\sqrt{c^2-\nu^2}\,\sqrt{b^2-\rho^2}\,\sqrt{c^2-\rho^2}} = \frac{\pi}{2},$$

ou

$$\int_0^b \frac{d\rho}{\sqrt{b^2-\rho^2}\,\sqrt{c^2-\rho^2}}\int_b^c \frac{\nu^2 d\nu}{\sqrt{\nu^2-b^2}\,\sqrt{c^2-\nu^2}}$$
$$-\int_0^b \frac{\rho^2 d\rho}{\sqrt{b^2-\rho^2}\,\sqrt{c^2-\rho^2}}\int_b^c \frac{d\nu}{\sqrt{\nu^2-b^2}\sqrt{c^2-\nu^2}} = \frac{\pi}{2},$$

ou bien encore

$$\int_0^b \frac{d\rho}{\sqrt{b^2-\rho^2}\,\sqrt{c^2-\rho^2}}\int_b^c \frac{\sqrt{\nu^2-b^2}}{\sqrt{c^2-\nu^2}}\,d\nu$$
$$+\int_0^b \frac{\sqrt{b^2-\rho^2}}{\sqrt{c^2-\rho^2}}\,d\rho\int_b^c \frac{d\nu}{\sqrt{\nu^2-b^2}\,\sqrt{c^2-\nu^2}} = \frac{\pi}{2}.$$

Ces relations peuvent se démontrer directement (*voyez* la note placée à la fin de ce mémoire); toutefois la facilité avec laquelle elles se déduisent de l'analyse précédente mérite d'être remarquée.

Le genre de coordonnées μ, ν, ρ, auquel on est conduit en traitant la question physique qui nous occupe, paraît même devoir fournir les éléments d'une sorte de trigonométrie elliptique, dont l'objet serait de démontrer géométriquement, et d'une manière simple, quelques formules qui lient entre elles les différentes espèces de transcendantes elliptiques. Et, comme un autre exemple de ce nouveau mode de démonstration, on remarquera que le volume d'un ellipsoïde (μ), ou le produit $\mu\sqrt{\mu^2-b^2}\,\sqrt{\mu^2-c^2}$ de ses trois axes, multiplié par $\frac{4}{3}\pi$, doit être égal à huit fois l'intégrale triple...... $\int\int\int \delta s\delta s'\delta s''$, prise entre les limites extrêmes des variables indépendantes μ, ν, ρ; ce qui conduit à l'intégrale suivante, définie en ν et ρ, indéfinie en μ,

$$\int_0^b\int_b^c\int_b^\mu \frac{(\mu^2-\nu^2)(\nu^2-\rho^2)(\mu^2-\rho^2)\,d\mu\,d\nu\,d\rho}{\sqrt{\mu^2-b^2}\,\sqrt{\mu^2-c^2}\,\sqrt{\nu^2-b^2}\,\sqrt{c^2-\nu^2}\,\sqrt{b^2-\rho^2}\,\sqrt{c^2-\rho^2}}$$
$$=\frac{\pi}{6}\mu\sqrt{\mu^2-b^2}\,\sqrt{\mu^2-c^2};$$

laquelle peut se décomposer en une somme algébrique de triples produits de transcendantes elliptiques.

§ XV.

Dans le cas de l'enveloppe dont les parois sont deux hyperboloïdes à une nappe, ayant mêmes foyers, la quantité de chaleur qui traverse, dans l'unité de temps, le parallélépipède $\delta s \delta s''$, compris entre deux surfaces d'égale température infiniment voisines, a pour expression

$$\mathrm{K}\,\frac{d\mathrm{V}}{d\nu}\,\frac{\delta\nu}{\delta s'}\,\delta s \delta s'';$$

ou, en substituant les valeurs de δs, $\delta s'$, $\delta s''$,

$$\mathrm{K}\,\frac{d\mathrm{V}}{d\nu}\sqrt{\nu^2-b^2}\,\sqrt{c^2-\nu^2}\,\frac{(\mu^2-\rho^2)\,\delta\mu\delta\rho}{\sqrt{\mu^2-b^2}\,\sqrt{\mu^2-c^2}\,\sqrt{b^2-\rho^2}\,\sqrt{c^2-\rho^2}},$$

ou enfin, en ayant égard à l'équation (9),

$$\mathrm{KA}\,\frac{(\mu^2-\rho^2)\,\delta\mu\delta\rho}{\sqrt{\mu^2-b^2}\,\sqrt{\mu^2-c^2}\,\sqrt{b^2-\rho^2}\,\sqrt{c^2-\rho^2}}:$$

elle est donc indépendante de ν, et par conséquent de la surface isotherme considérée.

Ainsi, dans le canal infiniment délié dont l'axe et les arètes sont des courbes s', les sections $\delta s \delta s''$, perpendiculaires à ses parois et de grandeur variable, sont toutes traversées par la même quantité de chaleur dans le même temps. Ce canal forme un filet de chaleur dont la différentielle qui précède exprime la dépense.

Enfin dans le cas de l'enveloppe terminée par deux moitiés d'hyperboloïdes à deux nappes aux mêmes foyers, la quantité de chaleur qui traverse, dans l'unité de temps, le parallélépipède $\delta s \delta s'$ est

$$\mathrm{K}\,\frac{d\mathrm{V}}{d\rho}\,\frac{\delta\rho}{\delta s''}\,\delta s \delta s'$$

$$= \mathrm{K}\,\frac{d\mathrm{V}}{d\rho}\,\sqrt{b^2-\rho^2}\sqrt{c^2-\rho^2}\,\frac{(\mu^2-\nu^2)\,\delta\mu\delta\nu}{\sqrt{\mu^2-b^2}\,\sqrt{\mu^2-c^2}\,\sqrt{\nu^2-b^2}\,\sqrt{c^2-\nu^2}},$$

ou enfin, d'après l'équation (9), :

$$\mathrm{KA}\,\frac{(\mu^2-\nu^2)\,\delta\mu\,\delta\nu}{\sqrt{\mu^2-b^2}\,\sqrt{\mu^2-c^2}\,\sqrt{\nu^2-b^2}\,\sqrt{c^2-\nu^2}}.$$

Cette quantité est indépendante de ρ, ou de ce qui particularise la surface isotherme. Ainsi, dans le canal aux arètes s'' toutes les sections $\delta s'\delta s$, quoique différentes, sont cependant toutes traversées par le même flux de chaleur. Ce canal est donc un filet de chaleur dont la dépense est exprimée par la différentielle précédente.

Il résulte de ces vérifications que les équations $(10)_0$, $(10)_1$, $(10)_2$, représentent réellement les températures stationnaires dans trois genres d'enveloppes dont les parois sont des surfaces du second degré ayant mêmes foyers, et entretenues chacune à une température constante dans toute son étendue, mais différente de l'une à l'autre de ces parois.

§ XVI.

Si l'espace solide en équilibre de température était terminé par deux paraboloïdes de même espèce, dont les axes seraient dirigés sur la même droite, et dont les sections principales auraient les mêmes foyers, il résulte évidemment des différents cas qui viennent d'être traités, et des transformations connues pour passer d'une espèce de surface du second ordre à une autre, que les surfaces d'égale température dans le solide proposé seraient des paraboloïdes de même espèce que les parois, et assujettis aux mêmes relations de forme et de position.

§ XVII.

Si $b=c$ dans les équations (5), la première représente des ellipsoïdes de révolution autour de leur grand axe, et les ellipses méridiennes de tous ces ellipsoïdes ont les mêmes foyers; la troisième équation représente des hyperboloïdes de révolution à deux nappes ayant mêmes foyers; quant à la seconde, ν devant toujours être compris entre b et c, on posera $c^2=b^2+\Delta b^2$, $\nu^2=b^2+\Delta\nu^2$, $\Delta\nu^2$ et Δb^2 étant des quantités infiniment petites, dont le rapport fini peut varier

avec $\Delta \nu^2$; la seconde des équations (5) deviendra alors

$$y^2 = z^2 \left(\frac{1}{\frac{\Delta b^2}{\Delta \nu^2} - 1} \right),$$

et représentera deux plans méridiens quelconques des surfaces de révolution des deux autres systèmes.

En posant $b = c$ dans les équations $(9)_0$ et $(10)_0$, elles deviennent

$$\frac{dV}{d\mu}(\mu^2 - c^2) = A,$$
$$V = \frac{A}{c} \log \sqrt{\frac{\mu - c}{\mu + c}} + B,$$

pour la température stationnaire des différents points d'une enveloppe terminée par deux ellipsoïdes de révolution autour de leur grand axe, ayant mêmes foyers, et entretenus chacun à une température constante.

En faisant $b = c$ dans les équations $(9)_2$ et $(10)_2$, elles donnent

$$\frac{dV}{d\rho}(c^2 - \rho^2) = A,$$
$$V = \frac{A}{c} \log \sqrt{\frac{c + \rho}{c - \rho}} + B,$$

pour exprimer la température variable d'un point à l'autre d'une enveloppe solide terminée par les moitiés de deux hyperboloïdes de révolution à deux nappes, ayant mêmes foyers.

§ XVIII.

Si $b = 0$ dans les équations (5), la première représente des ellipsoïdes de révolution autour de leur petit axe, dont les ellipses méridiennes ont toutes les mêmes distances focales; la seconde représente des hyperboloïdes de révolution à une seule nappe, assujettis à la même relation de forme et de position; quant à la troisième, ρ devant toujours être moindre que b, on y substituera à b^2 et ρ^2 deux

quantités infiniment petites Δb^2 et $\Delta \rho^2$; elle deviendra alors

$$\left(\frac{\Delta b^2}{\Delta \rho^2} - 1\right) x^2 = y^2,$$

et représentera deux plans méridiens quelconques des surfaces de révolution des deux antres systèmes.

En posant $b = 0$ dans les équations (9)$_2$ et (10)$_2$, elles deviennent

$$\frac{dV}{d\mu} \mu \sqrt{\mu^2 - c^2} = A,$$

$$V = \frac{A}{c} \text{ arc} \left(\cos = \frac{c}{\mu}\right) + B.$$

Telle est la loi des températures dans une enveloppe solide terminée par deux ellipsoïdes de révolution autour de leur petit axe, dont les coupes méridiennes ont les mêmes foyers, lorsque chacune de ces parois est entretenue à une température constante, mais différente de l'une à l'autre paroi.

En faisant $b = 0$ dans les équations (9)$_1$ et (10)$_1$, elles donnent

$$\frac{dV}{d\nu} \nu \sqrt{c^2 - \nu^2} = A,$$

$$V = A \log \left(\frac{\nu}{c + \sqrt{c^2 - \nu^2}} + B\right),$$

pour la loi des températures stationnaires d'une enveloppe solide terminée par deux hyperboloïdes de révolution à une nappe, assujettis aux mêmes relations de température et de forme que les parois du cas précédent.

Il est remarquable que dans l'enveloppe ellipsoïdale de révolution autour du grand axe, dont la surface est évaluable en arc de cercle, la température soit exprimée par un logarithme; tandis qu'au contraire, dans l'enveloppe formée par la révolution de deux ellipses homofocales autour de leurs petits axes, dont la surface est donnée par logarithmes, la température est inversement exprimée par un arc de cercle.

§ XIX.

Si l'on considère le cône comme la limite d'un hyperboloïde à une nappe ou à deux nappes, on peut déduire de l'analyse précédente la loi des températures stationnaires de tous les points d'une enveloppe dont les parois seraient deux cônes obliques du second degré, ayant le même sommet et leurs sections principales situées sur les mêmes plans, lorsque ces deux parois, entretenues chacune à une température uniforme et constante, ont entre elles cette relation de forme, qu'elles sont asymptotiques à deux hyperboloïdes aux mêmes foyers. Les surfaces d'égale température seraient alors des cônes de la même famille, ou des cônes asymptotiques à des hyperboloïdes ayant les mêmes foyers que ceux avec lesquels les parois coniques se confondent infiniment loin du sommet.

Mais comme il est impossible de réaliser des circonstances physiques semblables, à cause du flux de chaleur qui devrait avoir lieu au sommet, sur une épaisseur nulle, et qui serait infiniment grand comparativement au flux qui traverserait toute autre partie de l'enveloppe, je me dispenserai de discuter plus longuement ce cas particulier; je ne l'offre ici que comme une limite offerte par l'analyse, et qui pourra jeter quelque jour sur la manière de considérer le cône, toutes les fois qu'on voudra étudier l'équilibre et le mouvement des agents physiques dans son intérieur.

Pour représenter analytiquement ce cas singulier, il faut supposer b et c nuls dans équations (5), sans que le rapport $\frac{b}{c}$ le soit; la première de ces équations représente alors des sphères concentriques, mais que l'on doit considérer ici comme les limites d'ellipsoïdes à axes inégaux, dont les quatre foyers sont infiniment rapprochés, sans se confondre cependant : la seconde et la troisième des équations (5), dans lesquelles on pourra remplacer ν, ρ, b, c, par $\varepsilon\nu_1$, $\varepsilon\rho_1$, εb_1, εc_1, ε étant infiniment petit ou nul, et ν_1, ρ_1, b_1, c_1, des longueurs finies, représenteront alors des cônes assymptotiques à des hyperboloïdes à une et à deux napes, ayant les mêmes plans de sections principales et les mêmes foyers.

Il suit de là que si l'on imagine les deux séries d'hyperboloïdes à une et à deux nappes représentées par les deux dernières équations (5), les traces de leurs cônes asymptotiques sur une même surface sphérique, ayant son centre à leur sommet commun, formeront deux systèmes de courbes à double courbure qui se couperont à angle droit.

§ XX.

Pour traiter le cas de l'équilibre de température d'une enveloppe cylindrique, dont les parois et les surfaces isothermes, coupées perpendiculairement aux arètes, donneraient des courbes du second degré, il faut chercher la relation qui doit exister entre les fonctions m et n du même paramètre variable λ, pour que l'équation

$$mx^2 + ny^2 = 1$$

représente un système de surfaces d'égale température. On est alors conduit aux deux systèmes suivants :

$$(5). \quad \begin{cases} \dfrac{x^2}{\mu^2} + \dfrac{y^2}{\mu^2 - c^2} = 1, \\ \dfrac{x^2}{\nu^2} + \dfrac{y^2}{c^2 - \nu^2} = 1, \end{cases}$$

qui représentent deux séries de cylindres, les uns à base elliptique, les autres à base hyperbolique, qui ont cela de commun que leurs traces sur un même plan perpendiculaire à leurs arètes sont toutes des courbes du second degré ayant les mêmes foyers. Les traces hyperboliques coupent à angle droit toutes les traces elliptiques, etc.

On trouve alors pour la loi des températures de l'enveloppe cylindrique indéfinie à base elliptique,

$$\frac{dV}{d\mu}\sqrt{\mu^2 - c^2} = A,$$

$$V = A \log\left(\mu + \sqrt{\mu^2 - c^2}\right) + B;$$

et pour le cas de la base hyperbolique

$$\frac{dV}{d\nu}\sqrt{c^2 - \nu^2} = A,$$

$$V = A \operatorname{arc}\left(\sin = \frac{\nu}{c}\right) + B.$$

Je crois inutile d'entrer dans plus de détails sur ces nouveaux exemples; la discussion du cas plus général que j'ai traité le premier ne permet pas de douter de l'exactitude des lois indiquées par les équations précédentes.

SECONDE PARTIE.

§ XXI.

Les coordonnées elliptiques, qui sont indiquées par l'analyse mathématique de l'équilibre de la chaleur dans les corps que j'ai considérés, donnent le moyen de traiter le cas plus général des températures stationnaires d'un corps plein ou d'une enveloppe solide creuse, dont les parois seraient des surfaces du second degré, auxquelles seraient immédiatement appliqués des foyers connus, mais variables d'un point à l'autre de ces parois; ainsi que le cas du refroidissement de ce corps ou de cette enveloppe, lorsqu'elle est exposée à des circonstances calorifiques de même nature.

En exprimant l'équation générale au moyen des coordonnées dont il s'agit, on parvient, comme dans les cas traités jusqu'ici, à ramener la solution complète de la question à l'intégration d'équations aux différences ordinaires; en sorte que la seule difficulté qui s'oppose encore à l'évaluation numérique des températures ne consiste plus qu'à intégrer ces dernières équations au moyen de séries suffisamment convergentes.

Ces équations aux différences ordinaires prennent leur forme la plus simple et la plus commode, en substituant aux coordonnées elliptiques un autre genre de coordonnées, qui a encore un rapport plus direct avec la question physique. Si l'on considère séparément les trois systèmes conjugués et orthogonaux de surfaces isothermes comprises parmi les surfaces du second degré, la température est exprimée, dans chacun de ces systèmes, par une transcendante elliptique de première espèce. Or, les nouvelles coordonnées dont il s'a-

git sont les trois transcendantes elliptiques qui expriment les températures stationnaires dans les trois cas.

L'objet de cette seconde partie est de démontrer les deux propositions que je viens d'énoncer.

§ XXII.

Je considérerai d'abord le cas général de l'équilibre des températures dans un corps solide homogène, terminé par des surfaces du second degré homofocales.

Soient ε, η, ξ, les intégrales qui constituent les parties variables de la température, dans les équations $(10)_0$, $(10)_1$, $(10)_2$, de la première partie de ce mémoire, lorsque les surfaces isothermes sont ou des ellipsoïdes, ou des hyperboloïdes à une nappe, ou des hyperboloïdes à deux nappes, tous ayant les mêmes foyers. Soit de plus $\mu_0 > c$, $\nu_0 > b$ et $< c$, $\rho_0 < b$, les limites inférieures des intégrales ε, η, ξ, ou les valeurs des variables pour lesquelles ces intégrales sont nulles, on aura

$$(11)\qquad \left\{\begin{aligned} \varepsilon &= \int_{\mu_0}^{\mu} \frac{d\mu}{\sqrt{\mu^2 - b^2}\,\sqrt{\mu^2 - c^2}}, \\ \eta &= \int_{\nu_0}^{\nu} \frac{d\nu}{\sqrt{\nu^2 - b^2}\,\sqrt{c^2 - \nu^2}}, \\ \xi &= \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{d\rho}{\sqrt{b^2 - \rho^2}\,\sqrt{c^2 - \rho^2}}. \end{aligned}\right.$$

Il s'agit maintenant de prendre ε, η, ξ, pour les trois variables indépendantes de la température V, qui rapportée aux coordonnées x, y, z, doit vérifier l'équation (1). Pour cela, il faut d'abord transformer cette dernière équation en coordonnées elliptiques, μ, ν, ρ.

En effectuant cette transformation, on se rappellera que les équations obtenues en égalant à des constantes les trois fonctions μ, ν, ρ, représentent (en coordonnées rectangulaires) trois surfaces qui se coupent orthogonalement, en sorte que l'on doit poser

$$\frac{d\mu}{dx}\cdot\frac{d\nu}{dx}+\frac{d\nu}{dy}\cdot\frac{d\nu}{dy}+\frac{d\mu}{dz}\cdot\frac{d\nu}{dz}=0,$$
$$\frac{d\mu}{dx}\cdot\frac{d\rho}{dx}+\frac{d\mu}{dy}\cdot\frac{d\rho}{dy}+\frac{d\mu}{dz}\cdot\frac{d\rho}{dz}=0,$$
$$\frac{d\nu}{dx}\cdot\frac{d\rho}{dx}+\frac{d\nu}{dy}\cdot\frac{d\rho}{dy}+\frac{d\nu}{dz}\cdot\frac{d\rho}{dz}=0.$$

On a, en regardant μ, ν, ρ, comme des fonctions de x, y, z,

$$\frac{dV}{dx}=\frac{dV}{d\mu}\frac{d\mu}{dx}+\frac{dV}{d\nu}\frac{d\nu}{dx}+\frac{dV}{d\rho}\frac{d\rho}{dx},$$
$$\begin{aligned}\frac{d^2V}{dx^2}=\frac{d^2V}{d\mu^2}\left(\frac{d\mu}{dx}\right)^2+\frac{d^2V}{d\nu^2}\left(\frac{d\nu}{dx}\right)^2+\frac{d^2V}{d\rho^2}\left(\frac{d\rho}{dx}\right)^2\\
+\frac{dV}{d\mu}\frac{d^2\mu}{dx^2}+\frac{dV}{d\nu}\frac{d^2\nu}{dx^2}+\frac{dV}{d\rho}\frac{d^2\rho}{dx^2}\\
+2\frac{d^2V}{d\mu d\nu}\cdot\frac{d\mu}{dx}\cdot\frac{d\nu}{dx}+2\frac{d^2V}{d\mu d\rho}\cdot\frac{d\mu}{dx}\cdot\frac{d\rho}{dx}+2\frac{d^2V}{d\nu d\rho}\cdot\frac{d\nu}{dx}\cdot\frac{d\rho}{dx}\end{aligned}$$

et par suite, en omettant les termes qui se détruisent,

$$(12)\left\{\begin{aligned}&\frac{d^2V}{dx^2}+\frac{d^2V}{dy^2}+\frac{d^2V}{dz^2}\\
&=\frac{dV}{d\mu}\left(\frac{d^2\mu}{dx^2}+\frac{d^2\mu}{dy^2}+\frac{d^2\mu}{dz^2}\right)+\frac{d^2V}{d\mu^2}\left[\left(\frac{d\mu}{dx}\right)^2+\left(\frac{d\mu}{dy}\right)^2+\left(\frac{d\mu}{dz}\right)^2\right]\\
&+\frac{dV}{d\nu}\left(\frac{d^2\nu}{dx^2}+\frac{d^2\nu}{dy^2}+\frac{d^2\nu}{dz^2}\right)+\frac{d^2V}{d\nu^2}\left[\left(\frac{d\nu}{dx}\right)^2+\left(\frac{d\nu}{dy}\right)^2+\left(\frac{d\nu}{dz}\right)^2\right]\\
&+\frac{dV}{d\rho}\left(\frac{d^2\rho}{dx^2}+\frac{d^2\rho}{dy^2}+\frac{d^2\rho}{dz^2}\right)+\frac{d^2V}{d\rho^2}\left[\left(\frac{d\rho}{dx}\right)^2+\left(\frac{d\rho}{dy}\right)^2+\left(\frac{d\rho}{dz}\right)^2\right]=0.\end{aligned}\right.$$

Or, les fonctions μ, ν, ρ, vérifient l'équation (2) en prenant pour $\psi(\mu)$, $\psi(\nu)$, $\psi(\rho)$ les expressions qui conduisent aux équations (9), et qui sont,

$$\psi(\mu)=\frac{\mu}{\mu^2-b^2}+\frac{\mu}{\mu^2-c^2},$$
$$\psi(\nu)=\frac{\nu}{\nu^2-b^2}-\frac{\nu}{c^2-\nu^2},$$
$$\psi(\rho)=-\frac{\rho}{b^2-\rho^2}-\frac{\rho}{c^2-\rho^2}.$$

On a donc

$$(13)\begin{cases}\dfrac{d^2\mu}{dx^2}+\dfrac{d^2\mu}{dy^2}+\dfrac{d^2\mu}{dz^2}=\left(\dfrac{\mu}{\mu^2-b^2}+\dfrac{\mu}{\mu^2-c^2}\right)\left[\left(\dfrac{d\mu}{dx}\right)^2+\left(\dfrac{d\mu}{dy}\right)^2+\left(\dfrac{d\mu}{dz}\right)^2\right],\\[2mm] \dfrac{d^2\nu}{dx^2}+\dfrac{d^2\nu}{dy^2}+\dfrac{d^2\nu}{dz^2}=\left(\dfrac{\nu}{\nu^2-b^2}-\dfrac{\nu}{c^2-\nu^2}\right)\left[\left(\dfrac{d\nu}{dx}\right)^2+\left(\dfrac{d\nu}{dy}\right)^2+\left(\dfrac{d\nu}{dz}\right)^2\right],\\[2mm] \dfrac{d^2\rho}{dx^2}+\dfrac{d^2\rho}{dy^2}+\dfrac{d^2\rho}{dz^2}=-\left(\dfrac{\rho}{b^2-\rho^2}+\dfrac{\rho}{c^2-\rho^2}\right)\left[\left(\dfrac{d\rho}{dx}\right)^2+\left(\dfrac{d\rho}{dy}\right)^2+\left(\dfrac{d\rho}{dz}\right)^2\right].\end{cases}$$

On a de plus

$$\left(\frac{d\mu}{dx}\right)^2+\left(\frac{d\mu}{dy}\right)^2+\left(\frac{d\mu}{dz}\right)^2=-\frac{1}{\mu^2\left(\dfrac{x^2}{\mu^4}+\dfrac{y^2}{(\mu^2-b^2)^2}+\dfrac{z^2}{(\mu^2-c^2)^2}\right)},$$

et en vertu des équations (6)

$$\frac{x^2}{\mu^4}+\frac{y^2}{(\mu^2-b^2)^2}+\frac{z^2}{(\mu^2-c^2)^2}=\frac{(\mu^2-\nu^2)(\mu^2-\rho^2)}{\mu^2(\mu^2-c^2)(\mu^2-b^2)},$$

d'où enfin

$$(14)\begin{cases}\left(\dfrac{d\mu}{dx}\right)^2+\left(\dfrac{d\mu}{dy}\right)^2+\left(\dfrac{d\mu}{dz}\right)^2=\dfrac{(\mu^2-c^2)(\mu^2-b^2)}{(\mu^2-\nu^2)(\nu^2-\rho^2)},\\[2mm] \left(\dfrac{d\nu}{dx}\right)^2+\left(\dfrac{d\nu}{dy}\right)^2+\left(\dfrac{d\nu}{dz}\right)^2=\dfrac{(\nu^2-b^2)(c^2-\nu^2)}{(\mu^2-\nu^2)(\nu^2-\rho^2)},\\[2mm] \left(\dfrac{d\rho}{dx}\right)^2+\left(\dfrac{d\rho}{dy}\right)^2+\left(\dfrac{d\rho}{dz}\right)^2=\dfrac{(b^2-\rho^2)(c^2-\rho^2)}{(\mu^2-\rho^2)(\nu^2-\rho^2)}.\end{cases}$$

Les équations (13) et (14) donnent le moyen d'éliminer x, y, z, dans l'équation (12), qui devient alors

$$(15)\begin{cases}\dfrac{\sqrt{\mu^2-c^2}\,\sqrt{\mu^2-b^2}\,\dfrac{d\sqrt{\mu^2-c^2}\,\sqrt{\mu^2-b^2}\,\dfrac{dV}{d\mu}}{d\mu}}{(\mu^2-\nu^2)(\mu^2-\rho^2)}\\[2mm] +\dfrac{\sqrt{\nu^2-b^2}\,\sqrt{c^2-\nu^2}\,\dfrac{d\sqrt{\nu^2-b^2}\,\sqrt{c^2-\nu^2}\,\dfrac{dV}{d\nu}}{d\nu}}{(\mu^2-\nu^2)(\nu^2-\rho^2)}\\[2mm] +\dfrac{\sqrt{b^2-\rho^2}\,\sqrt{c^2-\rho^2}\,\dfrac{d\sqrt{b^2-\rho^2}\,\sqrt{c^2-\rho^2}\,\dfrac{dV}{d\rho}}{d\rho}}{(\mu^2-\rho^2)(\nu^2-\rho^2)}=0.\end{cases}$$

Ou enfin, en rapportant la température V aux coordonnées ε, η, ξ,

$$(15)\ bis.\quad (\nu^2-\rho^2)\frac{d^2V}{d\varepsilon^2}+(\mu^2-\rho^2)\frac{d^2V}{d\eta^2}+(\mu^2-\nu^2)\frac{d^2V}{d\xi^2}=0.$$

On doit considérer dans cette équation μ, ν, ρ, comme des fonctions de ε, η, ξ, données par les formules (11). Il s'agit maintenant d'intégrer cette dernière équation (15) *bis*.

§ XXIII.

Les formules (11) donnent

$$\frac{d\mu}{d\varepsilon}=\sqrt{\mu^2-b^2}\sqrt{\mu^2-c^2},\quad \frac{d\sqrt{\mu^2-b^2}}{d\varepsilon}=\mu\sqrt{\mu^2-c^2},$$
$$\frac{d\sqrt{\mu^2-c^2}}{d\varepsilon}=\mu\sqrt{\mu^2-b^2};$$

$$\frac{d\nu}{d\eta}=\sqrt{\nu^2-b^2}\sqrt{c^2-\nu^2},\quad \frac{d\sqrt{\nu^2-b^2}}{d\eta}=\nu\sqrt{c^2-\nu^2},$$
$$\frac{d\sqrt{c^2-\nu^2}}{d\eta}=-\nu\sqrt{\nu^2-b^2};$$

$$\frac{d\rho}{d\xi}=\sqrt{b^2-\rho^2}\sqrt{c^2-\rho^2},\quad \frac{d\sqrt{b^2-\rho^2}}{d\xi}=-\rho\sqrt{c^2-\rho^2},$$
$$\frac{d\sqrt{c^2-\rho^2}}{d\xi}=-\rho\sqrt{b^2-\rho^2}.$$

D'où l'on conclut les identités qui suivent, lesquelles sont importantes pour la question qui nous occupe :

$$(16)\begin{cases}(\nu^2-\rho^2)\left(\frac{d\mu}{d\varepsilon}\right)^2+(\mu^2-\rho^2)\left(\frac{d\nu}{d\eta}\right)^2+(\mu^2-\nu^2)\left(\frac{d\rho}{d\xi}\right)^2\\ \qquad\qquad=(\nu^2-\rho^2)(\mu^2-\rho^2)(\mu^2-\nu^2),\\ (\nu^2-\rho^2)\left(\frac{d\sqrt{\mu^2-b^2}}{d\varepsilon}\right)^2+(\mu^2-\rho^2)\left(\frac{d\sqrt{\nu^2-b^2}}{d\eta}\right)^2\\ \qquad-(\mu^2-\nu^2)\left(\frac{d\sqrt{b^2-\rho^2}}{d\xi}\right)^2=(\nu^2-\rho^2)(\mu^2-\rho^2)(\mu^2-\nu^2),\\ (\nu^2-\rho^2)\left(\frac{d\sqrt{\mu^2-c^2}}{d\varepsilon}\right)^2-(\mu^2-\rho^2)\left(\frac{d\sqrt{c^2-\nu^2}}{d\eta}\right)^2\\ \qquad-(\mu^2-\nu^2)\left(\frac{d\sqrt{c^2-\rho^2}}{d\xi}\right)^2=(\nu^2-\rho^2)(\mu^2-\rho^2)(\mu^2-\nu^2).\end{cases}$$

Il résulte de là que si E, Y, X, sont des fonctions, la première de ε seulement, la seconde de η, la troisième de ξ, satisfaisant aux équations différentielles linéaires du second ordre suivantes :

$$
(17)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{d^2E}{d\varepsilon^2}+\left[P\left(\frac{d\mu}{d\varepsilon}\right)^2+Q\left(\frac{d\sqrt{\mu^2-b^2}}{d\varepsilon}\right)^2\right.\\
&\qquad\qquad\left.+R\left(\frac{d\sqrt{\mu^2-c^2}}{d\varepsilon}\right)^2\right]E=0,\\
&\frac{d^2Y}{d\eta^2}+\left[P\left(\frac{d\nu}{d\eta}\right)^2+Q\left(\frac{d\sqrt{\nu^2-b^2}}{d\eta}\right)^2\right.\\
&\qquad\qquad\left.-R\left(\frac{d\sqrt{c^2-\nu^2}}{d\eta}\right)^2\right]Y=0,\\
&\frac{d^2X}{d\xi^2}+\left[P\left(\frac{d\rho}{d\xi}\right)^2-Q\left(\frac{d\sqrt{b^2-\rho^2}}{d\xi}\right)^2\right.\\
&\qquad\qquad\left.-R\left(\frac{d\sqrt{c^2-\rho^2}}{d\xi}\right)^2\right]X=0,
\end{aligned}
\right.
$$

où P, Q, R, sont des paramètres indéterminés et constants. L'équation (15) *bis* deviendra en y posant $V=EYX$,

$$(\nu^2-\rho^2)(\mu^2-\rho^2)(\mu^2-\nu^2)(P+Q+R)=0,$$

et sera satisfaite si l'on établit entre P, Q, R, la relation

$$(18)\qquad P+Q+R=0.$$

On pourra donc prendre pour une intégrale, la plus générale de l'équation (15) *bis*, une série de la forme

$$V=\Sigma A.EYX,$$

A étant un coefficient constant, et chaque terme de cette série correspondant à un système particulier de valeurs de P, Q, R, vérifiant l'équation (18).

§ XXIV.

Les parois du corps solide proposé sont représentées par des équations très simples dans le système de coordonnées actuel, puisque ces parois sont par hypothèse des surfaces sur lesquelles une des

coordonnées est constante. L'intégrale (19) de V se prêtera donc facilement à l'introduction des conditions données de la surface.

Il est aisé de voir, d'après cela, que tous les cas d'équilibre de température des corps ou des enveloppes solides terminés par des surfaces du second degré soumises à des sources connues de chaleur et de froid, sont ramenés à l'intégration des équations aux différences ordinaires (17), qui, en vertu de l'équation (18), peuvent se mettre sous la forme

$$(17)\ bis \left\{ \begin{aligned} &\frac{d^2E}{d\varepsilon^2} + [Qb^2(\mu^2 - c^2) + Rc^2(\mu^2 - b^2)]E = 0, \\ &\frac{d^2Y}{d\eta^2} = [Qb^2(c^2 - \nu^2) - Rc^2(\nu^2 - b^2)]Y = 0, \\ &\frac{d^2X}{d\xi^2} + [-Qb^2(c^2 - \rho^2) - Rc^2(b^2 - \rho^2)]X = 0, \end{aligned} \right.$$

en y regardant μ, ν, ρ, comme respectivement fonction de ε, η, ξ, d'après les formules (11); ou en μ, ν, ρ :

$$(17)\ ter \left\{ \begin{aligned} &(\mu^2-c^2)(\mu^2-b^2)\frac{d^2E}{d\mu^2} + [\mu(\mu^2-b^2) + \mu(\mu^2-c^2)]\frac{dE}{d\mu} \\ &\qquad + [Qb^2(\mu^2-c^2) + Rc^2(\mu^2-b^2)]E = 0, \\ &(c^2-\nu^2)(\nu^2-b^2)\frac{d^2Y}{d\nu^2} + [-\nu(\nu^2-b^2) + \nu(c^2-\nu^2)]\frac{dY}{d\nu} \\ &\qquad + [Qb^2(c^2-\nu^2) - Rc^2(\nu^2-b^2)]Y = 0, \\ &(c^2-\rho^2)(b^2-\rho^2)\frac{d^2X}{d\rho^2} + [-\rho(b^2-\rho^2) - \rho(c^2-\rho^2)]\frac{dX}{d\rho} \\ &\qquad + [-Qb^2(c^2-\rho^2) - Rc^2(b^2-\rho^2)]X = 0. \end{aligned} \right.$$

§ XXV.

Le cas du refroidissement d'un corps solide homogène terminé par des surfaces du second degré homofocales, peut pareillement se ramener à l'intégration d'équations aux différences ordinaires

La formule générale connue

$$\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{dz^2} = K\frac{dV}{dt},$$

devient en μ, ν, ρ

$$\frac{\sqrt{\mu^2-c^2}\sqrt{\mu^2-b^2}\,\dfrac{d\sqrt{\mu^2-c^2}\,\sqrt{\mu^2-b^2}\,\frac{dV}{d\mu}}{d\mu}}{(\mu^2-\nu^2)(\mu^2-\rho^2)}$$

$$+\frac{\sqrt{c^2-\nu^2}\,\sqrt{\nu^2-b^2}\,\dfrac{d\sqrt{c^2-\nu^2}\,\sqrt{\nu^2-b^2}\,\frac{dV}{d\nu}}{d\nu}}{(\mu^2-\nu^2)(\nu^2-\rho^2)}$$

$$+\frac{\sqrt{b^2-\rho^2}\,\sqrt{c^2-\rho^2}\,\dfrac{d\sqrt{b^2-\rho^2}\,\sqrt{c^2-\rho^2}\,\frac{dV}{d\rho}}{d\rho}}{(\mu^2-\rho^2)(\nu^2-\rho^2)} = K\frac{dV}{dt},$$

et en ε, η, ξ

$$(\nu^2-\rho)\frac{d^2V}{d\varepsilon^2}+(\mu^2-\rho^2)\frac{d^2V}{d\eta^2}-(\mu^2+\nu^2)\frac{d^2V}{d\xi^2}$$
$$=(\mu^2-\nu^2)(\nu^2-\rho^2)(\mu^2-\rho^2)\,K\frac{dV}{dt};$$

en regardant ici μ, ν, ρ, comme respectivement fonction de ε, η, ξ, d'après les équations (11).

Or on satisfera évidemment à cette dernière équation, en posant

$$V = \Sigma A e^{-\frac{\theta^2}{K}t}.EYX.$$

Les fonctions E, Y, X, vérifiant les équations différentielles (17), dans lesquelles les constantes P, Q, R, seront liées au paramètre θ^2, par l'équation

$$P+Q+R+\theta^2=0.$$

Il est facile, si on le trouve convenable, de rétablir dans ces équations les coordonnées μ, ν, ρ; elles prennent alors des formes analogues aux équations (17) *ter*; les derniers termes sont seuls plus compliqués.

§ XXVI.

Dans l'état actuel de l'analyse mathématique, toutes les équations différentielles (17) ne sont pas intégrables d'une manière assez simple, ni assez commode, pour qu'il pût être intéressant de pousser ici plus loin la discussion des cas généraux qui précèdent. Je me contenterai d'avoir fait voir que l'analyse de ces questions physiques ne dépend plus que de l'intégration d'équations aux différences ornaires linéaires et du second ordre.

§ XXVII.

Les équations aux différences ordinaires auxquelles on est conduit en cherchant à traiter les cas plus particuliers de l'équilibre et du mouvement de la chaleur dans les ellipsoïdes de révolution, ou dans un prisme à base elliptique, se déduisent facilement de calculs plus simples, mais analogues aux précédents; je me dispenserai de les présenter ici.

Je ferai remarquer toutefois que le cas de l'équilibre des températures de l'ellipsoïde de révolution autour de son grand axe, lorsque les foyers de chaleur et de froid auxquels il est exposé sont placés symétriquement par rapport à cet axe, est exprimé par l'équation

$$\frac{d(\mu^2 - c^2)\frac{dV}{d\mu}}{d\mu} + \frac{d(\sigma^2 - \varrho^2)\frac{dV}{d\varrho}}{d\varrho} = 0,$$

qui peut s'intégrer assez facilement, comme M. Poisson l'a fait voir dans un de ses mémoires sur le son.

§ XXVIII.

Le cas de l'équilibre calorifique d'un cylindre indéfini à base elliptique se présente sous une forme très simple, en employant pour coordonnées les fonctions

$$\varepsilon = \int_{\mu_0}^{\mu} \frac{d\mu}{\sqrt{\mu^2 - c^2}}, \quad \eta = \int_{\nu_0}^{\nu} \frac{d\nu}{\sqrt{c^2 - \nu^2}},$$

qui expriment les lois des températures stationnaires sur les cylindres elliptiques et hyperboliques, homofocaux et isothermes, que j'ai considérés à la fin de la première partie de ce mémoire; l'équation que la fonction V doit vérifier se réduit alors à

$$\frac{d^2V}{d\varepsilon^2} + \frac{d^2V}{d\eta^2} = 0.$$

En sorte que le cas général du cylindre à base elliptique ou hyperbolique, en équilibre de température, peut se traiter avec la même facilité que celui correspondant du prisme à base rectangulaire, dont la solution est connue.

§ XXIX.

Ainsi, la connaissance des surfaces isothermes du second ordre, et celle des lois qui lient les températures stationnaires sur ces surfaces, indiquent à l'analyse le genre de coordonnées qu'il convient d'employer pour traiter les cas plus généraux de l'équilibre et du mouvement de la chaleur, dans les corps ou les enveloppes solides, terminés par des surfaces du second ordre en contact avec des sources constantes de chaleur et de froid. C'est ce que je m'étais proposé de démontrer dans cette seconde partie.

NOTE DE M. POISSON

RELATIVE AU MÉMOIRE PRÉCÉDENT.

La première équation du paragraphe XIV, savoir :

$$(1)\qquad \int_0^b\int_c^b \frac{(y^2-x^2)dydx}{\sqrt{(b^2-x^2)(c^2-x^2)(y^2-b^2)(c^2-y^2)}}=\tfrac{1}{2}\pi,$$

peut se changer en celle-ci,

$$(2)\qquad \int_0^b \frac{dx}{\sqrt{(b^2-x^2)(c^2-x^2)}}\int_b^c \frac{y^2dy}{\sqrt{(y^2-b^2)(c^2-y^2)}}$$
$$-\int_0^b \frac{x^2dx}{\sqrt{(b^2-x^2)(c^2-x^2)}}\int_b^c \frac{dy}{\sqrt{(y^2-b^2)(c^2-y^2)}}=\tfrac{1}{2}\pi.$$

Pour la vérifier, je fais d'abord

$$x=b\sin\varphi,\qquad dx=b\cos\varphi d\varphi,\qquad b=ac;$$

les limites relatives à φ, qui répondent à $x=0$ et $x=b$, seront $\varphi=0$ et $\varphi=\frac{1}{2}\pi$; et d'après les notations connues de Legendre, il en résultera

$$\int_0^b \frac{dx}{\sqrt{(b^2-x^2)(c^2-x^2)}}=\frac{1}{c}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-a^2\sin^2\varphi}}=\frac{1}{c}F_1a,$$
$$\int_0^b \frac{x^2dx}{\sqrt{(b^2-x^2)(c^2-x^2)}}=c\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-a^2\sin^2\varphi}}$$
$$-c\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\sqrt{1-a^2\sin^2\varphi}\,d\varphi=c(F_1a-E_1a).$$

Je fais ensuite

$$\frac{y^2-b^2}{c^2-y^2}=\cot^2.\theta,\qquad y^2=c^2-(c^2-b^2)\sin^2\theta,$$

$$dy=-\frac{(c^2-b^2)\sin\theta\cos\theta d\theta}{\sqrt{c^2-(c^2-b^2)\sin^2\theta}},\qquad c^2-b^2=c^2\alpha^2,$$

les limites relatives à y, qui répondent à $y=b$ et $y=c$, seront $\theta=\frac{1}{2}\pi$ et $\theta=0$; en les intervertissant et changeant le signe de l'intégrale, on aura

$$\int_b^c \frac{dy}{\sqrt{(y^2-b^2)(c^2-y^2)}}=\frac{1}{c}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{d\theta}{\sqrt{1-\alpha^2\sin^2\theta}}=\frac{1}{c}F_1\alpha,$$

$$\int_b^c \frac{y^2dy}{\sqrt{(y^2-b^2)(c^2-y^2)}}=c\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\sqrt{1-\alpha^2\sin^2\theta}\,d\theta=cE_1\alpha.$$

Au moyen de ces transformations, l'équation (2) devient

$$F_1aE_1\alpha+F_1\alpha E_1a-F_1aF_1\alpha=\tfrac{1}{2}\pi; \tag{3}$$

et en observant que les modules a et α sont complémentaires, on voit qu'elle coïncide avec une équation trouvée par Legendre (*).

La dernière équation du paragraphe XIV devant subsister pour toutes les valeurs de μ, et ayant lieu évidemment pour $\mu=0$, il suffira de vérifier sa différentielle par rapport à μ, ou, ce qui est la même chose, l'équation

$$\int_0^b\int_b^c \frac{(\mu^2-x^2)(\mu^2-y^2)(y^2-x^2)dydx}{\sqrt{(b^2-x^2)(c^2-x^2)(y^2-b^2)(c^2-y^2)}}=\tfrac{1}{2}\pi\mu^4-\tfrac{1}{3}\pi\mu^2(b^2+c^2)+\tfrac{1}{6}\pi b^2c^2.$$

Elle se décompose en trois autres, savoir :

$$\int_0^b\int_b^c \frac{(y^2-x^2)dydx}{\sqrt{(b^2-x^2)(c^2-x^2)(y^2-b^2)(c^2-y^2)}}=\tfrac{1}{2}\pi,$$

$$\int_0^b\int_b^c \frac{(y^4-x^4)dydx}{\sqrt{(b^2-x^2)(c^2-x^2)(y^2-b^2)(c^2-y^2)}}=\tfrac{1}{3}\pi(b^2+c^2),$$

$$\int_0^b\int_b^c \frac{x^2y^2(y^2-x^2)dydx}{\sqrt{(b^2-x^2)(c^2-x^2)(y^2-b^2)(c^2-y^2)}}=\tfrac{1}{6}\pi b^2c^2.$$

La première est la même que l'équation (1), qu'on vient de vérifier; les deux autres peuvent s'écrire ainsi :

(*) *Traité des fonctions elliptiques*, tome Ier, page 60.

$$
(4)\left\{\begin{aligned}
&\int_0^b \frac{dx}{\sqrt{(b^2-x^2)(c^2-x^2)}}\int_b^c \frac{y^4dy}{\sqrt{(y^2-b^2)(c^2-y^2)}}\\
&-\int_0^b \frac{x^4dx}{\sqrt{(b^2-x^2)(c^2-x^2)}}\int_0^c \frac{dy}{\sqrt{(y^2-b^2)(c^2-y^2)}}=\tfrac{1}{3}\pi\,(b^2+c^2),\\
&\int_0^b \frac{x^2dx}{\sqrt{(b^2-x^2)(c^2-x^2)}}\int_b^c \frac{y^4dy}{\sqrt{(y^2-b^2)(c^2-y^2)}}\\
&-\int_0^b \frac{x^4dx}{\sqrt{(b^2-x^2)(c^2-x^2)}}\int_b^c \frac{y^2dy}{\sqrt{(y^2-b^2)(c^2-y^2)}}=\tfrac{1}{6}\pi\, b^2c^2.
\end{aligned}\right.
$$

D'après les transformations précédentes, on a

$$
\int_0^b \frac{x^4dx}{\sqrt{(b^2-x^2)(c^2-x^2)}}=a^4c^3\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\sin^4\varphi\, d\varphi}{\sqrt{1-a^2\sin^2\varphi}},
$$

$$
\int_b^c \frac{y^4dy}{\sqrt{(y^2-b^2)(c^2-y^2)}}=c^3\int_0^{\frac{1}{2}\pi}(1-a^2\sin^2\theta)^{\frac{3}{2}}\,d\theta.
$$

En intégrant par parties, et ayant égard aux limites, on a aussi

$$
\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\sin^2\varphi\cos^2\varphi\, d\varphi}{\sqrt{1-a^2\sin^2\varphi}}=\frac{1}{a^2}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi)\sqrt{1-a^2\sin^2\varphi}\,d\varphi,
$$

et, par conséquent,

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\sin^4\varphi\, d\varphi}{\sqrt{1-a^2\sin^2\varphi}}&=\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\sin^2\varphi\, d\varphi}{\sqrt{1-a^2\sin^2\varphi}}\\
&\quad-\frac{1}{a^2}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{(1-2\sin^2\varphi)(1-a^2\sin^2\varphi)\,d\varphi}{\sqrt{1-a^2\sin^2\varphi}}\\
&=\frac{2(1+a^2)}{a^2}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\sin^2\varphi\, d\varphi}{\sqrt{1-a^2\sin^2\varphi}}-\frac{1}{a^2}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-a^2\sin^2\varphi}}\\
&\quad-2\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\sin^4\varphi\, d\varphi}{\sqrt{1-a^2\sin^2\varphi}},
\end{aligned}
$$

d'où l'on déduit

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin^4\varphi d\varphi}{\sqrt{1-a^2\sin^2\varphi}} = \frac{2(1+a^2)}{3a^2}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin^2\varphi d\varphi}{\sqrt{1-a^2\sin^2\varphi}} - \frac{1}{3a^2}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-a^2\sin^2\varphi}}$$

$$= \frac{2+a^2}{3a^4}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-a^2\sin^2\varphi}} - \frac{2(1+a^2)}{3a^4}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sqrt{1-a^2\sin^2\varphi}\, d\varphi.$$

En même temps, on a

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} (1-a^2\sin^2\theta)^{\frac{3}{2}} d\theta = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{1-a^2\sin^2\theta}} - 2a^2\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin^2\theta d\theta}{\sqrt{1-a^2\sin^2\theta}} + a^4\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin^4\theta d\theta}{\sqrt{1-a^2\sin^2\theta}},$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin^4\theta d\theta}{\sqrt{1-a^2\sin^2\theta}} = \frac{2(1+a^2)}{3a^2}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin^2\theta d\theta}{\sqrt{1-a^2\sin^2\theta}} - \frac{1}{3a^2}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{1-a^2\sin^2\theta}};$$

d'où l'on conclut

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} (1-a^2\sin^2\theta)^{\frac{3}{2}} d\theta = \frac{3-a^2}{3}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{1-a^2\sin^2\theta}} + \frac{2a^2(a^2-2)}{3}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin^2\theta d\theta}{\sqrt{1-a^2\sin^2\theta}}$$

$$= \frac{2(1+a^2)}{3}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sqrt{1-a^2\sin^2\theta}\, d\theta - \frac{a^2}{3}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{1-a^2\sin^2\theta}}.$$

Cela étant, en employant les notations de Legendre, on aura

$$\int_0^b \frac{x^4 dx}{\sqrt{(b^2-x^2)(c^2-x^2)}} = \frac{c^3(2+a^2)}{3} F_1 a - 2\,\frac{c^3(1+a^2)}{3} E_1 a,$$

$$\int_b^c \frac{y^4 dy}{\sqrt{(y^2-b^2)(c^2-y^2)}} = \frac{2c^3(1+a^2)}{3} E_1 a - \frac{a^2 c^3}{3} F_1 a;$$

et comme on a trouvé précédemment

$$\int_0^b \frac{dx}{\sqrt{(b^2-x^2)(c^2-x^2)}} = \frac{1}{c}\,\mathrm{F}_1 a,$$
$$\int_0^b \frac{x^2dx}{\sqrt{(b^2-x^2)(c^2-x^2)}} = c\,(\mathrm{F}_1 a - \mathrm{E}_1 a),$$
$$\int_b^0 \frac{dy}{\sqrt{(y^2-b^2)(c^2-y^2)}} = \frac{1}{c}\,\mathrm{F}_1 \alpha,$$
$$\int_b^0 \frac{y^2dy}{\sqrt{(y^2-b^2)(c^2-y^2)}} = c\,\mathrm{E}_1 \alpha,$$

les équations (4) deviendront

$$\frac{c^2}{3}(1+a^2)(\mathrm{F}_1 a\mathrm{E}_1 \alpha + \mathrm{F}_1 \alpha\mathrm{E}_1 a - \mathrm{F}_1 a\mathrm{F}_1 \alpha) = \tfrac{1}{3}\pi(b^2+c^2),$$
$$\frac{c^4a^2}{3}(\mathrm{F}_1 a\mathrm{E}_1 \alpha + \mathrm{F}_1 \alpha\mathrm{E}_1 a - \mathrm{F}_1 a\mathrm{F}_1 \alpha) = \tfrac{1}{8}\pi b^2c^2;$$

ce qui coïncide, à cause de $b = ac$, avec l'équation (3) citée plus haut.

Addition à la Note de M. Poisson, *insérée dans le Numéro précédent de ce journal* (*) ; *par l'Auteur.*

L'article du Journal de M. Crelle, auquel cette note se rapporte, a pour titre : *Nota de erroribus quibusdam geometricis, qui in theoriâ fonctionum leguntur.* Parmi *ces erreurs,* on cite textuellement deux passages du neuvième chapitre de la seconde partie de la *Théorie des fonctions analytiques.* Or, j'ai dit dans ma note, et je maintiens, que ces deux passages sont parfaitement exacts; et je pense que c'est en se méprenant sur leur véritable signification qu'on a pu les croire erronés. Bien entendu, je suis loin d'attacher une grande importance soit à cette méprise d'un illustre géomètre, soit à la remarque que j'en ai faite.

Avant de citer, dans son article, ces deux passages du chapitre IX, l'auteur avait d'abord rappelé le numéro 35 du chapitre VII. Mais ce qui est contenu dans ce numéro, exact ou non, n'a aucun rapport avec les propositions du chapitre IX. Celles-ci sont relatives aux lieux des centres des sphères osculatrices d'une surface, suivant la direction et dans toute la longueur d'une ligne tracée sur cette surface; dans les numéros 35 et 36 du chapitre VII, Lagrange considère, au contraire, les lieux des centres des cercles osculateurs d'une ligne plane ou à double courbure; et ces deux lieux géométriques sont, en général, essentiellement distincts, et ne coïncident, pour une même ligne donnée, que dans des cas particuliers.

Ayant seulement voulu montrer dans ma note qu'il n'y a aucune

(*) La première partie de cette *Addition* a été écrite à l'occasion des remarques qu'un membre de l'Académie a faites dans la séance du 17 avril dernier, sur la note dont il s'agit.

erreur dans les deux passages cités du chapitre IX, je n'ai point eu à m'occuper du numéro 35 du chapitre VII, et je me suis dispensé d'en parler. Mais il est vrai de dire que l'analyse contenue dans ce numéro et dans le suivant, présente quelque chose d'incomplet, et même d'équivoque. Lagrange détermine la condition pour que les centres des cercles osculateurs d'une courbe donnée forment une développée proprement dite, c'est-à-dire une ligne dont les tangentes coupent à angle droit la courbe proposée; puis il dit que les courbes planes satisfont toujours à cette condition; mais il n'ajoute pas qu'elle n'est remplie que pour elles seules; et cette omission pourrait faire croire qu'il ne serait pas impossible qu'une ligne à double courbure eût pour développée, le lieu de ses centres de courbure. Or, non-seulement on voit, par des considérations géométriques très simples, que cette propriété n'appartient qu'à des courbes planes; mais Lagrange pouvait aussi le conclure de différentes manières, de sa propre analyse, et, par exemple, en montrant, comme M. Lacroix dans son *Traité du Calcul différentiel* (*), que l'équation différentielle du troisième ordre, qui doit être satisfaite pour que cette propriété ait lieu, revient à celle qui exprime que trois éléments consécutifs quelconques de la courbe proposée sont dans un même plan, ou que cette courbe est plane. À la fin du chapitre VII, Lagrange se borne à renvoyer, pour de plus grands détails sur ce qui concerne les développées, au Mémoire de Monge, où leur théorie est exposée dans toute sa généralité.

En un point donné M sur une surface quelconque, le paraboloïde osculateur, qui a son sommet en ce point, est *elliptique* ou *hyperbolique*, selon que les deux courbures principales de la surface en ce même point, sont tournées dans le même sens ou en sens contraires. Les rayons de ces deux courbures étant représentés par α et β, et en prenant leurs plans et le plan tangent pour ceux des coordonnées x, y, z, la normale pour axe des z, le point M pour origine; l'équation du paraboloïde sera

$$z = \frac{x^2}{\alpha} \pm \frac{y^2}{\beta};$$

(*) Voyez la première édition publiée en 1797, ou le n° 353 de la seconde édition.

le signe supérieur ayant lieu quand il est elliptique, et le signe inférieur quand il sera hyperbolique. Il se changera en un cylindre, lorsque l'une des deux sections de courbure principale sera une ligne droite, c'est-à-dire lorsque α ou $\mathcal{C}$ sera infini, et en un plan, quand ces deux sections seront rectilignes, ou qu'on aura $\alpha = \infty$ et $\mathcal{C} = \infty$.

L'expression de l'ordonnée z d'un point de la surface différent de M, pourra, en général, se développer en série ordonnée suivant les puissances et les produits de x et y. Pour les cas d'exception, je renverrai à mon Mémoire cité dans la note. En désignant par Δ, la différence entre cette ordonnée et celle du paraboloïde, qui répondent aux mêmes valeurs de x et y, on aura

$$\Delta = gx^3 + hx^2y + kxy^2 + ly^3 + \mathrm{R};$$

g, h, k, l, étant des coefficients constants qui dépendront de la forme de la surface, et R étant une série de termes de quatre ou d'un plus grand nombre de dimensions, par rapport à x et y. Pour qu'il y ait contact du troisième ordre, suivant une section normale, entre la surface donnée et le paraboloïde, il faudra que la somme des quatre premiers termes de la valeur de Δ, soit zéro suivant cette direction. Si l'on appelle m la tangente de l'angle compris entre ce plan et celui de x et z, et en faisant $y = mx$, on aura donc

$$gm^3 + hm^2 + km + l = 0,$$

pour l'équation du troisième degré, dont il a été question à la fin de la note. Lorsque ses trois racines seront réelles, il y aura au point M de la surface donnée, trois directions pour lesquelles le contact parabolique du second ordre s'élèvera au troisième (*); il y en aura une seule, quand l'équation n'aura qu'une racine réelle; une seule aussi, lorsque ses trois racines seront égales, et deux dans le cas de deux racines égales. Dans tous les cas, le contact du troisième ordre aura lieu également, suivant ces directions particulières, entre la surface donnée

(*) Par erreur, on a mis troisième et quatrième ordre, en haut de la page 144 de la note, au lieu de deuxième et troisième.

et un ellipsoïde osculateur, quelle que soit la grandeur de son troisième axe, qui reste indéterminée.

En changeant l'origine et la direction des coordonnées, et mettant ensuite dans l'équation précédente, à la place de chacun des coefficients g, h, k, l, sa valeur en fonction des nouvelles coordonnées, tirée de l'équation de la surface donnée, et pour m le rapport entre les différentielles de deux de ces coordonnées, on obtiendra l'équation différentielle des lignes tracées sur cette surface et suivant lesquelles elle a un contact du troisième ordre avec les ellipsoïdes osculateurs. Il serait intéressant de connaître la figure de ces lignes à la surface de la terre, et de savoir s'il en existe trois ou une seule dans les différentes parties du globe. Quoique le sphéroïde terrestre diffère peu d'une sphère, ces lignes peuvent s'écarter beaucoup des méridiens; car leur direction en chaque point ne dépend pas des grandeurs absolues de g, h, k, l, qui sont de très petites quantités, mais des rapports de ces coefficients, qui peuvent être des nombres quelconques.

MÉMOIRE

SUR L'INTERPOLATION;

PAR M. AUG. CAUCHY (*).

Dans les applications de l'analyse à la Géométrie, à la Physique, à l'Astronomie... deux sortes de questions se présentent à résoudre, et il s'agit 1° de trouver les lois générales des figures et des phénomènes, c'est-à-dire la forme générale des équations qui existent entre les diverses variables, par exemple, entre les coordonnées des courbes et des surfaces, entre les vitesses, les temps, les espaces parcourus par les mobiles, etc...; 2° de fixer en nombres les valeurs des paramètres ou constantes arbitraires qui entrent dans l'expression de ces mêmes lois, c'est-à-dire les valeurs des coefficients inconnus que renferment les équations trouvées. Parmi les variables on distingue ordinairement, comme l'on sait, celles qui peuvent varier indépendamment les unes des autres, et que l'on nomme pour cette raison variables indépendantes, d'avec celles qui s'en déduisent par la résolution des diverses équations, et qui se nomment fonctions des variables indépendantes. Considérons en particulier une de ces fonctions, et supposons qu'elle se déduise des variables indépendantes par une équation ou formule qui renferme un certain nombre de coefficients. Un pareil nombre d'observations ou d'expériences, dont chacune fournira une valeur particulière de la fonction correspon-

(*) Ce Mémoire a été autographié en septembre 1835 et envoyé à cette époque à l'Académie des Sciences. On l'imprime ici pour la première fois, du consentement de l'auteur. (J. L.)

dante à un système particulier de valeurs des variables indépendantes, suffira pour la détermination numérique de tous ces coefficients; et, cette détermination faite, on pourra obtenir sans difficulté de nouvelles valeurs de la fonction correspondantes à de nouveaux systèmes de valeurs des variables indépendantes, et résoudre ainsi ce qu'on appelle le problème de l'interpolation. Par exemple, si l'ordonnée d'une courbe se trouve exprimée en fonction de l'abscisse par une équation qui renferme trois paramètres, il suffira de connaître trois points de la courbe, c'est-à-dire trois valeurs particulières de l'ordonnée correspondantes à trois valeurs particulières de l'abscisse, pour déterminer les trois paramètres; et, cette détermination effectuée, on pourra sans peine tracer la courbe par points en calculant les coordonnées d'un nombre aussi grand que l'on voudra de nouveaux points situés sur les arcs de cette courbe compris entre les points donnés. Ainsi, envisagé dans toute son étendue, le problème de l'interpolation consiste à déterminer les coefficients ou constantes arbitraires que renferme l'expression des lois générales des figures ou des phénomènes, d'après un nombre au moins égal de points donnés, ou d'observations, ou d'expériences. Dans une foule de questions les constantes arbitraires entrent au premier degré seulement dans les équations qui les renferment. C'est précisément ce qui arrive lorsqu'une fonction est développable en une série convergente ordonnée suivant les puissances ascendantes ou descendantes d'une variable indépendante, ou bien encore suivant les sinus ou cosinus des multiples d'un même arc. Alors il s'agit de déterminer les coefficients de ceux des termes de la série que l'on ne peut négliger sans avoir à craindre qu'il en résulte une erreur sensible dans les valeurs de la fonction. Dans le petit nombre de formules qui ont été proposées pour cet objet, on doit distinguer une formule tirée du calcul des différences finies, mais applicable seulement au cas où les diverses valeurs de la variable indépendante sont équidifférentes entre elles, et la formule de Lagrange applicable, quelles que soient ces valeurs, à des séries ordonnées suivant les puissances ascendantes de la variable indépendante. Toutefois cette dernière formule elle-même se complique de plus en plus à mesure que l'on veut conserver dans le développement de la fonction en série un plus grand nombre de

termes; et ce qu'il y a de plus fâcheux, c'est que les valeurs approchées des divers ordres correspondantes aux divers cas où l'on conserverait dans la série un seul terme, puis deux termes, puis trois termes.... s'obtiennent par des calculs à peu près indépendants les uns des autres, en sorte que chaque nouvelle approximation, loin d'être rendue facile par celles qui la précèdent, demande au contraire plus de temps et de travail. Frappé de ces inconvénients, et conduit par mes recherches sur la dispersion de la lumière à m'occuper de nouveau du problème de l'interpolation, j'ai eu le bonheur de rencontrer pour la solution de ce problème une nouvelle formule qui, sous le double rapport de la certitude des résultats et de la facilité avec laquelle on les obtient, me paraît avoir sur les autres formules des avantages tellement incontestables, que je ne doute guère qu'elle ne soit bientôt d'un usage général parmi les personnes adonnées à la culture des sciences physiques et mathématiques.

Pour donner une idée de cette formule, je suppose qu'une fonction de x, représentée par y, soit développable en une série convergente ordonnée suivant les puissances ascendantes ou descendantes de x, ou bien encore suivant les sinus ou cosinus des arcs multiples de x, ou même plus généralement suivant d'autres fonctions de x que je représenterai par

$$\varphi(x)=u, \quad \chi(x)=v, \quad \psi(x)=w, \ldots,$$

en sorte qu'on ait

$$y=au+bv+cw+\ldots, \tag{1}$$

a, b, c... désignant des coefficients constants. Il s'agit de savoir, 1° combien de termes on doit conserver dans le second membre de l'équation (1) pour obtenir une valeur de y suffisamment approchée, dont la différence avec la valeur exacte soit insensible et comparable aux erreurs que comportent les observations; 2° de fixer en nombres les coefficients des termes conservés, ou, ce qui revient au même, de trouver la valeur approchée dont nous venons de parler. Les données du problème sont un nombre suffisamment grand de valeurs de y représentées par

$$y_1, y_2 \ldots y_n,$$

et correspondantes à un pareil nombre n de valeurs de x représentées par x_1, x_2, ... x_n, par conséquent aussi à un pareil nombre de valeurs de chacune des fonctions u, v, w, ..., valeurs que je représenterai de même par

$$u_1,\ u_2,\ \ldots\ u_n$$

pour la fonction u, par

$$v_1,\ v_2,\ \ldots\ v_n$$

pour la fonction v, etc... Ainsi, pour résoudre le problème, on aura entre les coefficients inconnus a, b, c, ... les n équations du premier degré

$$(2)\qquad \begin{cases} y_1 = au_1 + bv_1 + cw_1 + \ldots, \\ y_2 = au_2 + bv_2 + cw_2 + \ldots, \\ \vdots \\ y_n = au_n + bv_n + cw_n + \ldots, \end{cases}$$

qui, si l'on désigne par i l'un quelconque des nombres entiers

$$1,\ 2,\ \ldots\ n,$$

se trouveront toutes comprises dans la formule générale

$$(3)\qquad y_i = au_i + bv_i + cw_i + \ldots.$$

On effectuera la première approximation en négligeant les coefficients b, c, ..., ou, ce qui revient au même, en réduisant la série à son premier terme. Alors la valeur générale approchée de y sera

$$(4)\qquad y = au;$$

et, pour déterminer le coefficient a, on aura le système des équations

$$(5)\qquad y_1 = au_1,\ y_2 = au_2,\ \ldots\ y_n = au_n.$$

Les diverses valeurs de a, que l'on peut déduire de ces équations (5) considérées chacune à part, ou combinées entre elles, seraient toutes précisément égales si les valeurs particulières de y, que nous supposons données par l'observation, étaient rigoureusement exactes. Mais il

n'en est pas anisi dans la pratique où les observations comportent des erreurs renfermées entre certaines limites; et alors il importe de combiner entre elles les équations (5) de manière que, dans les cas les plus défavorables, l'influence exercée sur la valeur du coefficient a par les errèurs commises sur les valeurs de $y_1, y_2, \ldots, y_n$ soit la moindre possible. Or, les diverses combinaisons que l'on peut faire des équations (5) pour en tirer une nouvelle équation du premier degré, par rapport à a, fournissent toutes des valeurs de a comprises dans la formule générale

$$(6) \qquad a = \frac{k_1 y_1 + k_2 y_2 + \ldots k_n y_n}{k_1 u_1 + k_2 u_2 + \ldots k_n u_n},$$

que l'on obtient en ajoutant membre à membre les équations (5) après les avoir respectivement multipliées par des facteurs constants k_1, $k_2 \ldots$, k_n. Il y a plus; comme la valeur de a déterminée par l'équation (6) ne varie pas quand on fait varier simultanément les facteurs $k_1, k_2 \ldots, k_n$ dans le même rapport, il est clair que parmi ces facteurs, le plus grand (abstraction faite du signe) peut toujours être censé réduit à l'unité. Remarquons enfin que, si l'on nomme

$$\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_n,$$

les erreurs respectivement commises dans les observations sur les valeurs de

$$y_1, y_2, \ldots, y_n,$$

la formule précédente (6) fournira pour a une valeur approchée, dont la différence avec la véritable sera

$$(7) \qquad \frac{k_1 \epsilon_1 + k_2 \epsilon_2 + \ldots + k_n \epsilon_n}{k_1 u_1 + k_2 u_2 + \ldots + k_n u_n}.$$

Il faut maintenant choisir $k_1, k_2, \ldots, k_n$ de telle sorte que, dans les cas les plus défavorables, la valeur numérique de l'expression (7) soit la moindre possible.

Représentons par

$$\text{S}u_i$$

la somme des diverses valeurs numériques de u_i, c'est-à-dire ce que

devient le polynome

$$\pm u_1 \pm u_2 \pm \ldots \pm u_n$$

quand on y dispose de chaque signe de manière à rendre chaque terme positif. Représentons par $S\epsilon_i$ non la somme des valeurs numériques $\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_n$, mais ce que devient la somme Su_i, quand on y remplace chaque valeur de u_i par la valeur correspondante de ϵ_i. Si l'on réduit à $+1$ ou à -1 chacun des coefficients $k_1, k_2, \ldots, k_n$, en choisissant les signes de manière que, dans le dénominateur de la fraction

$$\frac{k_1\epsilon_1 + k_2\epsilon_2 + \ldots + k_n\epsilon_n}{k_1u_1 + k_2u_2 + \ldots + k_nu_n}$$

tous les termes soient positifs, cette fraction sera réduite à

$$\frac{S\epsilon_i}{Su_i}; \tag{8}$$

et elle offrira une valeur numérique tout au plus égale au rapport

$$\frac{E}{Su_i},$$

si l'on désigne par E la somme des valeurs numériques de ϵ_i, ou, ce qui revient au même, la valeur numérique de $S\epsilon_i$ dans le cas le plus défavorable. D'autre part, en attribuant à $k_1, k_2, \ldots, k_n$ des valeurs inégales dont la plus grande (abstraction faite des signes) soit l'unité, on obtiendra pour dénominateur de la fraction une quantité dont la valeur numérique sera évidemment inférieure à Su_i, tandis que la valeur numérique du numérateur pourra s'élever jusqu'à la limite E; ce qui arrivera effectivement si les erreurs $\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_n$ sont toutes nulles, à l'exception de celle qui sera multipliée par un facteur égal, au signe près, à l'unité. Il en résulte que la plus grande erreur à craindre sur la valeur de a déterminée par la formule

$$a = \frac{k_1y_1 + k_2y_2 + \ldots k_ny_n}{k_1u_1 + k_2u_2 + \ldots k_nu_n}$$

sera la moindre possible si l'on pose généralement

$$k_i = \pm 1,$$

en choisissant les signes de manière que dans le polynome

$$k_1u_1 + k_2u_2 + \ldots + k_nu_n$$

tous les termes soient positifs. Alors cette formule donnera

$$(9) \qquad a = \frac{Sy_i}{Su_i},$$

Sy_i étant ce que devient la somme Su_i quand on y remplace chaque valeur de u_i par la valeur correspondante de y_i, et l'équation $y = au$ deviendra

$$(10) \qquad y = \frac{u}{Su_i} Sy_i.$$

Si l'on fait pour abréger

$$(11) \qquad \alpha = \frac{u}{Su_i},$$

on aura simplement

$$(12) \qquad y = \alpha \, Sy_i.$$

Si l'on supposait généralement $u = 1$, l'équation $y = au$, réduite à

$$y = a,$$

exprimerait que la valeur de y est constante; et comme on aurait alors

$$\alpha = \frac{u}{Su_i} = \frac{1}{n},$$

la formule $y = \alpha \, Sy_i$ donnerait

$$y = \frac{1}{n} Sy_i.$$

Donc alors on devrait prendre pour valeur approchée de y la moyenne arithmétique entre les valeurs observées; et la plus grande erreur à craindre serait plus petite pour cette valeur approchée que pour toute autre. Cette propriété des moyennes arithmétiques, jointe à la facilité avec laquelle on les calcule, justifie complétement l'usage où l'on est de leur accorder la préférence dans l'évaluation des

constantes arbitraires qui peuvent être déterminées directement par l'observation.

Soit maintenant Δy le reste qui doit compléter la valeur approchée de y fournie par l'équation

$$(12) \qquad y = \alpha\, Sy_i,$$

en sorte qu'on ait

$$(13) \qquad y = \alpha\, Sy_i + \Delta y.$$

Posons de même

$$(14) \qquad v = \alpha Sv_i + \Delta v,\quad w = \alpha Sw_i + \Delta w,\ \text{etc.}\ldots$$

On tirera de la formule $y_i = au_i + bv_i + cw_i + \text{etc.}\ldots$,

$$(15) \qquad Sy_i = aSu_i + bSv_i + cSw_i + \text{etc.}\ldots;$$

puis de cette dernière, multipliée par α, et soustraite de l'équation (1),

$$(16) \qquad \Delta y = b\Delta v + c\Delta w + \text{etc.}\ldots$$

Soient d'ailleurs α_i, Δy_i, Δv_i, Δw_i,... ce que deviennent les valeurs de α, Δy, Δv, Δw,... tirées des équations (11), (13) et (14), quand on y remplace x par x_i, i étant l'un des nombres entiers 1, 2,... n. Si les valeurs de

$$\Delta y_1,\ \Delta y_2\ldots,\ \Delta y_n$$

sont très petites, et comparables aux erreurs que comportent les observations, il sera inutile de procéder à une seconde approximation, et l'on pourra s'en tenir à la valeur approchée de y fournie par l'équation $y = \alpha Sy_i$. Si le contraire a lieu, il suffira, pour obtenir une approximation nouvelle, d'opérer sur la formule (16) qui donne $\Delta y = b\Delta v + \text{etc.}$, comme dans la première approximation l'on a opéré sur la formule (1) $y = au + \text{etc.}$

Cela posé, désignons par

$$S'\Delta v_i$$

la somme des valeurs numériques de Δv_i, et par

$$S'\Delta y_i,\ S'\Delta w_i,\ \text{etc.}\ldots$$

les polynomes dans lesquels se change la somme $S'\Delta v_i$ quand on y remplace chaque valeur de Δv_i par la valeur correspondante de Δy_i ou de $\Delta w_i \ldots$; soit enfin

$$\mathfrak{C} = \frac{\Delta v}{S'\Delta v_i}:$$

si l'on peut, sans erreur sensible, négliger dans la série (1) le coefficient c du troisième terme et ceux des termes suivants, on devra prendre pour valeur approchée de Δy

$$(18) \qquad \Delta y = \mathfrak{C} S'\Delta y_i.$$

Soit $\Delta^2 y$ le reste du second ordre qui doit compléter cette valeur approchée, et faisons en conséquence

$$(19) \qquad \Delta y = \mathfrak{C} S'\Delta y_i + \Delta^2 y.$$

Posons de même

$$(20) \qquad \Delta w = \mathfrak{C} S'\Delta w_i + \Delta^2 w,\ \text{etc.}\ldots:$$

on tirera successivement, de la formule (16),

$$(21) \qquad \Delta y_i = b\Delta v_i + c\Delta w_i + \text{etc.}\ldots$$

$$(22) \qquad S'\Delta y_i = bS'\Delta v_i + cS'\Delta w_i + \text{etc.}\ldots;$$

puis cette dernière, multipliée par $\mathfrak{C}$ et retranchée de l'équation (19),

$$(23) \qquad \Delta^2 y = c\Delta^2 w + \text{etc.}\ldots$$

Soient d'ailleurs $\mathfrak{C}_i$, $\Delta^2 y_i$, $\Delta^2 w_i, \ldots$, ce que deviennent les valeurs de $\mathfrak{C}$, $\Delta^2 y$, $\Delta^2 w, \ldots$, tirées des équations (17), (19) et (20), quand on y remplace x par x_i, i étant l'un des nombres entiers $1, 2, \ldots, n$. Si les valeurs de

$$\Delta^2 y_1,\ \Delta^2 y_2, \ldots,\ \Delta^2 y_n$$

sont très petites et comparables aux erreurs que comportent les observations, il sera inutile de procéder à une nouvelle approximation, et

l'on pourra s'en tenir à la valeur approchée de Δy fournie par l'équation (18). Si le contraire a lieu, il suffira, pour obtenir une troisième approximation, d'opérer sur la formule (23) qui donne $\Delta^2 y$, comme l'on a opéré dans la première approximation sur la formule (1). En continuant de la sorte, on obtiendra la règle suivante:

L'inconnue y, fonction de la variable x, étant supposée développable en une série convergente

$$\text{(I)} \qquad au + bv + cw + \ldots$$

où u, v, w,..., représentent des fonctions données de la même variable, si l'on connaît n valeurs particulières de y correspondantes à n valeurs particulières

$$x_1, \; x_2, \ldots, \; x_n$$

de x, si d'ailleurs on nomme i l'un quelconque des nombres entiers $1, 2, \ldots, n$, et y_i, u_i, v_i,..., ce que deviennent y, u, v,..., quand on y remplace x par x_i; alors, pour obtenir la valeur générale de y avec une approximation suffisante, on déterminera d'abord le coefficient a à l'aide de la formule

$$\text{(II)} \qquad u = aSu_i,$$

dans laquelle Su_i désigne la somme des valeurs numériques de u_i, et la différence du premier ordre Δy à l'aide de la formule

$$\text{(III)} \qquad y = aSy_i + \Delta y.$$

Si les valeurs particulières de Δy, représentées par Δy_1, $\Delta y_2, \ldots \Delta y_n$, sont comparables aux erreurs d'observation, on pourra négliger Δy et réduire la valeur approchée de y à

$$aSy_i.$$

Dans le cas contraire, on déterminera $\mathfrak{C}$ à l'aide des formules

$$\text{(IV)} \qquad v = aSv_i + \Delta v, \quad \Delta v = \mathfrak{C}S'\Delta v_i,$$

$S'\Delta v_i$ étant la somme des valeurs numériques de Δv_i, et la différence

du second ordre $\Delta^2 y$ à l'aide de la formule

$$\text{(V)} \qquad \Delta y = 6S'\Delta y + \Delta^2 y.$$

Si les valeurs particulières de $\Delta^2 y$, représentées par Δy_1, $\Delta^2 y_2, \ldots$, $\Delta^2 y_n$, sont comparables aux erreurs d'observation, l'on pourra négliger $\Delta^2 y$ et réduire en conséquence la valeur approchée de y à $\alpha S y_i + 6\alpha S'\Delta y_i$.

Dans le cas contraire, on déterminera γ par les formules

$$\text{(VI)} \quad w = \alpha S w_i + \Delta w, \quad \Delta w = 6S'\Delta w_i + \Delta^2 w, \quad \Delta^2 w = \gamma S''\Delta^2 w_i,$$

$S''\Delta^2 w_i$ étant la somme des valeurs numériques de $\Delta^2 w_i$, et la différence du troisième ordre $\Delta^3 y$ par la formule

$$\text{(VII)} \qquad \Delta^2 y = \gamma S''\Delta^2 y_i + \Delta^3 y, \text{ etc.} \ldots$$

Ainsi, en définitive, en supposant les coefficients α, 6, $\gamma, \ldots$ déterminés par le système de ces équations, etc., ..., on devra calculer les différences des divers ordres représentées par

$$\Delta y, \ \Delta^2 y, \ \Delta^3 y, \ldots,$$

ou plutôt leurs valeurs particulières correspondantes aux valeurs x_1, $x_2, \ldots, x_n$ de la variable x, jusqu'à ce que l'on parvienne à une différence dont les valeurs particulières soient comparables aux erreurs d'observation. Alors il suffira d'égaler à zéro la valeur de cette différence tirée du système des équations (III), (V), (VII)..., pour obtenir avec une approximation suffisante la valeur de y. Cette valeur générale sera donc

$$y = \alpha S y_i, \text{ ou } y = \alpha S y_i + 6S'\Delta y_i, \text{ ou etc.} \ldots,$$

suivant que l'on pourra, sans erreur sensible, réduire la série à son premier terme, ou à ses deux premiers termes.... Donc, si l'on nomme m le nombre des termes conservés, le problème de l'interpolation sera résolu par la formule

$$y = \alpha S y_i + 6S'\Delta y_i + \gamma S''\Delta^2 y_i + \text{etc.} \ldots,$$

le second membre étant prolongé jusqu'au terme qui renferme $\Delta^{m-1} y_i$.

Il est bon d'observer que des formules précédentes on tire non-seulement

$$S\alpha_i = 1;\ S\beta_i = 0,\ S'\beta_i = 1;\ S\gamma_i = 0,\ S'\gamma_i = 0,\ S''\gamma_i = 1;\ \text{etc.}\ldots;$$

mais encore

$$S\Delta v_i = 0;\ S\Delta w_i = 0,\ S\Delta^2 w_i = 0,\ S'\Delta^2 w_i = 0,\ \text{etc.}\ldots,$$

et

$$S\Delta y_i = 0;\ S\Delta^2 y_i = 0,\ S'\Delta^2 y_i = 0;\ S\Delta^3 y_i = 0,\ S'\Delta^3 y_i = 0,\ S''\Delta^3 y_i = 0,\ldots$$

Ces dernières formules sont autant d'équations de condition auxquelles doivent satisfaire les valeurs particulières de α, β, $\gamma,\ldots$, ainsi que celles des différences des divers ordres de u, v, $w,\ldots$, y; et il en résulte qu'on ne peut commettre dans le calcul de ces valeurs particulières aucune erreur de chiffres sans en être averti par le seul fait que les équations de condition cessent d'être vérifiées.

En résumé, les avantages des nouvelles formules d'interpolation sont les suivants :

1°. Elles s'appliquent aux développements en séries, quelle que soit la loi suivant laquelle les différents termes se déduisent les uns des autres, et quelles que soient les valeurs équidifférentes ou non de la variable indépendante.

2°. Les nouvelles formules sont d'une application très facile, surtout quand on emploie les logarithmes pour le calcul des rapports α, β, $\gamma,\ldots$, et des produits de ces rapports par les sommes des diverses valeurs des fonctions ou de leurs différences. Alors, en effet, toutes les opérations se réduisent à des additions ou à des soustractions.

3° A l'aide de nos formules les approximations successives s'exécutent avec une facilité de plus en plus grande, attendu que les différences des divers ordres vont généralement en diminuant.

4°. Nos formules permettent d'introduire à la fois dans le calcul les nombres fournis par toutes les observations données, et d'augmenter ainsi l'exactitude des résultats en faisant concourir à ce but un très grand nombre d'expériences.

5°. Elles offrent encore cet avantage, qu'à chaque approximation nouvelle, les valeurs qu'elles fournissent pour les coefficients $a, b, c,\ldots$

sont précisément celles pour lesquelles la plus grande erreur à craindre est la moindre possible.

6°. Nos formules indiquent d'elles-mêmes le moment où le calcul doit s'arrêter, en fournissant alors des différences comparables aux erreurs d'observation.

7°. Enfin les quantités qu'elles déterminent satisfont à des équations de condition qui ne permettent pas de commettre la plus légère faute de calcul, sans que l'on s'en aperçoive presque immédiatement.

On trouvera dans les nouveaux exercices de mathématiques de nombreuses applications de nos formules d'interpolation.

NOTE

Sur un passage de la Mécanique céleste, *relatif à la Théorie de la Figure des Planètes;*

PAR J. LIOUVILLE.

I.

On s'est beaucoup occupé de la recherche des formes permanentes qui peuvent convenir à une masse liquide dont les molécules s'attirent l'une l'autre en raison inverse du carré des distances et tournent autour d'un axe fixe avec une vitesse angulaire constante. Ce problème, qui se rattache à la théorie de la figure des planètes, devait naturellement intéresser les géomètres; mais il n'a pas été résolu par eux d'une manière générale. On s'est borné d'abord à démontrer la possibilité de certaines figures d'équilibre. Quand la vitesse angulaire de rotation est au-dessous d'une limite indiquée par le calcul, on sait depuis long-temps que deux formes au moins sont possibles, toutes deux comprises parmi les ellipsoïdes de révolution. Laplace a observé de plus que, pour une impulsion primitive donnée, il existe toujours un seul ellipsoïde de révolution satisfaisant aux conditions d'équilibre du liquide. Mais ces mêmes conditions peuvent être remplies aussi, dans certains cas, par un ellipsoïde à trois axes inégaux. Ce dernier théorème est dû à M. Jacobi. J'en ai donné dans le XXIII^e cahier du *Journal de l'École polytechnique* une démonstration très simple.

Quand on envisage le problème dont nous nous occupons ici, sous le point de vue de ses applications à la physique céleste, la question

se simplifie beaucoup à cause du peu de différence qui existe entre la figure d'une sphère et celle des planètes et des satellites. En négligeant le carré de cette différence, on prouve en effet que la figure d'équilibre de la masse fluide est toujours celle d'un ellipsoïde de révolution dont le petit axe coïncide avec l'axe fixe. Pour démontrer cette proposition importante, Laplace a employé deux méthodes distinctes que l'on trouve exposées au livre 3ᵉ de la *Mécanique céleste*. La première de ces deux méthodes repose sur la possibilité de développer une fonction Y de deux variables μ et ϖ en une série que les géomètres désignent ordinairement par $Y_0 + Y_1 + Y_2 +$ etc., et dont les divers termes jouissent de plusieurs belles propriétés aujourd'hui bien connues. Après l'avoir donnée, Laplace ajoute : « L'analyse précédente nous a conduits à la figure d'une masse fluide homogène en » équilibre, sans employer d'autres hypothèses que celle d'une figure » très peu différente de la sphère. Elle fait voir que la figure elliptique » qui, par le chapitre précédent, satisfait à cet équilibre, est la seule » alors qui lui convienne. Mais comme la réduction du rayon du sphé- » roïde en une série de la forme $a(1+\alpha Y_0+\alpha Y_1+\ldots)$ peut faire naître » quelques difficultés, nous allons démontrer directement et indépen- » damment de cette réduction que la forme elliptique est la seule figure » d'équilibre d'une masse fluide homogène, douée d'un mouvement de » rotation, ce qui, en confirmant les résultats de l'analyse précédente, » servira en même temps à dissiper les doutes que l'on pourrait élever » contre la généralité de cette analyse. » Mais cette seconde solution de l'illustre auteur nous paraît incomplète, et c'est à en montrer l'imperfection que la présente note sera consacrée. Le vice de la méthode de Laplace provient de ce qu'il n'a pas démontré *à priori* que la quantité H dont il fait usage (*Mécanique céleste*, tome II, page 75) est une quantité finie : s'il existait une figure d'équilibre pour laquelle on eût $H = \infty$ (ce qui arriverait par exemple si la variation du rayon du sphéroïde était proportionnelle au cube du cosinus de la latitude), cette figure échapperait nécessairement à son analyse. C'est ce que l'on verra dans le numéro suivant où je m'efforcerai de développer mon objection avec la clarté désirable. Je montrerai ensuite comment on peut en effet résoudre la question proposée sans réduire en série le rayon du sphéroïde. Cette dernière partie de mon travail intéressera peut-être

les géomètres, qui savent combien il est utile de traiter sous plusieurs points de vue les questions mathématiques délicates.

II.

En cherchant à déterminer la figure permanente d'une masse liquide homogène, dont les molécules s'attirent l'une l'autre avec une force inversement proportionnelle au carré des distances, et qui tourne autour d'un axe fixe passant par son centre de gravité, Laplace est conduit (*Mécanique céleste,* tome II, page 75) à l'équation

$$\text{(A)} \qquad C = \frac{4\alpha\pi}{3}.\,Y - \alpha\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} Y' dp dq' \sin p - \tfrac{1}{2}g(1-\mu^2):$$

μ représente une variable comprise entre -1 et $+1$; c'est le cosinus de l'angle que fait avec l'axe de révolution un rayon vecteur quelconque : Y est une fonction inconnue de μ, et Y' une fonction semblable de μ', c'est-à-dire de $\mu\cos^2 p - \sin^2 p \cos q'$: α, g, C sont des constantes. Pour déterminer Y, Laplace différentie trois fois par rapport à μ l'équation (A), et, en observant que $\frac{d\mu'}{d\mu} = \cos^2 p$, il trouve

$$o = \frac{4\pi}{3}.\frac{d^3Y}{d\mu^3} - \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} dp dq' \sin p \cos^6 p.\frac{d^3Y'}{d\mu'^3},$$

ou, ce qui est la même chose,

$$o = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} dp dq' \sin p \cos^6 p\left(\frac{7}{3}.\frac{d^3Y}{d\mu^3} - \frac{d^3Y'}{d\mu'^3}\right).$$

« Cette équation, dit-il, doit avoir lieu quel que soit μ : or il est clair » que parmi toutes les valeurs de μ comprises depuis $\mu = -1$ jusqu'à $\mu = 1$, il en existe une que nous désignerons par h et qui est » telle, qu'abstraction faite du signe, aucune des valeurs de $\frac{d^3Y}{d\mu^3}$ ne » surpassera celle qui est relative à h : en désignant donc par H cette » dernière valeur, on aura

$$o = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} dp dq' \sin p \cos^6 p \left(\frac{7}{3}H - \frac{d^3Y'}{d\mu'^3}\right).$$

» La quantité $\frac{7}{3}H - \frac{d^3Y'}{d\mu'^3}$ est évidemment du même signe que H, et
» le facteur $\sin p \cos^6 p$ est constamment positif dans toute l'étendue de
» l'intégrale : les éléments de cette intégrale sont donc tous du même
» signe que H, d'où il suit que l'intégrale entière ne peut être nulle
» à moins que H ne le soit lui-même, ce qui exige que l'on ait
» généralement $0 = \frac{d^3Y}{d\mu^3}$, d'où l'on tire, en intégrant, $Y = l + m\mu + n\mu^2$,
» l, m, n étant des constantes arbitraires. »

Ce raisonnement est spécieux et peut séduire au premier aperçu ; mais, en y réfléchissant davantage, on voit qu'il cesserait d'être applicable si le maximum de la fonction $\frac{d^3Y}{d\mu^3}$ pouvait être infini, ce qui arriverait si l'on avait par hasard

$$Y = (1 - \mu^2)^{\frac{5}{2}}, \quad \text{ou} \quad Y = (1 - \mu^2)^{\frac{7}{3}}, \text{ etc.},$$

en sorte que pour l'employer avec sécurité, il faudrait avoir prouvé *à priori* que la dérivée $\frac{d^3Y}{d\mu^3}$ ne devient infinie pour aucune valeur de μ, ce que Laplace ne fait nulle part. Pour nous convaincre de l'inexactitude du principe sur lequel il s'appuie, considérons un exemple très simple ; et proposons de trouver la fonction $\varphi(x)$ qui satisfait à l'équation

$$\text{(B)} \qquad \int_0^1 \varphi(\alpha x) d\alpha = \frac{3}{10} \varphi(x),$$

x étant une variable indépendante. En différentiant trois fois l'équation (B) par rapport à x, il vient

$$\int_0^1 \alpha^3 \varphi'''(\alpha x)\, d\alpha = \frac{3}{10} \varphi'''(x),$$

ou, ce qui est la même chose,

$$\text{(C)} \qquad \int_0^1 \alpha^3 \left[\frac{12}{10} \varphi'''(x) - \varphi'''(\alpha x)\right] d\alpha = 0.$$

Maintenant en appliquant à l'équation (C) et à la fonction $\varphi(x)$ le raisonnement de Laplace, sans y changer un seul mot, on trouvera comme ci-dessus $\varphi'''(x) = 0$, ce qui est absurde ; car la valeur de

$\varphi(x)$ qui satisfait à l'équation (B) est évidemment de la forme $\varphi(x) = Ax^{\frac{7}{3}}$, A désignant une constante arbitraire.

En mettant l'équation

$$\int_0^1 \varphi(\alpha x)\,d\alpha = 2\varphi(x)$$

sous la forme

$$\int_0^1 d\alpha[\varphi(\alpha x) - 2\varphi(x)] = 0,$$

on en conclura de même $\varphi(x) = 0$, tandis que $\varphi(x)$ peut avoir cette valeur plus générale $\varphi(x) = \frac{A}{\sqrt{x}}$.

Pour que la démonstration de Laplace fût suffisante, il faudrait donc que ce grand géomètre eût montré d'abord que la dérivée $\frac{d^3Y}{d\mu^3}$ a toujours une valeur finie. Et l'on ne doit pas dire que, dans son analyse, il exclut implicitement les cas où l'on aurait

$$H = \infty,$$

car il se propose de prouver non pas que la figure ellipsoïdale satisfait à l'équilibre de la masse fluide supposée presque sphérique, mais bien qu'aucune autre figure ne peut y satisfaire. Exclure d'avance certaines formes de la fonction Y, serait évidemment aller contre le but qu'il indique lui-même et ruiner par le fait sa propre démonstration. La seule condition à laquelle la fonction Y soit soumise, c'est de ne devenir jamais infinie. Ainsi, pour trouver la valeur de Y, satisfaisant à l'équation (A), il faut employer une méthode très différente de celle de Laplace. Je vais exposer cette méthode.

III.

Soient Ox, Oy, Oz trois axes rectangulaires. Imaginons autour du point O une masse fluide homogène A qui tourne autour de l'axe Oz avec une vitesse constante et dont les molécules s'attirent l'une l'autre en raison inverse du carré des distances. La figure permanente de cette masse liquide dépendra de l'intensité de la force centrifuge qui

s'exerce à la distance 1 de l'axe de rotation : nous désignerons cette intensité par g et nous la supposerons assez petite pour que la figure du liquide soit très peu différente de celle d'une sphère. Nous prendrons en outre pour unité la force attractive produite à l'unité de distance entre deux masses égales à l'unité. Cela étant, considérons un point M placé à la surface libre du liquide : nommons θ l'angle MOz et μ le cosinus de θ, r le rayon vecteur OM, ϖ l'angle compris entre la projection de r sur le plan des xy et l'axe des x : représentons par θ', μ', r', ϖ' les quantités analogues à θ, μ, r, ϖ pour un autre point M' pris dans l'intérieur de A. L'élément de A dont le centre est en M' sera exprimé par $r'^2 \sin\theta' d\theta' d\varpi' dr'$ ou par $r'^2 d\mu' d\varpi' dr'$. La distance du point M au point M' sera

$$\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'P},$$

P étant le cosinus de l'angle compris entre les deux droites r et r', en sorte que l'on a

$$P = \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\varpi - \varpi'),$$

ou

$$P = \mu\mu' + \sqrt{1-\mu^2}\ \sqrt{1-\mu'^2}.\cos(\varpi - \varpi').$$

La somme V des éléments de A divisés par leurs distances respectives au point M sera exprimée par l'intégrale triple

$$V = \iiint \frac{r'^2 d\mu' d\varpi' dr'}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'P}},$$

les intégrations s'étendant à la masse A tout entière. Et la figure permanente de cette masse sera déterminée par l'équation

$$(1) \qquad V + \frac{gr^2}{2}(1 - \mu^2) = \text{constante},$$

qu'il est aisé de démontrer par les formules connues de l'hydrostatique. L'équation (1) doit servir, comme on voit, à déterminer r en fonction des deux variables indépendantes μ, ϖ.

Nous supposerons désormais que l'origine O est placée au centre de gravité du sphéroïde : nous désignerons par a la plus petite valeur de

r : la valeur générale de ce rayon vecteur sera donc de la forme

$$r = a(1 + \alpha Y),$$

α étant un très petit coefficient et Y une fonction inconnue de μ et ϖ : à cause de la petitesse de α et de g, on négligera dans le calcul les quantités de l'ordre αg et de l'ordre α^2. La valeur de V se composera de deux parties distinctes : l'une relative à la sphère du rayon a est exprimée par

$$\frac{4\pi a^2}{3}(1 - \alpha Y) :$$

l'autre, relative à l'excès du sphéroïde sur la sphère, a pour valeur

$$\alpha . a^2 . \int_{-1}^{+1}\int_{0}^{2\pi} \frac{Y' d\mu' d\varpi'}{\sqrt{2 - 2P}} :$$

Y' désigne ce que devient Y lorsqu'on y change μ en μ' et ϖ en ϖ'.

IV.

Cette expression de V, savoir,

$$(2) \qquad V = \frac{4\pi a^2}{3}(1 - \alpha Y) + \alpha a^2 \int_{-1}^{+1}\int_{0}^{2\pi} \frac{Y' d\mu' d\varpi'}{\sqrt{2-2P}},$$

n'est pas la seule dont on puisse faire usage. D'après la transformation très ingénieuse donnée par Laplace à la page 73 (*) du tome II de la *Mécanique céleste*, on a aussi

$$(3) \qquad V = \frac{4\pi a^2}{3}(1 - \alpha Y) + \alpha a^2 \int_{0}^{\pi}\int_{0}^{2\pi} Y' \sin p dp dq',$$

les nouvelles variables p, q', étant liées aux anciennes μ', ϖ' par deux relations dont l'une est

(*) A la page citée, Laplace considère spécialement un sphéroïde de révolution ; mais son analyse est générale et s'étend sans modifications à tous les sphéroïdes très peu différents de la sphère.

$$\mu' = \mu \cos^2 p - \sin^2 p \cos q',$$

et dont l'autre est inutile à l'objet que nous nous proposons ici.

En comparant ces deux valeurs de V, qui doivent être identiquement égales, on tombe sur une formule remarquable, savoir

$$\int_{-1}^{+1}\int_{0}^{2\pi} \frac{Y' d\mu' d\varpi'}{\sqrt{2-2P}} = \int_{0}^{\pi}\int_{0}^{2\pi} Y' \sin p dp dq'.$$

Dans cette formule, la fonction Y de μ, ϖ est arbitraire ; toutefois elle ne doit jamais devenir infinie, lorsque μ varie de -1 à $+1$ et ϖ de 0 à 2π. Lorsque Y est une fonction $F(\mu)$ indépendante de ϖ, on a, d'après cela,

$$\int_{-1}^{+1}\int_{0}^{2\pi} \frac{F(\mu') d\mu' d\varpi'}{\sqrt{2-2P}} = \int_{0}^{\pi}\int_{0}^{2\pi} F(\mu \cos^2 p - \sin^2 p \cos q') \sin p dp dq'.$$

En particulier si l'on pose $F(\mu) = \mu^n$, n étant un nombre entier positif quelconque, il vient

$$\int_{-1}^{+1}\int_{0}^{2\pi} \frac{\mu'^n d\mu' d\varpi'}{\sqrt{2-2P}} = \int_{0}^{\pi}\int_{0}^{2\pi} (\mu \cos^2 p - \sin^2 p \cos q')^n . \sin p dp dq' ;$$

et comme l'intégrale placée au second membre est toujours facile à calculer, on voit qu'il en sera de même de l'autre intégrale

$$\int_{-1}^{+1}\int_{0}^{2\pi} \frac{\mu'^n d\mu' d\varpi'}{\sqrt{2-2P}} :$$

en développant en effet $(\mu \cos^2 p - \sin^2 p \cos q')^n$ par la formule du binome de Newton et multipliant ensuite les divers termes de ce développement par $\sin p dp dq'$, il est évident que l'intégrale du premier terme $\mu^n \cos^{2n} p \sin p dp dq'$ sera $\frac{4\pi\mu^n}{2n+1}$: celle du terme suivant sera nulle ainsi que celle de chaque terme de rang pair : le résultat de l'intégration sera donc une fonction entière de μ de la forme

$$\frac{4\pi\mu^n}{2n+1} + C_1 \mu^{n-2} + C_2 \mu^{n-4} + \ldots,$$

C_1, C_2,... étant des constantes dont il est inutile d'écrire ici les va-

leurs; et l'on aura

$$\int_{-1}^{+1}\int_{0}^{2\pi}\frac{\mu'^{n}d\mu'd\varpi'}{\sqrt{2-2P}}=\frac{4\pi\mu^{n}}{2n+1}+C_{1}\mu^{n-2}+\text{etc.}$$

En changeant μ' en μ et μ en μ', ce qui n'altère pas la valeur de P, on obtiendra semblablement

$$(4)\qquad \int_{-1}^{+1}\int_{0}^{2\pi}\frac{\mu^{n}d\mu d\varpi'}{\sqrt{2-2P}}=\frac{4\pi\mu'^{n}}{2n+1}+C_{1}\mu'^{n-2}+\text{etc.}$$

La formule (4) nous sera par la suite d'un grand secours.

V.

En mettant pour V sa valeur (2) dans l'équation (1) et observant que l'on peut, à cause de la petitesse de g, poser $r=a$ dans le second terme, cette équation devient

$$\frac{4\pi a^{2}}{3}(1-\alpha Y)+\alpha a^{2}\int_{-1}^{+1}\int_{0}^{2\pi}\frac{Y'd\mu'd\varpi'}{\sqrt{2-2P}}+\frac{a^{2}g}{2}(1-\mu^{2})=\text{const.};$$

ou plus simplement

$$(5)\qquad \frac{4\pi}{3}Y-\int_{-1}^{+1}\int_{0}^{2\pi}\frac{Y'd\mu'd\varpi'}{\sqrt{2-2P}}=C+\frac{g}{2\alpha}(1-\mu^{2}),$$

C étant une constante. On pourra aussi lui donner cette autre forme équivalente

$$(6)\qquad \frac{4\pi}{3}Y-\int_{0}^{\pi}\int_{0}^{2\pi}Y'\sin p\,dp\,dq'=C+\frac{g}{2\alpha}(1-\mu^{2}),$$

en employant la valeur (3) de V. Pour en tirer Y, le moyen le plus simple est de développer cette inconnue en une série $Y_{0}+Y_{1}+$ etc. dont les géomètres ont étudié les propriétés avec beaucoup de soin. La solution dont je parle est exposée à la page 69 du deuxième volume de la *Mécanique céleste* : nous ne voulons point nous en occuper ici. Observons seulement que, pour que cette méthode soit complète et rigoureuse, il faut qu'on ait démontré *à priori* la possibilité de représenter par un développement de la forme

$Y_0 + Y_1 + \ldots$ (entre les limites $-1, +1$, et $0, 2\pi$ de μ et de ϖ) toute fonction Y qui ne devient pas infinie entre ces limites. Laplace ne possédant pas une telle démonstration avait lieu de craindre que sa méthode ne fût insuffisante. C'est ce qui l'a porté à chercher un autre procédé pour déterminer, directement et indépendamment des suites infinies, la valeur de Y qui satisfait à l'équation (5). Mais, comme je l'ai expliqué dans l'introduction, le principe dont il a fait usage est tout-à-fait inadmissible. Nous allons donc essayer d'atteindre par une autre voie le but qu'il s'était proposé, savoir de trouver la valeur de Y, sans recourir à l'emploi des séries.

Nous décomposerons, comme lui, la question en deux parties.

1°. Nous supposerons que la figure du sphéroïde en équilibre soit de révolution : Y sera alors fonction de μ seulement, et, dans cette hypothèse, nous en déterminerons la valeur.

2°. Nous prouverons qu'en effet la figure du sphéroïde ne peut être que de révolution. Pour cette dernière partie du problème, nous renverrons le lecteur au livre III^e de la *Mécanique céleste*, où elle est traitée d'un manière exacte et complète : c'est donc à la première qu'il faut spécialement nous attacher.

VI.

D'après un théorème connu, démontré par Maclaurin, nous savons d'avance que l'équilibre de la masse fluide peut subsister en attribuant à cette masse la forme d'un ellipsoïde de révolution. Il est donc évident qu'on aura une solution particulière de l'équation (6), et par suite de l'équation (5), en posant $Y = M + N\mu^2$ et en déterminant convenablement les constantes M, N. En substituant cette valeur de Y, on trouve en effet qu'elle satisfera à l'équation (6) si l'on prend

$$M = \frac{3g}{16\varpi} - \frac{3C}{8\pi}, \quad N = -\frac{15g}{16\varpi}.$$

Cela posé, la valeur générale de Y pourra être mise sous la forme

$$(7) \qquad Y = \frac{3g}{16\varpi} - \frac{3C}{8\pi} - \frac{15g}{16\varpi}.\mu^2 + Z,$$

Z étant une fonction inconnue de μ qui doit satisfaire à l'équation

nouvelle

$$(8)\qquad \frac{4\pi}{3}.Z - \int_{-1}^{+1}\int_{0}^{2\pi} \frac{Z'd\mu'd\varpi'}{\sqrt{2-2P}} = 0,$$

dans laquelle Z' désigne ce que devient Z lorsqu'on y change μ en μ'. On déduit l'équation (8) de l'équation (5) en y remplaçant Y par sa valeur (7) : la solution particulière $Y = M + N\mu^2$ que l'on a obtenue à l'aide de l'équation (6) sert, comme on voit, à faire disparaître le second membre $C + \frac{g}{2\alpha}(1-\mu^2)$ de l'équation (5).

VII.

Nous allons prouver que la fonction inconnue Z est égale à zéro. Pour cela nous ferons usage du théorème suivant qui se trouve démontré dans mon *Journal de Mathématiques* (tome II, page 1) :

« Soit $\Psi(\mu)$ une fonction de μ, déterminée mais inconnue, qui ne » devienne jamais infinie lorsque μ croît de -1 à $+1$. Si l'on a » constamment $\int_{-1}^{+1}\mu^n\Psi(\mu)\,d\mu = 0$, n étant un quelconque des nom» bres entiers $0, 1, 2, 3,\ldots$, on aura aussi $\Psi(\mu) = 0$, entre les » limites $\mu = -1$, $\mu = +1$. »

Pour prouver que $Z = 0$, il suffira donc de prouver que l'on a

$$\int_{-1}^{+1}\mu^n Z d\mu = 0,$$

n étant un nombre entier quelconque, nul ou positif.

En multipliant par $d\mu$ les deux membres de l'équation (8) et intégrant ensuite depuis $\mu = -1$ jusqu'à $\mu = +1$, on a

$$\int_{-1}^{+1} Zd\mu - \int_{-1}^{+1} d\mu \int_{-1}^{+1} d\mu' \int_{0}^{2\pi} \frac{Z'd\varpi'}{\sqrt{2-2P}} = 0.$$

L'intégrale triple contenue dans l'équation que je viens d'écrire peut être mise sous la forme

$$\int_{-1}^{+1} Z'd\mu' \int_{-1}^{+1} d\mu \int_{0}^{2\pi} \frac{d\varpi'}{\sqrt{2-2P}}.$$

Mais par la formule (4) il vient

$$\int_{-1}^{+1} d\mu \int_{0}^{2\pi} \frac{d\varpi'}{\sqrt{2-2P}} = 4\pi :$$

notre intégrale triple est donc égale à

$$4\pi \int_{-1}^{+1} Z' d\mu',$$

ou, ce qui est la même chose, à

$$4\pi \int_{-1}^{+1} Z d\mu.$$

Par suite on a

$$\frac{4\pi}{3}\int_{-1}^{+1} Z d\mu - 4\pi \int_{-1}^{+1} Z d\mu = 0,$$

ce qui exige que

$$\int_{-1}^{+1} Z d\mu = 0.$$

Pour prouver que $\int_{-1}^{+1} \mu Z d\mu = 0$, il faut se rappeler que l'origine O des coordonnées est en même temps le centre de gravité du sphéroïde. En effet le moment de l'élément $r'^2 d\mu' d\varpi' dr'$ par rapport au plan des xy est

$$r'^3 . \mu' d\mu' d\varpi' dr' :$$

pour que ce plan contienne le centre de gravité, il faut donc que l'on ait

$$\iiint r'^3 . \mu' d\mu' d\varpi' dr' = 0,$$

les intégrales s'étendant au volume entier du liquide. On effectuera d'abord l'intégrale relative à r' depuis $r' = 0$ jusqu'à $r' = a(1 + \alpha Y')$, et en négligeant le carré et les puissances supérieures de α, on aura

$$\int_{-1}^{+1} \int_{0}^{2\pi} \mu' . (1 + 4\alpha Y') d\mu' d\varpi' = 0 :$$

Y' étant indépendant de ϖ', cette équation de condition se réduit à

$$\int_{-1}^{+1} \mu' Y' d\mu' \quad \text{ou} \quad \int_{-1}^{+1} \mu Y d\mu = 0,$$

d'où résulte immédiatement

$$\int_{-1}^{+1} \mu Z d\mu = 0,$$

puisque Y ne diffère de Z que par la fonction paire $M + N\mu^2$.

Actuellement il suffira de prouver que si les intégrales

$$\int_{-1}^{+1} Z d\mu, \qquad \int_{-1}^{+1} \mu Z d\mu, \ldots \ldots \int_{-1}^{+1} \mu^{n-1} Z d\mu$$

sont nulles pour une certaine valeur de n égale à 2 ou > 2, l'intégrale suivante $\int_{-1}^{+1} \mu^n Z d\mu$ est nulle aussi. Cela fait, il sera rigoureusement prouvé que l'on a $Z = 0$.

Or en multipliant par $\mu^n d\mu$ les deux membres de l'équation (8) et intégrant par rapport à μ, on obtient

$$\frac{4\pi}{3}\int_{-1}^{+1} \mu^n Z d\mu - \int_{-1}^{+1} \mu^n d\mu \int_{-1}^{+1} d\mu' \int_{0}^{2\pi} \frac{Z' d\mu' d\varpi'}{\sqrt{2 - 2P}} = 0.$$

L'intégrale triple contenue dans cette équation, étant mise sous la forme

$$\int_{-1}^{+1} Z' d\mu' \int_{-1}^{+1} \mu^n d\mu \int_{0}^{2\pi} \frac{d\varpi'}{\sqrt{2 - 2P}},$$

devient, en vertu de la formule (4),

$$\int_{-1}^{+1} Z' d\mu' \left(\frac{4\pi\mu'^n}{2n+1} + C_1 \mu'^{n-2} + \text{etc.}\right):$$

changeant μ' en μ sous le signe $\int$ et omettant les termes multipliés par les intégrales nulles

$$\int_{-1}^{+1} \mu^{n-2} Z d\mu, \quad \int_{-1}^{+1} \mu^{n-4} Z d\mu, \quad \text{etc.},$$

elle se réduit à

$$\frac{4\pi}{2n+1} \int_{-1}^{+1} \mu^n Z d\mu,$$

en sorte que l'on a

$$\frac{4\pi}{3}\int_{-1}^{+1} \mu^n Z d\mu - \frac{4\pi}{2n+1}\int_{-1}^{+1} \mu^n Z d\mu = 0,$$

et par conséquent

$$\int_{-1}^{+1}\mu^n Z d\mu = 0,$$

puisque $2n+1$ est >3.

Concluons de cette analyse qu'en se bornant aux sphéroïdes de révolution, les formes possibles d'équilibre très peu différentes de la sphère sont représentées par l'équation générale

$$r = a(1+\alpha Y) = a\left(1+\frac{3g}{16\pi}-\frac{3\alpha C}{8\pi}-\frac{15g}{16\pi}.\mu^2\right),$$

laquelle se simplifie en observant que a représente (n° III) la plus petite valeur de r : en effet la plus petite valeur de r répond à $\mu^2=1$: on a donc

$$a\left(1+\frac{3g}{16\pi}-\frac{3\alpha C}{8\pi}-\frac{15g}{16\pi}\right)=a,$$

d'où l'on tire

$$a\left(1+\frac{3g}{16\pi}-\frac{3\alpha C}{8\pi}\right)=a\left(1+\frac{15g}{16\pi}\right),$$

et par suite,

$$(9)\qquad r = a\left[1+\frac{15g}{16\pi}(1-\mu^2)\right].$$

L'équation (9) est celle d'un ellipsoïde qui se réduit à une sphère lorsque $g=0$; en sorte que la sphère est la seule figure de révolution qui satisfasse à l'équilibre d'une masse fluide homogène immobile, du moins lorsqu'on suppose *à priori* cette figure presque sphérique.

C'est en partant de ce dernier théorème que l'on prouve ensuite que parmi toutes les figures très peu différentes de la sphère (qu'elles soient ou non de révolution) une seule peut satisfaire à la condition d'équilibre du fluide tournant autour d'un axe. En sorte que la surface de ce fluide est nécessairement celle de l'ellipsoïde déterminé par l'équation (9). Mais sur ce point, comme nous l'avons déjà dit, nous renverrons au livre III^e de la *Mécanique céleste* (tome II, page 76.)

EXTRAIT

D'un Mémoire sur le développement des fonctions en séries dont les différents termes sont assujettis à satisfaire à une même équation différentielle linéaire, contenant un paramètre variable ;

PAR MM. C. STURM ET J. LIOUVILLE.

Soient x une variable indépendante comprise entre deux limites données x, X; g, k, l trois fonctions positives de x; r un paramètre indéterminé; et V une fonction de x et de r, qui satisfasse à la fois à l'équation indéfinie

$$(1) \qquad \frac{d\left(k\frac{dV}{dx}\right)}{dx} + (gr - l)V = 0,$$

et à la condition définie

$$(2) \qquad \frac{dV}{dx} - hV = 0 \quad \text{pour} \quad x = \mathrm{x},$$

dans laquelle h représente un nombre donné positif. Il est aisé de trouver une fonction V qui vérifie ces deux équations et qui ne devienne identiquement nulle pour aucune valeur déterminée de r, lorsque x reste indéterminée. On s'est beaucoup occupé des propriétés de la fonction V dans différents mémoires auxquels nous renverrons le lecteur (*).

(*) Tome I de ce Journal, pages 106, 253, 269, 373, et tome II, page 16.

Désignons par H un coefficient positif et par $\varpi(r)$ ce que devient la quantité $\frac{dV}{dx} + HV$ lorsqu'on y fait $x = X$: on sait que l'équation $\varpi(r) = 0$ a une infinité de racines toutes réelles et positives que nous nommerons $r_1, r_2, \ldots r_n, \ldots$ en les supposant rangées dans un ordre de grandeurs croissantes. Nous représenterons par V_n ou $V_n(x)$ ce que devient V lorsqu'on fait $r = r_n$. Ainsi l'on aura à la fois

$$(3) \qquad \frac{d\left(k\frac{dV_n}{dx}\right)}{dx} + (gr_n - l)V_n = 0,$$

$$(4) \qquad \frac{dV_n}{dx} - hV_n = 0 \quad \text{pour} \quad x = \mathrm{x},$$

$$(5) \qquad \frac{dV_n}{dx} + HV_n = 0 \quad \text{pour} \quad x = X.$$

Cela posé, on peut chercher à sommer la série

$$(6) \qquad \Sigma\left\{\frac{V_n\int_{\mathrm{x}}^{X} gV_n f(x)dx}{\int_{\mathrm{x}}^{X} gV_n^2 dx}\right\},$$

dans laquelle le signe Σ s'applique aux valeurs successives 1, 2, 3,.... de l'indice n, et où $f(x)$ est une fonction arbitraire de x qui ne devient jamais infinie. Soit $F(x)$ la somme demandée. Il s'agit de prouver d'une manière directe et rigoureuse que l'on a $F(x) = f(x)$. Déjà l'un de nous a traité cette question dans un mémoire particulier; mais comme la série (6) se présente dans une foule de problèmes de physique mathématique, nous avons pensé qu'il était bon de revenir sur ce sujet. Au surplus, la méthode dont nous allons faire usage diffère beaucoup de celle que l'on a d'abord employée.

Combinons entre elles les équations (1) et (3); en ayant égard aux conditions (2), (4), nous aurons sans difficulté

$$\int_{\mathrm{x}}^{x} gVV_n dx = \frac{k}{r - r_n}\left(V\frac{dV_n}{dx} - V_n\frac{dV}{dx}\right).$$

En posant $x = X$ et se rappelant que, pour cette valeur de x, $\frac{dV_n}{dx} + HV_n$ se réduit à zéro et $\frac{dV}{dx} + HV$ à $\varpi(r)$, il vient donc

$$(7) \qquad \int_x^X g\mathrm{VV}_n \mathrm{d}x = -\mathrm{KV}_n(\mathrm{X}) \cdot \frac{\varpi(r)}{r - r_n} :$$

K et $\mathrm{V}_n(\mathrm{X})$ représentent les valeurs respectives de k et de V_n pour $x = \mathrm{X}$. Dans le cas particulier où $r = r_n$, le second membre de la formule (7) prend la forme $\frac{0}{0}$: en cherchant alors sa vraie valeur par la règle connue, on trouve

$$(8) \qquad \int_x^X g\mathrm{V}_n^2 \mathrm{d}x = -\mathrm{KV}_n(\mathrm{X})\varpi'(r_n).$$

D'un autre côté on peut démontrer que la fraction $\frac{\mathrm{V}}{\varpi(r)}$ est décomposable en fractions simples. Par les méthodes connues pour ce genre de décomposition, on obtient

$$\frac{\mathrm{V}}{\varpi(r)} = \Sigma \left\{ \frac{\mathrm{V}_n}{(r - r_n)\varpi'(r_n)} \right\},$$

d'où résulte

$$(9) \qquad \mathrm{V} = \Sigma \left\{ \frac{\varpi(r)\mathrm{V}_n}{(r - r_n)\varpi'(r_n)} \right\}.$$

A l'aide des formules (7) et (8), on peut éliminer $\varpi(r)$, $\varpi'(r_n)$: cette élimination faite, si l'on multiplie l'équation (9) par $gf(x)dx$ et si l'on intègre ensuite, on obtient finalement

$$\int_x^X g\mathrm{V}f(x)\mathrm{d}x = \Sigma \left\{ \frac{\int_x^X g\mathrm{VV}_n \mathrm{d}x . \int_x^X g\mathrm{V}_n f(x) dx}{\int_x^X g\mathrm{V}_n^2 \mathrm{d}x} \right\}.$$

Mais en multipliant par $g\mathrm{V}\mathrm{d}x$ et intégrant les deux membres de l'équation

$$\mathrm{F}(x) = \Sigma \left\{ \frac{\mathrm{V}_n \int_x^X g\mathrm{V}_n f(x)\mathrm{d}x}{\int_x^X g\mathrm{V}_n^2 \mathrm{d}x} \right\},$$

on a de même

$$\int_x^X g\mathrm{VF}(x)\,\mathrm{d}x = \Sigma \left\{ \frac{\int_x^X g\mathrm{VV}_n \mathrm{d}x . \int^X g\mathrm{V}_n f(x)\mathrm{d}x}{\int_x^X g\mathrm{V}_n^2 dx} \right\}.$$

Les deux intégrales

$$\int_{x}^{X} gVf(x)\,dx, \qquad \int_{x}^{X} gVF(x)\,dx$$

sont donc égales entre elles, en sorte que l'on a

$$\int_{x}^{X} gV[F(x) - f(x)]\,dx = 0.$$

Cette dernière équation doit avoir lieu quel que soit r, et l'on peut aisément prouver qu'elle entraîne la suivante $F(x) = f(x)$, C. Q. F. D.

La méthode que nous venons d'employer pour sommer la série (6) est à la fois très simple et très générale. Elle peut servir à trouver la somme d'un grand nombre d'autres séries, comme on le verra dans notre mémoire, où l'analyse précédente est présentée sous plusieurs points de vue (*).

(*) L'abondance des matières nous force à différer la publication de ce Mémoire. L'extrait qu'on vient de lire a déjà été imprimé dans le *Compte rendu des séances de l'Académie des Sciences*, tome IV, page 675. (J. Liouville.)

REMARQUES

Sur les Intégrales des fractions rationnelles;

PAR M. POISSON.

Lorsqu'on passe de l'intégrale indéfinie d'une fraction rationnelle à son intégrale définie, prise entre les limites zéro et l'infini, il arrive souvent qu'elle se réduit à une fonction algébrique des racines de l'équation que l'on obtient en égalant à zéro le dénominateur de la fraction proposée, et qu'elle ne contient plus qu'une seule quantité transcendante, savoir, le rapport π de la circonférence au diamètre. Mais cette fonction n'est pas du genre de celles que l'on peut exprimer sans radicaux, au moyen des coefficients de l'équation dont elle renferme les racines; et quoiqu'elle ne doive avoir qu'une seule valeur, elle dépend, néanmoins, d'une équation d'un degré supérieur au premier, dont cette valeur est une racine déterminée. C'est ce que l'on verra, en effet, par l'exemple suivant, auquel il sera facile d'en ajouter, si l'on veut, beaucoup d'autres.

Je désignerai par a, b, c, g, h, k, des constantes données, et j'appellerai y l'intégrale que je prendrai pour exemple, savoir :

$$y = \int_0^\infty \frac{(g + hx^2 + kx^4)dx}{x^6 + ax^4 + bx^2 + c}.$$

Soient $-\alpha^2$, $-\beta^2$, $-\gamma^2$, les trois racines, réelles ou imaginaires de l'équation

$$x^6 + ax^4 + bx^2 + c = 0,$$

résolue par rapport à x^2, de sorte qu'on ait

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = a, \quad \alpha^2\beta^2 + \gamma^2\alpha^2 + \beta^2\gamma^2 = b, \quad \alpha^2\beta^2\gamma^2 = c. \quad (1)$$

Afin que le dénominateur de la fraction comprise sous le signe $\int$, ne passe pas par zéro entre les limites de l'intégration, je supposerai qu'aucune de ces racines ne soit positive, ce qui exigera que le dernier terme c soit positif. Les signes de α, β, γ, seront ambigus. Pour fixer les idées, je supposerai aussi que ces trois quantités sont positives, ou des imaginaires dont la partie réelle est positive.

Par la règle ordinaire, on aura

$$\begin{aligned} y = & \frac{g - h\alpha^2 + k\alpha^4}{(\alpha^2 - \beta^2)(\alpha^2 - \gamma^2)}\int_0^\infty \frac{dx}{x^2 + \alpha^2} \\ & + \frac{g - h\beta^2 + k\beta^4}{(\beta^2 - \alpha^2)(\beta^2 - \gamma^2)}\int_0^\infty \frac{dx}{x^2 + \beta^2} \\ & + \frac{g - h\gamma^2 + k\gamma^4}{(\gamma^2 - \alpha^2)(\gamma^2 - \beta^2)}\int_0^\infty \frac{dx}{x^2 + \gamma^2}. \end{aligned}$$

Je fais $x = \alpha z$ et $dx = \alpha dz$ dans la première intégrale, $x = \beta z$ et $dx = \beta dz$ dans la seconde, $x = \gamma z$ et $dx = \gamma dz$ dans la troisième. D'après l'hypothèse que l'on vient de faire sur les signes de α, β, γ, les limites relatives à la nouvelle variable z seront toujours zéro et l'infini positif; et à cause de $\int_0^\infty \frac{dz}{1 + z^2} = \frac{1}{2}\pi$, il en résultera

$$\frac{2}{\pi}y = \frac{g - h\alpha^2 + k\alpha^4}{\alpha(\alpha^2 - \beta^2)(\alpha^2 - \gamma^2)} + \frac{g - h\beta^2 + k\beta^4}{\beta(\beta^2 - \alpha^2)(\beta^2 - \gamma^2)} + \frac{g - h\gamma^2 + k\gamma^4}{\gamma(\gamma^2 - \alpha^2)(\gamma^2 - \beta^2)},$$

ou bien, en réduisant les trois fractions au même dénominateur,

$$\frac{2}{\pi}y = \frac{g(\alpha + \beta + \gamma) + h\alpha\beta\gamma + k\alpha\beta\gamma(\alpha\beta + \gamma\alpha + \beta\gamma)}{\alpha\beta\gamma(\alpha + \beta)(\gamma + \alpha)(\beta + \gamma)}. \qquad (2)$$

Soit actuellement

$$\alpha + \beta + \gamma = u.$$

En vertu des équations (1), on aura d'abord

$$2(\alpha\beta + \gamma\alpha + \beta\gamma) = u^2 - a;$$

on aura ensuite

$$4[\alpha^2\beta^2 + \gamma^2\alpha^2 + \beta^2\gamma^2 + 2\alpha\beta\gamma(\alpha + \beta + \gamma)] = (u^2 - a)^2,$$

et, par conséquent,

$$(u^2 - a)^2 - 8u\sqrt{c} - 4b = 0, \qquad (3)$$

où l'on regardera $\sqrt{c}$, valeur de $\alpha\beta\gamma$, comme une quantité positive. Or, il est évident qu'on aurait été conduit à cette même équation (3), si l'on eût pris pour u l'une des trois quantités $\alpha-\beta-\gamma$, $\gamma-\alpha-\beta$, $\beta-\gamma-\alpha$, qui se déduisent du trinome $\alpha+\beta+\gamma$, en changeant les signes de deux de ses termes, ce qui n'empêche pas le produit des trois termes, de rester positif et égal à $\sqrt{c}$. Il s'ensuit donc que les quatre racines de l'équation (5) sont

$$\alpha+\beta+\gamma,\quad \alpha-\beta-\gamma,\quad \gamma-\alpha-\beta,\quad \beta-\gamma-\alpha.$$

D'ailleurs, les trois quantités α, β, γ, étant positives ou des imaginaires dont la partie réelle est positive, il en résulte qu'une au moins de ces quatre racines sera réelle et positive; et l'on voit aussi que si l'équation (3) a plusieurs racines de cette espèce, c'est la plus grande qui exprime la valeur de $\alpha+\beta+\gamma$. En désignant par p la plus grande racine positive de l'équation (3), il faudra donc prendre, dans la formule (2),

$$\alpha+\beta+\gamma=p,\quad \alpha\beta+\gamma\alpha+\beta\gamma=\tfrac{1}{2}(p^2-a);$$

comme on a identiquement

$$(\alpha+\beta)(\gamma+\alpha)(\beta+\gamma)=(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)-\alpha\beta\gamma,$$

on aura, en même temps,

$$(\alpha+\beta)(\gamma+\alpha)(\beta+\gamma)=\tfrac{1}{2}p(p^2-a)-\alpha\beta\gamma;$$

et à cause de $\alpha\beta\gamma=\sqrt{c}$, la formule (2) deviendra

$$\frac{2}{\pi}\gamma=\frac{2gp+2h\sqrt{c}+k(p^2-a)\sqrt{c}}{p(p^2-a)\sqrt{c}-2c};\qquad (4)$$

en sorte qu'il suffira de calculer la valeur de la plus grande racine de l'équation (3), pour en conclure immédiatement la valeur de γ.

En remettant pour γ l'intégrale que cette lettre représente, on pourra décomposer cette formule (4), en ces trois autres

$$\left.\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{dx}{X} &= \frac{\pi p}{p(p^2-a)\sqrt{c}-2c},\\
\int_0^\infty \frac{x^2dx}{X} &= \frac{\pi\sqrt{c}}{p(p^2-x)\sqrt{c}-2c},\\
\int_0^\infty \frac{x^4dx}{X} &= \frac{\pi(p^2-a)\sqrt{c}}{2p(p^2-a)\sqrt{c}-4c},
\end{aligned}\right\}\quad(5)$$

où l'on a fait, pour abréger,

$$x^6+ax^4+bx^2+c=X.$$

Si l'on a, par exemple, $a=0$, $b=0$, $c=1$, l'équation (3) se réduira à $u^6-8u=0$; ses quatre racines seront $u=0$, $u=2$, $u=1\pm\sqrt{-3}$; ce sera la seconde qu'il faudra prendre pour p; au moyen de quoi, les équations (5) deviendront

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^6}=\frac{\pi}{3},\quad \int_0^\infty \frac{x^2dx}{1+x^6}=\frac{\pi}{6},\quad \int_0^\infty \frac{x^4dx}{1+x^6}=\frac{\pi}{3};$$

ce qui coïncide avec les valeurs que l'on déduirait de la formule connue

$$\int_0^\infty \frac{x^{m-1}dx}{1+x^n}=\frac{\pi}{n\sin\frac{m\pi}{n}}.$$

Dans le cas de $a=3$, $b=3$, $c=1$, l'équation (3) a une racine égale à 3, et trois racines égales entre elles et à -1. En prenant donc $p=3$, les formules (5) donneront alors

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^3}=\frac{3\pi}{16},\quad \int_0^\infty \frac{x^2dx}{(1+x^2)^3}=\frac{\pi}{16},\quad \int_0^\infty \frac{x^4dx}{(1+x^2)^3}=\frac{3\pi}{16};$$

résultats faciles à vérifier, par le procédé de l'intégration par partie.

En général, si l'on élimine p et p^2-a, entre les trois équations (5), il vient

$$\int_0^\infty \frac{dx}{X}\int_0^\infty \frac{x^4dx}{X}-\left(\int_0^\infty \frac{x^2dx}{X}\right)^2=\frac{\pi}{2\sqrt{c}}\int_0^\infty \frac{x^2dx}{X};$$

équation indépendante de a et b, et qui fera connaître immédiatement l'une des trois intégrales que nous considérons, lorsque les valeurs des deux autres seront connues. On aura aussi cette autre équation

$$\frac{p}{\sqrt{c}}\int_0^\infty \frac{x^2dx}{X}=\int_0^\infty \frac{dx}{X};$$

et quand les deux intégrales qu'elle renferme auront été calculées par les quadratures, elle fera connaître la valeur approchée de la plus grande racine positive p de l'équation (3).

La fraction rationnelle donnée ne contenant toujours que des puissances paires de la variable; si son dénominateur est du huitième degré, l'équation dont sa valeur dépendra, se réduira au quatrième degré, comme l'équation (3), et ce sera encore la plus grande racine positive de cette équation qu'il faudra employer dans cette valeur.

Après avoir décomposé une fraction rationnelle en fractions simples dont les dénominateurs soient du premier ou du second degré; si l'on suppose que le nombre qui marque le degré du dénominateur de la fraction proposée devienne infini, le nombre des fractions simples le deviendra aussi, et elles formeront une série infinie dont la fraction donnée exprimera la valeur. On obtient par là, sans intégration, les sommes des diverses séries qu'Euler et D. Bernouilli ont considérées, et qui sont déterminées d'une autre manière dans mes mémoires sur les intégrales définies (*); mais je n'ai pas vu que ce moyen conduisît à des résultats qui ne fussent pas déjà connus.

(*) *Journal de l'École Polytechnique*, XVIII^e cahier, pages 311 et suivantes.

MÉMOIRE

Sur le degré d'approximation qu'on obtient pour les valeurs numériques d'une variable qui satisfait à une équation différentielle, en employant pour calculer ces valeurs diverses équations aux différences plus ou moins approchées ;

PAR G. CORIOLIS.

Lorsqu'on a à résoudre l'équation

$$\frac{dy}{dx} = f(x),$$

on le fait au moyen de l'intégrale

$$y = \int f(x)dx.$$

Les valeurs numériques de cette dernière peuvent se calculer par approximation au moyen de l'équation aux différences

$$\Delta y = f(x)\Delta x :$$

c'est ce qu'on appelle la *méthode des quadratures*. Au lieu de cette équation aux différences, on emploie encore la suivante :

$$\Delta y = \frac{\Delta x}{2}[f(x) + f(x + \Delta x)].$$

C'est pour cette formule que le célèbre Euler a donné les termes d'une série complémentaire, et que M. Poisson, dans un mémoire qui fait partie du recueil de l'Académie, année 1827, a exprimé le reste de cette série sous une forme analogue à celui de la série de Taylor.

M. Cauchy est, je crois, le premier qui ait fixé une limite à l'erreur commise lorsque, pour calculer les valeurs de y tiré de l'équation différentielle $dy = f(x, y)dx$, où les variables x et y paraissent toutes deux dans la fonction qui exprime la valeur de $\frac{dy}{dx}$, on se sert de l'équation aux différences

$$\Delta y = f(x, y)\Delta x.$$

Nous allons d'abord exposer la marche qu'il a suivie, puis nous donnerons des limites analogues lorsqu'on emploie diverses autres équations aux différences plus ou moins approchées de l'équation différentielle.

Pour faciliter les énoncés, nous concevrons x et y comme étant deux coordonnées rectangulaires d'un point dans un plan.

Nous ferons remarquer d'abord que toutes les méthodes d'approximation pour le calcul des valeurs numériques de y ne peuvent réussir, comme on le verra, par la recherche même des limites de l'erreur, qu'autant qu'on sait *à priori* que pour tous les points compris dans un certain rectangle sur le plan, ni la fonction $f(x, y)$, ni certaines de ses dérivées ne deviennent infinies, et qu'on peut assigner des nombres que ces fonctions ne dépassent jamais dans ce rectangle.

Soit donc A un nombre que $f(x, y)$ ne puisse dépasser dans le rectangle dont les points extrêmes ont pour coordonnées x_0, $x_0 + a$, $y_0 - b$, $y_0 + b$.

Supposons qu'après avoir pris $\Delta x = \frac{x - x_0}{n}$, on calcule y_n au moyen des équations successives

$$\begin{aligned}
y_1 - y_0 &= f(x_0, y_0)\Delta x, \\
y_2 - y_1 &= f(x_1, y_1)\Delta x, \\
&\vdots \\
y_n - y_{n-1} &= f(x_{n-1}, y_{n-1})\Delta x.
\end{aligned}$$

Il s'agit de reconnaître quelle altération recevait cette valeur de y_n, si, au lieu de diviser $x - x_0$ en n parties, on multipliait indéfiniment les éléments en sous-divisant chacun des accroissements Δx en m éléments $\Delta' x$ plus petits.

Soient y_r et y_{r+1}, deux quelconques des y successifs du calcul précédent, de telle sorte qu'on ait

$$y_{r+1} - y_r = f(x_r, y_r)\Delta x,$$

en sous-divisant Δx en m éléments $\Delta' x$ et conservant à x_r et à y_r les mêmes valeurs, on aura une nouvelle valeur de y_{r+1} répondant à x_{r+1} ou à $x_r + \Delta x$, laquelle résultera des équations successives,

$$\begin{aligned} y'_1 &= y_r + f(x_r, y_r)\,\Delta' x, \\ y'_2 &= y'_1 + f(x_r, y'_1)\,\Delta' x, \\ &\vdots \\ y_{r+1} &= y'_{m-1} + f(x'_{m-1}, y'_{m-1})\,\Delta' x, \end{aligned}$$

ou x'_1, x'_2, x'_3, etc...., désignant les valeurs de x intermédiaire entre x_{r+1} et x_r et y'_1, y'_2, y'_3, etc..., les valeurs de y fournies par ces équations aux différences. On peut les mettre sous cette forme

$$\begin{aligned} y'_1 - y_r &= f(x_r, y_r)\,\Delta' x, \\ y'_2 - y_r &= f(x_r, y_r)\Delta' x + f(x'_1, y'_1)\,\Delta' x, \\ &\vdots \\ y_{r+1} - y_r &= f(x_r, y_r)\,\Delta' x + \ldots + f(x'_{m-1}, y'_{m-1})\,\Delta' x. \end{aligned}$$

Tant que Δx ne dépassera pas $\frac{b}{A}$, c'est-à-dire que $A\Delta x < b$, on sera sûr que chacune des sommes qui forment les deuxièmes membres sera inférieure à $A\Delta x$, et qu'ainsi tous les y qui paraissent dans le calcul seront tous compris entre les limites $y_0 \pm A\Delta x$ ou $y_0 \pm b$. Ainsi, l'on peut poser

$$y_{r+1} = y_r + f(x_r + \theta\Delta x,\ y_r \pm \theta A\Delta x)\,\Delta x,$$

θ étant un nombre fractionnaire entre zéro et l'unité.

Si donc on désigne par δy_{r+1} la différence entre la valeur de y calculée par l'équation

$$y_{r+1} = y_r + f(x_r, y_r)\,\Delta x,$$

30..

et celle qui résulte des m sous-divisions de Δx; on aura

$$\delta y_{r+1} = [f(x_r + \theta A\Delta x, y_r \pm \theta A\Delta x) - f(x_r, y_r)]\Delta x.$$

Si l'on désigne par P et Q les maxima numériques des dérivées partielles $\frac{\mathrm{d}f(x,y)}{\mathrm{d}x}$ et $\frac{\mathrm{d}f(x,y)}{\mathrm{d}y}$ dans l'étendue du rectangle dont nous avons parlé, et qu'on développe la différence ci-dessus au moyen des dérivées partielles, on aura toujours

$$\delta y_{r+1} < (P + AQ)\Delta x^2.$$

Il reste à examiner maintenant quelle sera l'altération partielle produite sur y_n par cette variation δy_{r+1}, en supposant que l'on ne change pas le mode de division entre y_{r+1} et y_n, et que cette dernière quantité ne soit ainsi modifiée que par le seul changement de y_{r+1}.

En désignant de même par δy_{r+2}, δy_{r+3}, etc., les variations correspondantes des quantités y_{r+2}, y_{r+3}, etc., on aura évidemment

$$\delta y_{r+2} = \delta y_{r+1} + [f(x_{r+1}, y_{r+1} + \delta y_{r+1}) - f(x_{r-1}, y_{r+1})]\Delta x.$$

Cette équation fournit l'inégalité suivante :

$$\delta y_{r+2} < \delta y_{r+1}(1 + Q\Delta x),$$

et comme on aura semblablement,

$$\delta y_{r+3} < \delta y_{r+2}(1 + Q\Delta x),$$

et ainsi de suite jusqu'à

$$\delta y_n < \delta y_{n-1}(1 + Q\Delta x);$$

on en déduira

$$\delta y_n < \delta y_{r+1}(1 + Q\Delta x)^{n-r-1},$$

En appliquant cette formule au premier élément Δx à partir de x_0, sa sous-division produisant un changement δy_1 sur y_1, on aura pour la variation correspondante $\delta_1 y_n$ sur y_n

$$\delta_1 y_n < \delta y_1 (1 + Q\Delta x)^n{}_{-1}.$$

Si l'on sous-divise ensuite le second élément Δx, on produira sur y_n

un deuxième changement qui sera limité par l'inégalité

$$\delta_1 y_n < \delta y_1 (1 + Q\Delta x)^{n-1}.$$

On continuera à poser des relations semblables qui limiteront les altérations partielles

$$\delta_3 y_n, \quad \delta_4 y_n, \text{ etc.}$$

Il est clair que l'on aura le changement total sur y_n en faisant la somme

$$\delta y_n + \delta_1 y_n + \delta_2 y_n + \text{etc.}$$

En la désignant par δy_n et se rappelant que toutes ces quantités $\delta' y_n$, $\delta'_1 y_n$, etc., sont toutes inférieures à $(P + AQ)\Delta x^2$; on aura

$$\delta y_n < (P + AQ) \left[\frac{(1 + Q\Delta x)^n - 1}{Q}\right] \Delta x.$$

Cette inégalité subsistant, quel que soit le nombre des nouvelles sous-divisions de chacun des n éléments Δx en d'autres plus petits, elle aura encore lieu à la limite quand le nouvel y deviendra la valeur exacte ; ainsi elle donne une limite de l'erreur que l'on commet en prenant y_n au lieu de la limite.

La marche précédente, tout en donnant une limite pour l'erreur commise, a l'avantage de démontrer que y_n converge vers une limite lorsque n croît indéfiniment, et qu'il y a une fonction qui satisfait à l'équation différentielle : les valeurs de cette fonction peuvent ainsi se calculer par la méthode précédente avec telle approximation que l'on voudra.

Telle est l'analyse qu'on doit à M. Cauchy.

Nous remarquerons maintenant que si l'on admet *à priori* que la fonction y existe, la limite précédente peut être réduite à moitié. En effet, les valeurs de y répondant à x_{r+1} peuvent être mises sous la forme

$$y = y_r + f(x_r, y_r)\Delta x + \frac{\mathrm{d}f(x_r + \theta\Delta x, \; y_r \pm \theta A\Delta x)}{\mathrm{d}x} \frac{\Delta x^2}{2}.$$

Or, la valeur approchée de y que nous désignerons par y_{r+1} est donnée par

$$y_{r+1} = y_r + f(x_r, y_r)\Delta x;$$

Ainsi, la seule sous-division à l'infini des éléments entre x_r et x_{r+1} fait varier y de

$$\frac{\mathrm{d}f(x_r + \mathrm{A}\Delta x,\, y_r \pm \theta \mathrm{A}\Delta x)}{\mathrm{d}x}\,\frac{\Delta x^2}{2},$$

qui est inférieure à

$$(\mathrm{P} + \mathrm{AQ})\,\frac{\Delta x^2}{2}.$$

C'est la moitié de ce qu'on avait adopté par la marche précédente ; on peut donc poser en général

$$\delta y_n < \left(\frac{\mathrm{P} + \mathrm{AQ}}{2}\right)\left[\frac{(1 + \mathrm{Q}\Delta x)^n - 1}{\mathrm{Q}}\right]\Delta x.$$

Il ne faut pas perdre de vue que ces calculs par éléments ne peuvent réussir et conduire ainsi aux valeurs numériques de l'intégrale y qu'autant qu'on peut assigner un certain rectangle dans lequel ni la fonction $f(x, y)$, ni les deux dérivées partielles ne deviennent infinies. Les coordonnées extrêmes de ce rectangle étant x_0, $x_0 + a$, $y_0 - b$ et $y_0 + b$, on n'est sûr *à priori* de pouvoir calculer y que pour une valeur de x qui ne dépasse pas $x_0 + \frac{b}{\mathrm{A}}$, puisque dans ce cas seulement on sait que quel que soit l'indice r la valeur numérique de $y_r - y_0$ étant plus petite que $\mathrm{A}(x_r - x_0)$ sera alors inférieure à b.

On peut remarquer que, si la fonction $f(x, y)$ reste positive pour toute la superficie du demi-rectangle compris entre y_0 et $y_0 + b$; alors on n'a pas besoin de considérer le demi-rectangle inférieur compris entre y_0 et $y_0 - b$ puisqu'on sera sûr alors que dans l'étendue du calcul les valeurs de y vont en croissant : ce sera l'inverse si $f(x, y)$ reste négative.

Examinons maintenant le cas où l'on emploie d'autres équations aux différences pour calculer les valeurs de y. On peut, par exemple, procéder d'une manière analogue à celle qu'on prend pour les intégrales définies, quand on leur substitue l'aire d'un polygone au lieu de la somme des rectangles inscrits. On emploie alors l'équation aux différences

$$\Delta y = [f(x, y) + f(x, y + f(x, y)\Delta x)]\,\frac{\Delta x}{2}.$$

Examinons dans ce cas quelle limite on peut assigner à l'erreur commise.

Lorsque y n'existe pas dans $f(x,y)$ et que cette fonction est réduite à $f(x)$, Euler a donné une série pour exprimer le complément nécessaire pour former la valeur de y. M. Poisson a exprimé le premier le reste de cette série et a posé ainsi une limite à l'erreur. Il s'est fondé sur l'analyse propre aux développements des fonctions en séries de sinus et de cosinus. Nous exprimerons ici le reste par le seul emploi de la série de Taylor.

Supposons d'abord qu'on ait une fonction $f(x)$ au lieu de $f(x,y)$ et que l'équation aux différences soit

$$\Delta y = [f(x) + f(x+\Delta x)]\frac{\Delta x}{2}.$$

En développant $f(x+\Delta x)$ et s'arrêtant au troisième terme, cette équation devient

$$\Delta y = \Delta x f(x) + \frac{\Delta x^2}{2} f'(x) + \frac{\Delta x^3}{4} f''(x+\theta\Delta x),$$

θ étant un coefficient numérique plus petit que l'unité. Mais la valeur exacte de Δy serait donnée par

$$\Delta y = \Delta x f(x) + \frac{\Delta x^2}{2} f'(x) + \frac{\Delta x^3}{6} f''(x+\theta\Delta x).$$

ainsi la différence entre les deux y pourra être mise sous la forme de

$$\frac{\Delta x^3}{3} f''(x+\theta\Delta x).$$

Si A'' désigne la plus grande valeur numérique de $f''(x)$ pour toutes les valeurs de $x+\theta\Delta x$ qui peuvent être employées, l'expression ci-dessus sera inférieure à

$$\frac{\Delta x^3}{12} A''.$$

Revenons maintenant à l'équation différentielle où les deux variables x et y entrent dans la fonction, et soit

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y).$$

Nous déduirons y_{r+1} de y_r par l'équation aux différences

$$\Delta y = \{[f(x, y) + f x_r y + f(x, y)\Delta x]\} \frac{\Delta x}{2};$$

posons, pour abréger,

$$y + f(x_r y)\Delta x = y'_r.$$

et désignons par Y la valeur exacte de y. Nous pourrons remplacer l'équation aux différences qui fournit les y, par la suivante

$$\Delta y = [f(x, y) + f(x, \mathrm{Y})] \frac{\Delta x}{2} - [f(x, \mathrm{Y}) - f(x, y')] \frac{\Delta x}{2}.$$

Le premier terme du deuxième membre de cette équation peut être considéré comme une fonction de x, ainsi par la formule qu'on vient de donner pour ce cas, la différence entre ce terme et ce qu'il devait être pour donner la valeur exacte Y est plus petite que

$$\frac{\Delta x^3}{12} \mathrm{A}''.$$

La quantité A″ étant la plus grande valeur numérique de la dérivée de $f(x, y)$ prise par rapport à x, en y regardant y comme une fonction de x. En désignant par R, S, T les plus grandes valeurs numériques des trois dérivées partielles du deuxième ordre de $f(x, y)$; on aura

$$\mathrm{A}'' < \mathrm{R} + 2\mathrm{SA} + \mathrm{TA}^2 + \mathrm{Q}(\mathrm{P} + \mathrm{AQ}).$$

Cherchons maintenant une limite du deuxième terme de l'équation ci-dessus, c'est-à-dire une limite de

$$-[f(x, \mathrm{Y}) - f(x, y')] \frac{\Delta x}{2}.$$

Lorsqu'on veut passer de x à $x + \Delta x$, on a

$$\mathrm{Y} = y + f(x, y)\Delta x + f'(x + \theta\Delta x, y \pm \theta\mathrm{A}\Delta x) \frac{\Delta x^2}{2};$$

de plus, d'après la définition de y', on a

$$y' = y + f(x, y)\Delta x,$$

Ainsi,

$$Y = y' + f'(x + \theta\Delta x,\ y \pm \theta A\Delta x)\frac{\Delta x^2}{2}.$$

Introduisant cette valeur de Y dans $f(x,\ Y) - f(x,\ y')$, et remplaçant cette différence par une valeur moyenne de la dérivée partielle qui lui correspond, c'est-à-dire, la développant par la formule de Taylor arrêtée à la première dérivée; on aura

$$-\frac{\Delta x^3}{4}\frac{\mathrm{d}f[x,\ y + \theta f'(x + \theta\Delta x,\ y \pm \theta A\Delta x)]}{\mathrm{d}y}f'(x + \theta\Delta x,\ y \pm \theta A\Delta x).$$

Ayant désigné par P et Q les plus grandes valeurs numériques des dérivées partielles $\frac{\mathrm{d}f(x,\ y)}{\mathrm{d}x}$ et $\frac{\mathrm{d}f(x,\ y)}{\mathrm{d}y}$ pour toutes les valeurs de x et de y qui peuvent être employées dans le calcul, l'expression ci-dessus, en faisant abstraction du signe, sera inférieure numériquement à

$$\frac{\Delta x^3}{4}(P + AQ)Q.$$

Ainsi, dans le cas le plus défavorable, où le signe des deux parties que nous venons de calculer serait le même, la limite de l'erreur totale commise sur un y_{r+1} quelconque, sera donnée par

$$\delta y_{r+1} < \frac{\Delta x^3}{4}\left[\frac{A''}{3} + (P + AQ)Q\right].$$

Maintenant, il reste à voir quelle influence a l'erreur δy_{r+1} sur y_n quand on sous-divise les éléments Δx.

Comme on a

$$y_{r+2} = y_{r+1} + \frac{\Delta x}{2}\left\{f(x_{r+1},\ y_{r+1}) + f[x_{r+1},\ y_{r+1} + \Delta x f(x_{r+1},\ y_{r+1})]\right\},$$

on en déduit

$$\delta y_{r+2} < \delta y_{r+1} + \frac{\Delta x}{2}[Q\delta y_{r+1} + Q(\delta y_{r+1} + \Delta x Q\delta y_{r+1})],$$

ou bien,

$$\delta y_{r+1} < \delta y_{r+2}\left(1 + Q\Delta x + Q^2\frac{\Delta x^2}{2}\right);$$

on aura de même

$$\delta y_{r+3} < \delta y_{r+2}\left(1 + Q\Delta x + \frac{Q^2\Delta x^2}{2}\right),$$

et ainsi de suite.

En multipliant ces inégalités l'une par l'autre, on aura

$$\delta_{r+1} y_n < \delta y_{r+1} \left(1 + Q\Delta x + Q^2 \frac{\Delta x^2}{2}\right)^{n-r-1};$$

l'erreur totale sur y_n est la somme de tous les $\delta_{r+1} y_n$ résultant des changements produits par les sous-divisions des Δx; et comme on a toujours, quel que soit l'indice r,

$$\delta y_{r+1} < \frac{\Delta x^3}{4}\left[\frac{A''}{3} + Q(P + AQ)\right];$$

on aura pour l'erreur totale sur y_n

$$\delta y_n < \frac{\Delta x^2}{4}\left[\frac{A''}{8} + (P + AQ)Q\right]\left[\frac{\left(1 + Q\Delta x + Q^2\frac{\Delta x^2}{2}\right)^n - 1}{Q + Q^2\frac{\Delta x}{2}}\right];$$

A'' étant limité dans cette formule par

$$A'' < R + 2SA + TA^2 + (P + AQ)Q.$$

Le dernier facteur qui entre dans la limite de δy_n prend une valeur finie pour Δx infiniment petit et n infiniment grand; ainsi l'erreur est de l'ordre de Δx^2.

En égard aux signes des différences qui ont introduit A'' et ...... $Q(P + AQ)$, on peut remarquer que si la fonction $f(x, y)$ et ses dérivées du premier et du deuxième ordre étaient de même signe dans l'étendue du rectangle dont nous avons parlé, alors on pourrait dans l'expression ci-dessus remplacer le facteur

$$\frac{A''}{3} + (P + AQ)Q \text{ par } \frac{A''}{3} - (P + AQ)Q,$$

ou par

$$R + 2AS + A^2T - \frac{2}{3}Q(P + AQ).$$

On peut donner également la limite de l'erreur commise lorsqu'on emploie une équation aux différences formée d'un certain nombre de termes de la série de Taylor.

Ainsi, en partant de

$$\Delta y = f(x, y)\,\Delta x + \frac{df(x, y)}{dx}\frac{\Delta x^2}{2} + \ldots \frac{d^m f'(x, y)}{dx^m}\frac{\Delta x^m}{1.2.3\ldots m},$$

l'erreur commise sur $y+\Delta y$, répondant à $x+\Delta x$, sera moindre que la plus grande valeur de

$$\frac{d^{m+1} f(x+\theta\Delta x, y\pm\theta A\Delta x)}{dx^{m+1}} \cdot \frac{\Delta x^{m+1}}{1.2.3\ldots(m+1)}.$$

En désignant par $A^{(m+1)}$ la plus grande valeur de la dérivée totale qui forme le premier facteur de cette expression, et par δy l'erreur sur $y+\Delta y$, on aura

$$\delta y < A^{(m+1)} \frac{1.2.3\ldots(m+1)}{\Delta x^{m+1}}.$$

L'altération de y_{r+1}, résultant seulement de celle de y_r, sera donnée par

$$\delta y_{r+1} = \delta y_r + \frac{df(x_r, y_r\pm\theta\delta y_r)}{dy}\delta y_r \Delta x + \ldots \frac{d^{m+1} f(x_r, y_r+\theta\delta y_r)}{dx^m\, dy}\frac{\delta y_r \Delta x^m}{1.2\ldots m}.$$

Si, pour abréger, on pose en général la dérivée totale.... $\frac{d^m f(x, y)}{dx^m} = a^{(m)}$; on aura

$$\delta y_{r+1} = \delta y_r \left(1 + \frac{da}{dy}\Delta x + \ldots \frac{da^{(m)}}{dy} \cdot \frac{\Delta x^m}{1.2\ldots m}\right),$$

y devant avoir une valeur entre y_r et $y_r+\delta y_r$, dans les expressions $\frac{da}{dy} \ldots\ldots \frac{da^{(m)}}{dy}$.

En procédant comme dans le cas précédent, et désignant les plus grandes valeurs numériques des dérivées $\frac{da}{dy}, \ldots, \frac{da^{(m)}}{dy}$, quel que soit y dans l'intérieur du rectangle, par

$$Q,\ A_1,\ A''_1,\ \ldots\ldots\ A_1^{(m)},$$

on trouvera que l'erreur sur y_n, résultant du seul changement δy_r sur y_r sera limité par

$$\delta_r y_n < \delta y_r \left(1 + Q\Delta x + A''_1 \frac{\Delta x^2}{2} + \ldots + A_1^{(m)} \frac{\Delta x^m}{1.2\ldots m}\right)^{n-r},$$

31..

comme toutes les quantités δy_r sont limitées par

$$\delta y_r < A^{(m+1)} \frac{\Delta x^{m+1}}{1.2.3\ldots(m+1)},$$

et qu'en outre l'erreur totale δy_n de y_n est donnée par

$$\delta y_n = \delta_1 y_n + \delta_2 y_n + \delta_3 y_n \ldots \delta_n y_n,$$

on aura

$$\delta y_n < \frac{\Delta x^m\, A^{(m+1)}}{1.2.3\ldots(m+1)} \left[\frac{\left(1 + Q\Delta x + \ldots A_1^{(m)} \frac{\Delta x^m}{1.2\ldots m}\right)^n - 1}{Q + A'_1 \frac{\Delta x}{2} \ldots + A_1^{(m)} \frac{\Delta x^m}{1.2\ldots m}} \right];$$

le dernier facteur du deuxième membre étant fini quand n devient infini, la limite de l'erreur est de l'ordre de Δx^m.

Lorsque n devient très grand, et par conséquent lorsque Δx devient très petit devant l'intervalle total $x_n - x_0$, on peut poser

$$\delta y_n < \frac{\Delta x^m}{1.2.3\ldots m+1}(m+1)\left(\frac{e^{Qn\Delta x} - 1}{Q}\right);$$

Examinons encore ce que devient la limite de l'erreur quand on emploie pour équation aux différences l'intégrale d'une équation différentielle linéaire très approchée de l'équation différentielle du problème.

Suivant que ce sera la variable x ou la variable y qui, par la nature de la question, variera le moins rapidement en développant $f(x, y)$ à partir de x_0 et y_0 suivant les puissances des accroissements de x ou de y, on développera $f(x, y)$ suivant les puissances de l'accroissement de x ou de y.

Soit donc, pour fixer les idées, y la variable qu'on sait, par la nature de la question, devoir varier le moins rapidement; on posera $y = y_0 + \eta$, et l'on remplacera l'équation différentielle

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

par l'équation différentielle linéaire

$$\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}x} = f(x, y_0) + \frac{\mathrm{d}f(x, y_0)}{\mathrm{d}y}\eta.$$

Nous poserons, pour simplifier l'écriture,

$$f(x, y) = a,$$
$$\frac{\mathrm{d}f(x, y)}{\mathrm{d}y} = q.$$

a et q étant ici des fonctions de x. L'intégrale de l'équation linéaire ci-dessus sera

$$\eta = e^{\int q\,\mathrm{d}x}\int e^{-\int q\,\mathrm{d}x} a\,dx,$$

En se servant de cette équation comme d'une équation aux différences, on posera

$$\Delta y = e^{\int q\,\mathrm{d}x}\int e^{-\int q\,\mathrm{d}x} a\,dx.$$

On peut encore écrire cette équation sous la forme

$$y_{r+1} = y_r + \int_{x_r}^{x_{r+1}} e^{-\int_x^{x_{r+1}} q\,\mathrm{d}x} a\,\mathrm{d}x.$$

x_{r+1} étant ici égal à $x_r + \Delta x$.

Pour avoir une limite de la différence entre cette valeur de y_{r+1} et celle qui est exacte, on remarquera que cette valeur exacte peut être considérée comme fournie par l'intégrale de l'équation différentielle,

$$\frac{dy}{dx} = a + q\eta + \frac{\mathrm{d}^2 f(x, y \pm \theta A \Delta x)}{\mathrm{d}y^2}\frac{\eta^2}{2},$$

en sorte que la différence entre les deux y_{r+1} sera

$$\delta y_{r+1} = \int_{x_r}^{x_{r+1}} e^{-\int_x^{x_{r+1}} q\,\mathrm{d}x} \frac{\mathrm{d}^2 f(x, y \pm \theta A \Delta x)}{\mathrm{d}y^2}\frac{\eta^2}{2}\,\mathrm{d}x.$$

Si T désigne la valeur maximum de $\frac{d^2 f(x, y)}{dy^2}$ dans toute l'étendue du rectangle que nous avons déjà considéré; on aura, en vertu de ce que l'accroissement η de y est petit que $A\Delta x$,

$$\delta y_{r+1} < \frac{\Delta x^2}{2} A^2 T \int_{x_r}^{x_{r+1}} e^{-\int_x^{x_{r+1}} q dx} dx\,;$$

or, quel que soit le signe de q, on a

$$e^{-\int_x^{x_{r+1}} q dx} < e^{Q(x_{r+1}-x)} < e^{Q\Delta x},$$

et

$$\int_{x_r}^{x_{r+1}} e^{Q\Delta x} dx = e^{Q\Delta x} \Delta x,$$

ainsi on a

$$y_{r+1} < \frac{\Delta x^3}{2} A^2 T e^{Q\Delta x}.$$

Toutes les erreurs δy_1, δy_2, δy_3, etc., provenant de la même cause seront inférieures à cette même limite.

Il reste maintenant à examiner comment une erreur δy_r influe sur y_{r+1} tel qu'il a été déterminé par l'équation aux différences

$$y_{r+1} = y_r + \int_{x_r}^{x_{r+1}} e^{-\int_x^{x_{r+1}} q dx} a dx.$$

On tire de cette équation,

$$\delta y_{r+1} = \delta y_r + \int_{x_r}^{x_{r+1}} \frac{da}{dy_r} \delta y_r\, e^{-\int_x^{x_{r+1}} q dx} dx + \int_{x_r}^{x_{r+1}} a \frac{de^{-\int_x^{x_{r+1}} q dx}}{dy_r} \delta y_r dx;$$

les dérivées, par rapport à y_r devant prendre dans cette formule des valeurs moyennes parmi celles qui répondent aux points compris dans le rectangle. En remarquant qu'on a

$$\frac{de^{-\int_x^{x_{r+1}} q dx}}{dy_r} = -e^{-\int_x^{x_{r+1}} q dx} \int_x^{x_{r+1}} \frac{dq}{dy_r},$$

et en désignant par T, comme précédemment, la plus grande valeur numérique de $\frac{dq}{dy_r}$; il viendra en conservant aux lettres A et Q leurs significations précédentes

$$\delta y_{r+1} < \delta y_r (1 + Qe^{Q\Delta x}\Delta x + ATe^{Q\Delta x}\Delta x).$$

De toutes les inégalités semblables, on conclut

$$\delta_r y_n < \delta y_r [1 + Qe^{Q\Delta x}(Q + AT)\Delta x]^{n-r}.$$

En se rappelant que l'on a toujours,

$$\delta y_r < \frac{\Delta x^3}{2} TA^2 e^{Q\Delta x},$$

on trouvera pour le δy_n total

$$\delta y_n < \frac{\Delta x^2}{2} e^{Q\Delta x} A^2 T \left\{ \frac{[1 + e^{Q\Delta x}(Q + AT)\Delta x]^n - 1}{e^{Q\Delta x}(Q + AT)} \right\}.$$

Ainsi l'erreur, dans ce cas, est de l'ordre de Δx^2. On voit que dans le cas où les fonctions A et T sont très petites, cette erreur est aussi très petite si $Q\Delta x$ n'est pas très grand.

Si l'on peut reconnaître que la fonction $\frac{df(x, y)}{dy}$ dont le maximum numérique est Q reste positive dans l'étendue du rectangle que nous considérons; alors si Q_1 est le minimum numérique de cette fonction, on aura

$$e^{-\int_x^{x_{r+1}} q dx} < e^{-Q_1(x_{r+1} - x)},$$

et par suite

$$\int_{x_r}^{x_{r+1}} e^{-\int_x^{x_{r+1}} q dx} dx < \frac{1 - e^{-Q_1 \Delta x}}{Q_1};$$

on peut donc poser

$$\delta y_n < \frac{\Delta x}{2} A^2 T \left\{ \frac{[1 + e^{Q\Delta x}(Q + AT)\Delta x - 1]^n}{e^{Q\Delta x}(Q + AT)} \right\} \left(\frac{1 - e^{-Q_1 \Delta x}}{Q_1} \right),$$

On peut remarquer que dans beaucoup de questions de mécanique qui se rapportent à des mouvements qui tendent vers un état stable, on appliquera facilement les formules précédentes parce qu'on connaît *à priori* une limite que la variable y ne peut dépasser, et qu'ainsi on peut tracer le rectangle dans l'intérieur duquel le point donné par les coordonnées x et y sera toujours compris.

On pourrait étendre les considérations précédentes à un système d'équations différentielles simultanées, ainsi que M. Cauchy l'a fait pour le cas où l'on emploie pour équations aux différences celles qui sont fournies par le changement des d en Δ : les formules devenant très compliquées, nous n'avons pas cru devoir les présenter ici.

Sur une Lettre de D'ALEMBERT *à* LAGRANGE ;

PAR J. LIOUVILLE.

On sait que pour trouver l'intégrale complète d'une équation différentielle linéaire quelconque

$$(1) \qquad Py + Q\frac{dy}{dx} + R\frac{d^2y}{dx^2} + \ldots + M\frac{d^my}{dx^m} = X,$$

il suffit de connaître m ou même $(m-1)$ intégrales particulières, distinctes entre elles, de l'équation plus simple

$$(2) \qquad Py + Q\frac{dy}{dx} + R\frac{d^2y}{dx^2} + \ldots + M\frac{d^my}{dx^m} = 0.$$

Plus généralement, dès qu'on possède n intégrales particulières de l'équation (2), on peut ramener l'intégration de l'équation (1) à celle d'une autre équation linéaire de l'ordre $(m-n)$. Ces propositions fondamentales se déduisent facilement du principe de la variation des constantes; mais en les donnant pour la première fois dans le mémoire intitulé *Solution de différents problèmes de Calcul intégral*, Lagrange a fait usage d'un procédé singulier fondé sur l'intégration par parties : ce procédé a beaucoup d'analogie avec celui dont les géomètres se servent si souvent dans le calcul des équations différentielles partielles, lorsqu'ils déterminent les coefficients des divers termes des séries qui représentent, dans les problèmes physico-mathématiques, l'état initial des températures ou des vitesses de chaque molécule d'un système matériel donné.

Pour intégrer l'équation (1) on peut encore employer une autre méthode qu'il serait aisé de rattacher à celle de la variation des constantes et qui consiste à profiter de chaque intégrale particulière de l'équation (2) pour abaisser l'ordre de l'équation (1) d'une unité. En effet si y_1 désigne une de ces intégrales particulières et si l'on pose $y = y_1 \int t dx$, l'inconnue t dépendra d'une équation de l'ordre $(m-1)$ que l'on pourra semblablement abaisser à l'ordre $(m-2)$ si l'on connaît une seconde intégrale particulière y_2. En continuant ainsi l'on parvient enfin à une équation du premier ordre qui n'offre plus aucune difficulté. M. Libri a présenté cette méthode comme nouvelle dans le recueil de M. Crelle et même dans le présent journal (tome I, page 10). De plus, dans la 5^e édition de son excellent *Traité élémentaire du Calcul différentiel et du Calcul intégral*, un auteur dont personne ne respecte plus que moi les talents et le caractère, M. Lacroix s'exprime ainsi : *M. Libri a repris d'une manière très élégante et très féconde la théorie des équations différentielles linéaires.* Je me crois donc obligé d'avertir que la méthode dont il est question appartient non pas à M. Libri, mais à un géomètre français, à d'Alembert qui l'a donnée en 1764, dans une lettre écrite à Lagrange et imprimée tome III des *Miscellanea Taurinensia*, page 381. J'ignore comment ce passage a pu échapper à M. Libri qui s'est occupé si long-temps de l'histoire des sciences mathématiques(*).

(*) Voici la lettre de d'Alembert :

« Votre problème sur l'intégration de l'équation $Py + \frac{Qdy}{dx} + \frac{Rd^2y}{dx^2} \ldots + \frac{Md^my}{dx^m} = X$, lorsque l'on a $m-1$ valeurs de y dans l'équation $Py + \frac{Qdy}{dx} + \frac{Rd^2y}{dx^2} + \ldots \frac{Md^my}{dx^m} = 0$, m'a paru si beau, que j'en ai cherché une solution que voici.

» Soit $y = Vz$, V étant une indéterminée, et z une des valeurs de y qui satisfait à l'équation $Py + \frac{Qdy}{dx} + \ldots$ etc. $= 0$, et soit substituée cette valeur dans l'équation $Py + \frac{Qdy}{dx} + \text{etc.} \ldots = X$; la transformée sera composée 1° d'une partie $V\left(Pz + \frac{Qdz}{dx} \ldots + \frac{Md^mz}{dx^m}\right)$, où X ne se trouvera point, laquelle

sera évidemment $= o$, à cause de $Pz + \frac{Qdz}{dx} + \ldots \frac{Md^mz}{dx^m} = o$ ($hyp.$); 2° d'une partie où V ne se trouvera point, et qui ne contenant que dV avec ses différences, jusqu'à d^mV inclusivement, pourra par conséquent être abaissée au $(m-1)^e$ degré, en faisant $dV = V'dx$; or puisqu'on a $m-1$ valeurs de y, que $y = Vz$, et que z est déjà une des valeurs de y, on aura donc $m-2$ valeurs de V, en n'y comprenant pas l'unité; donc supposant que z' soit une de ces valeurs, et faisant $V' = z'\int V''dx$, comme on a fait $y = z\int V'dx$, on abaissera de même l'équation en V', et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on arrive à une équation qui sera de cette forme $dV''^{\text{etc.}} + KV''^{\text{etc.}}dx = X$, K et X étant des fonctions de x. Or on sait que cette équation est intégrable.

» Il est aisé de voir par cet exposé, 1° qu'à chaque transformation il disparaît un des coefficients, savoir, celui de y par la première, celui de dy par la seconde, etc., en sorte que dans la dernière transformée il ne restera que les deux coefficients de d^my et $d^{m-1}y$; or si on a une quantité de cette forme.... $\frac{\alpha d^{m-1}\lambda}{dx^{m-1}} + \frac{\beta d^m\lambda}{dx^m}$, et qu'on fasse $d\lambda = \zeta\eta dx$, on aura dans la transformée (en laissant à part les autres termes) 1° $\beta\zeta$ à la place de β et $\frac{d^{m-1}\eta}{dx^{m-1}}$ à la place de $\frac{d^m\lambda}{dx^m}$. 2° $\left[\alpha\zeta + \frac{\beta d\zeta}{dx} \times (m-1)\right] \frac{d^{m-2}\eta}{dx^{m-2}}$ au lieu de $\frac{\alpha d^{m-1}\lambda}{dx^{m-1}}$. Donc si on suppose que $\frac{Nd^{m-1}y}{dx^{m-1}} + \frac{Md^my}{dx^m}$ soient les deux derniers termes du premier membre de la proposée, et qu'on fasse $y = z\int z'dx\int z''dx\int z''' \ldots \int V''^{\text{etc.}}dx$, il sera aisé de trouver, par la remarque précédente, la forme de la dernière transformée, d'où l'on tirera aisément la valeur de $V''^{\text{etc.}}$. Je ne fais, Monsieur, qu'indiquer l'opération, qui serait très simple et très courte; vous suppléerez aisément à ce que je ne dis pas. »

Observations sur des théorèmes de Géométrie, énoncés page 160 de ce volume et page 222 du volume précédent;

PAR M. BINET,

Professeur au Collége de France.

Je viens de lire dans les livraisons d'avril et de mai un Mémoire fort intéressant de M. Lamé, sur les surfaces isothermes, dans les corps solides homogènes en équilibre de température. Ce mémoire fait partie d'un volume du *Recueil des Savans étrangers* (*), mais je n'avais pas eu occasion de le voir et d'y remarquer l'emploi que fait M. Lamé d'un théorème de Géométrie que j'ai publié en 1811. Je vais en reproduire l'énoncé tel qu'on le trouve dans un mémoire sur les axes principaux et les moments d'inertie des corps, qui fait partie du 16ᵉ cahier du *Journal de l'École Polytechnique*. Pour faire comprendre cet énoncé, il convient de rappeler qu'une surface du second degré étant donnée, si l'on détermine les foyers de ses sections principales, une infinité de surfaces du même ordre, de même espèce ou d'espèces différentes, peuvent avoir les mêmes foyers pour leurs sections principales : ce sont les surfaces auxquelles M. Lamé donne le nom, fort convenable, de *surfaces homofocales*. Ces surfaces qui se sont présentées aux géomètres, en premier lieu, dans la théorie de l'attraction des sphéroïdes elliptiques sur un point extérieur, jouissent de belles et utiles propriétés. Voici celle dont il s'agit : « les surfaces du second degré ayant les mêmes foyers pour leurs sections principales doivent respectivement se couper, de ma-

(*) Ce volume n'a pas encore paru. Le mémoire de M. Lamé n'était connu jusqu'ici des géomètres que par un petit nombre d'exemplaires particuliers ; en le publiant dans ce journal, je crois avoir rendu à la science un véritable service. La réclamation très fondée de M. Binet n'ôte rien au mérite du travail de M. Lamé, qui me semble, je le répète, ouvrir une route nouvelle dans le calcul des équations différentielles partielles. J. LIOUVILLE.

nière que le système de tous les hyperboloïdes à une nappe, coupe un quelconque des ellipsoïdes suivant les lignes de l'une de ses courbures; le système des hyperboloïdes à deux nappes coupe le même ellipsoïde selon le second système de ses lignes de courbure, et ces propriétés sont d'ailleurs réciproques. De là il suit que tout l'espace sera divisé par les surfaces que nous avons considérées (les surfaces homofocales) en une infinité de parallélépipèdes rectangles infiniment petits, dont les arètes seront les éléments des lignes de courbure communes aux surfaces; et les axes principaux du corps répondant au sommet de l'un de ces parallélépipèdes seront les tangentes aux trois lignes de courbure communes des trois surfaces du second ordre qui y passent. » (Page 59 du XVI[e] cahier du *Journal de l'École Polytechnique*.)

A cette citation, j'ajouterai celle de l'énoncé du même théorème qui se trouve dans le rapport que MM. Laplace et Biot firent sur le mémoire relatif aux moments d'inertie et aux axes principaux des corps : ce rapport fut imprimé dans *le Moniteur* (n° du 4 juillet 1811), et là se trouve une date authentique et une publication réelle : « Les surfaces dont nous venons de parler (ellipsoïdes » hyperboloïdes à une et à deux nappes) prendront divers pé» rimètres, et conserveront toutefois les mêmes excentricités pour » leurs sections principales. M. Binet remarque de plus qu'elles » se couperont à angles droits, et suivant leurs lignes de cour» bure, ce qui donne une construction de ces lignes aussi simple » qu'élégante pour les surfaces du second ordre, au moyen de cette » pénétration. Si l'on considère un point quelconque de leurs intersec» tions, les axes principaux qui y répondent sont les tangentes à ces » mêmes lignes de courbure, etc. » Ce rapport avait été lu à l'Institut le 24 juin 1811, en présence de Monge, à qui l'on doit les premières recherches sur les lignes de courbure, ainsi que la détermination de ces lignes pour les surfaces du second degré : pour Monge ce théorème était nouveau. D'illustres géomètres, Lagrange, Laplace, Legendre, Poisson assistaient à cette séance.

Il est juste de reconnaître que de son côté, M. Dupin, dans des recherches curieuses sur les surfaces orthogonales, a rencontré la même propriété des surfaces du second degré homofocales, comme application d'un théorème plus général. Mais la date de publication des mé-

moires de M. Dupin est postérieure de deux années à celle du mien, quoique ses recherches sur ce sujet, d'après son assertion, remontent à une époque antérieure à 1811. Le théorème de M. Dupin semble aussi n'être pas parvenu à la connaissance de M. Lamé, car dans son mémoire sur les lois de l'équilibre du fluide éthéré, il eût pu partir, comme d'un résultat connu, de ce théorème général, savoir, que « trois systèmes de surfaces orthogonales conjuguées sont toujours » tels que deux quelconques d'entre eux tracent sur une surface du » troisième toutes ses lignes de courbure. » (Page 225 du XXIII^e cahier du *Journal de l'École Polytechnique*.) Cette belle proposition de Géométrie est précisément le théorème de M. Dupin.

La forme sous laquelle j'ai considéré l'équation des surfaces homofocales est

$$\frac{a^2}{K-A} + \frac{b^2}{K-B} + \frac{c^2}{K-C} = 1;$$

a, b, c sont les coordonnées d'un point quelconque de la surface, A, B, C trois constantes positives telles que $A > B > C$, et K une quantité susceptible de toutes les grandeurs supérieures à C : ce qui donne lieu aux trois espèces principales de surfaces du second degré.

De trois formules semblables à la précédente, répondant à trois valeurs différentes de K, M. Lamé déduit les coordonnées a, b, c en fonction des trois valeurs attribuées à K, ou à des quantités μ^2, ν^2, ρ^2 qui remplissent l'office de notre quantité K. J'ai aussi remarqué, il y a beaucoup d'années, et à propos du même sujet, l'expression simple de ces coordonnées; mais j'étendis alors mes recherches à la détermination d'un nombre quelconque de grandeurs a^2, b^2, c^2, etc., entre un pareil nombre d'équations de la forme précédente. Je rapporterai ici le résultat que je trouvai, parce qu'il peut servir en d'autres circonstances; j'y joindrai la démonstration qui me l'a fourni. Pour plus de simplicité, j'écris a, b, c, etc., à la place de a^2, b^2, c^2, etc.

Prenons donc un nombre n d'équations de la forme

$$(n)\quad\left\{\begin{array}{l} \dfrac{a}{K-A} + \dfrac{b}{K-B} + \dfrac{c}{K-C} + \text{etc.} = 1, \\[2mm] \dfrac{a}{K_1-A} + \dfrac{b}{K_1-B} + \dfrac{c}{K_1-C} + \text{etc.} = 1, \\[2mm] \dfrac{a}{K_2-A} + \dfrac{b}{K_2-B} + \dfrac{c}{K_2-C} + \text{etc.} = 1, \\ \text{etc.} \end{array}\right.$$

Nous nous proposons de former l'expression des n inconnues a, b, c, etc., déterminées par ces équations. L'on y parviendra par les considérations suivantes :

Soit $F(x)=(x-A)(x-B)(x-C)\ldots\ldots$ une fonction entière du degré n marqué par le nombre de ses facteurs $x-A$, $x-B$, etc., et $f(x)$ une autre fonction entière dont le degré ne surpasse pas $n-1$; la fraction $\frac{fx}{Fx}$ sera décomposable en n fractions simples qui auront les dénominateurs $x-A$, $x-B$, etc.; et l'on sait que si $F'(x)$ désigne le coefficient différentiel $\frac{dFx}{dx}$, on a, par la formule d'Euler,

$$\frac{fx}{Fx}=\frac{fA}{(x-A)F'A}+\frac{fB}{(x-B)F'B}+\frac{fC}{(x-C)F'C}+\text{etc.}$$

Dans cette formule identique, écrivons successivement K, K_1, $K_2\ldots$ à la place de x, nous composerons ainsi n équations de la forme

$$(N)\left\{\begin{array}{l}
\frac{a}{K-A}+\frac{b}{K-B}+\frac{c}{K-C}+\text{etc.}=\frac{f(K)}{F(K)},\\
\frac{a}{K_1-A}+\frac{b}{K_1-B}+\frac{c}{K_1-C}+\text{etc.}=\frac{f(K_1)}{F(K_1)},\\
\frac{a}{K_2-A}+\frac{b}{K_2-B}+\frac{c}{K_2-C}+\text{etc.}=\frac{f(K_2)}{F(K_2)},\\
\text{etc.}
\end{array}\right.$$

et ces équations seront évidemment satisfaites en prenant pour a, b, c, etc., les valeurs

$$a=\frac{f(A)}{F'(A)}=\frac{f(A)}{(A-B)(A-C)(A-D)\ldots}$$
$$b=\frac{f(B)}{F'(B)}=\frac{f(B)}{(B-A)(B-C)(B-D)\ldots},$$
etc.

Pour obtenir des équations entièrement semblables à celles que nous nous sommes proposé de résoudre, nous composerons une fonction $\mathrm{f}(x)$ du degré n avec les facteurs inégaux

$$(x-K)(x-K_1)(x-K_2)\text{ etc.}$$

Si l'on prend pour le polynome du degré $n-1$, que nous avons désigné par $f(x)$, la différence $F(x)-\mathrm{f}(x)$ des deux polynomes du

degré n qui ont le même premier terme, alors le second membre de la première des équations ci-dessus $\frac{f(K)}{F(K)}$ deviendra $\frac{F(K)-f(K)}{F(K)}=1$, parce que $f(K)=0$; il en sera ainsi des autres quantités $\frac{f(K_1)}{F(K_1)}$, $\frac{f(K_2)}{F(K_2)}$, etc., et les équations (N) prendront la forme proposée (n).

Les valeurs de a, b, c, etc., qui satisfont à n équations de la forme

$$(n)\quad \left\{\begin{array}{l} \frac{a}{K-A}+\frac{b}{K-B}+\frac{c}{K-C}+\text{etc.}=1,\\ \frac{a}{K_1-A}+\frac{b}{K_1-B}+\frac{c}{K_1-C}+\text{etc.}=1,\\ \text{etc.}\end{array}\right.$$

seront $$a=\frac{F(A)-f(A)}{F'(A)}=-\frac{f(A)}{F'(A)},\quad b=-\frac{f(B)}{F'(B)},\ \text{etc.},$$

puisque $F(A)=0$, $F(B)=0$, etc.; ainsi l'on aura

$$a=-\frac{(A-K)(A-K_1)(A-K_2)\ldots}{(A-B)\ (A-C)\ldots}$$
$$b=-\frac{(B-K)(B-K_1)(B-K_2)\ldots}{(B-A)\ (B-C)\ldots},$$
$$c=\text{etc.}$$

Lorsque l'on veut appliquer ces formules aux surfaces du second degré homofocales qui se coupent, il suffit de remplacer a, b, c, par a^2, b^2, c^2, et de réduire à trois le nombre des équations.

Ces remarques se rapportent à un écrit déjà bien ancien; il a pu rester ignoré de géomètres qui, s'occupant de sujets différents par leur objet, ont pu rencontrer daus leurs recherches les mêmes propositions que moi. J'ajouterai que c'est dans le même mémoire que l'on a donné, pour la première fois, l'équation du troisième degré dont les racines sont les carrés des demi-axes d'une surface du second ordre, et que l'on a énoncé ce théorème cité par M. Saint-Guilhem, page 222 du premier volume de ce journal, savoir, que la somme des carrés des faces d'un parallélépipède conjugué circonscrit à un ellipsoïde, est une quantité constante pour tous les parallélépipèdes conjugués; proposition analogue à deux autres que l'on connaissait depuisquelques années, et qui avaient été publiées par M. Livet. (13e cahier du *Journal de l'École Polytechnique.*)

RECHERCHES SUR LES NOMBRES;

Par M. LEBESGUE,

Professeur-suppléant à la Faculté des Sciences de Grenoble.

§ I^{er}. *Nombre de solutions de la congruence $ax^m + by^m + \ldots + ku^m \equiv l$ (mod. $p = hm + 1$). Le module étant supposé premier.*

Quoique M. Libri ait déjà donné une formule très remarquable qui détermine le nombre de solutions d'une congruence quelconque, j'ai cru devoir cependant reprendre la question en suivant une autre marche, afin de ne pas supposer la résolution de l'équation $x^p = 1$, voulant au contraire la déduire des formules de ce paragraphe.

I.

Congruence conditionnelle à laquelle satisfait le nombre de solutions d'une congruence algébrique et entière $f(x_1, x_2 \ldots x_k) \equiv 0$ (mod. p).

On suppose ici que la fonction $f(x_1, x_2, \ldots x_k)$ qui renferme k inconnues est une somme de termes de la forme $Ax_1^a x_2^b \ldots x_k^f$, où les exposants sont des entiers positifs et le coefficient A un entier positif ou négatif. De plus quand une inconnue manque dans un terme, on l'y fait entrer avec l'exposant zéro.

Il est question seulement ici des solutions en nombres entiers positifs et moindres que le module, zéro n'étant pas excepté des valeurs données aux inconnues. Voici comment on déterminerait les solutions et leur nombre, si la grandeur du module ne rendait pas le calcul impraticable. On arrangerait k à k, de toutes les manières possibles et

sans exclure la répétition d'un même nombre, les p nombres... $0, 1, 2, \ldots (p-1)$; ce qui donnerait p^k arrangements : les uns tels que $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_k$ donnant $f(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_k) \equiv 0 \pmod{p}$ seraient les solutions et les seules solutions, puisque les autres arrangements tels que $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_k$ ne donneraient pas $f(\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_k) \equiv 0 \pmod{p}$. Le nombre de solutions ainsi déterminé peut être représenté par S_k, l'indice rappelant le nombre des inconnues que renferme la congruence.

Quelquefois il est avantageux d'exclure zéro des valeurs données aux inconnues : dans ce cas les solutions se trouvent parmi les $(p-1)^k$ arrangements k à k des $p-1$ nombres $1, 2, 3 \ldots (p-1)$. Ce nombre de solutions peut être représenté par s_k : il est en général moindre que S_k.

Ceci posé, voici la congruence conditionnelle à laquelle satisfait le nombre S_k de solutions d'une congruence

$$f(x_1, x_2, \ldots x_k) = X_k \equiv 0 \pmod{p}.$$

THÉORÈME. *Soit S_k le nombre de solutions de la congruence $f(x_1, x_2, \ldots x_k) \equiv 0 \pmod{p}$, si l'on fait $f(x_1, x_2, \ldots x_k) = X_k$ et que l'on suppose $X_k^{p-1} = \Sigma A x_1^a x_2^b \ldots x_k^l$, on aura, en représentant par $\Sigma A_{a(p-1)}$ la somme des coefficients des termes du développement de X_k^{p-1}, où les inconnues entrent toutes (c'est-à-dire en nombre k) avec des exposants multiples de $p-1$ et plus grands que zéro,*

$$(1) \qquad S_k \equiv (-1)^{k+1} \Sigma A_{a(p-1)} \pmod{p}.$$

DÉMONSTRATION. On substituera dans X_k^{p-1} pour $x_1, x_2, \ldots x_k$ les nombres qui résultent de chacun des p^k arrangements k à k des nombres $0, 1, 2, \ldots (p-1)$. Pour chaque solution $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_k)$ on trouvera $X_k^{p-1} \equiv 0 \pmod{p}$, puisque l'on aura $X_k \equiv 0 \pmod{p}$. Pour toute autre substitution, on aura $X_k^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$, puisque X_k ne sera pas divisible par p. La somme des résultats de ces substitutions successives sera donc

$$\equiv S_k \times 0 + (p^k - S_k) \times 1 \equiv - S_k \pmod{p}.$$

D'un autre côté, si l'on pose pour abréger

$$0^a + 1^a + 2^a + \ldots + (p-1)^a = \int a,$$

la somme exacte des valeurs de X_k^{p-1} ou de $\Sigma A x_1^a x_2^b \ldots x_k^g$ sera $\Sigma A \int a \int b \ldots \int g$. On le voit de suite en faisant d'abord les substitutions pour x_1 et sommant, ce qui donne $\Sigma A \int a x_2^b \ldots x_k^g$; puis pour x_2 dans la somme précédente et sommant de nouveau, ce qui donne $\Sigma A \int a \int b \ldots x_k^g$; et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on trouve $\Sigma A \int a \int b \ldots \int g$ après avoir fait les substitutions pour les k inconnues, que l'on suppose toutes dans chaque terme, ce qui introduit des sommes $\int 0 = p$, dans les termes où des inconnues manquent. Or on a par des théorèmes bien connus $\int a \equiv 0 \pmod{p}$, si a n'est pas multiple de $p-1$, et $\int a \equiv p-1 \equiv -1 \pmod{p}$, si a est multiple de $p-1$. D'après cela chaque terme de $\Sigma A \int a \int b \ldots \int g$ sera $\equiv 0 \pmod{p}$, ou $\equiv A(-1)^k \pmod{p}$, ce cas arrivant et ne pouvant arriver que quand les exposants $a, b, \ldots g$ en nombre k sont tous multiples de $p-1$ et plus grands que zéro. Si pour rappeler cette circonstance on représente le coefficient A de $A(-1)^k$ par $A_{(p-1)}$, la somme des valeurs de $X_k^{p-1} = \Sigma A x_1^a x_2^b \ldots x_k^g$ sera donc

$$\equiv \Sigma A_{(p-1)} (-1)^k \pmod{p},$$

mais elle est aussi

$$\equiv - S_k \pmod{p}. \text{ De là résulte } -S_k \equiv (-1)^k \Sigma A_{(p-1)} \pmod{p},$$

ou encore

$$S_k \equiv (-1)^{k+1} \Sigma A_{(p-1)} \pmod{p}.$$

Comme il est dit dans l'énoncé.

Si l'on exclut les solutions renfermant une ou plusieurs inconnues égales à zéro, on trouvera tout-à-fait de même la formule

$$(2) \qquad S_k \equiv (-1)^k \left[1 - \Sigma A'_{(p-1)}\right] \pmod{p}$$

où $\Sigma A'_{(p-1)}$ indique la somme des coefficients du développement de X_k^{p-1} répondant à des termes dans lesquels les exposants des inconnues sont tous multiples de $p-1$, sans ajouter cette restriction qu'ils doivent être plus grands que zéro. C'est pour rappeler cette circonstance que la lettre A a été accentuée.

La formule (2) est beaucoup moins commode pour les applications que la formule (1), dont nous nous servirons principalement.

Quand il n'y aura qu'une ou deux inconnues, les congruences conditionnelles (1) et (2) détermineront complétement S_1 et S_2, ou s_1 et s_2. Mais pour un plus grand nombre d'inconnues il faudra employer une autre méthode. Car si les nombres S_k et s_k deviennent plus grands que le module, la congruence conditionnelle donnera pour S_k et s_k une expression $hp+\sigma$ où σ sera un nombre déterminé moindre que p, mais où h restera indéterminé. M. Libri a déjà donné des congruences analogues à celles (1) et (2); mais, comme les précédentes, elles ne sont qu'un premier pas vers la solution du problème qui fait l'objet de ce paragraphe.

II.

Nombre de solutions de la congruence $x^m \equiv a$ (mod. $p = hm + 1$).

La congruence $ax^m \equiv b$ (mod. $p = hm + 1$) se ramène à ..... $y^m \equiv A$ (mod. p) en faisant $A \equiv ba^{m-1}$ et $y \equiv ax$ (mod. p), puisque l'on a $a^m x^m \equiv ba^{m-1}$ (mod. p); ou bien encore à $x^m \equiv A$ (mod. p), puisque, en posant $ag \equiv 1$, $bg \equiv A$, l'on a $agx^m \equiv bg$ (mod. p). Comme d'ailleurs le nombre de solutions ne change pas, nous considérerons directement la congruence $x^m \equiv a$ (mod. p).

Ici $X_1 = x^m - a$, et le terme général du développement de X_1^{p-1} est
$$\frac{p-1 \,.\, p-2 \ldots p-n}{1.2\ldots n} (-a)^n x^{m(p-1-n)} = \frac{Mp + 1.2.3\ldots n.a^n}{1.2.3\ldots n} x^{m(p-1-n)} \ldots$$
$$\equiv a^n x^{m(p-1-n)} \text{ (mod. } p).$$

On rendra l'exposant de x multiple de $p-1$, en posant $mn = (p-1)g$; et si d est le plus grand commun diviseur de m et de $p-1$, n prendra les valeurs 0, $1.\frac{p-1}{d}$; $2.\frac{p-1}{d}$, $3.\frac{p-1}{d}$; ... $(d-1).\frac{p-1}{d}$; de là, au moyen de la formule (1), où l'on fera $k=1$, on trouvera

$$(3) \qquad S_1 \equiv 1 + a^{\frac{p-1}{d}} + a^{2.\frac{p-1}{d}} \ldots + a^{(d-1)\frac{p-1}{d}} \equiv \frac{a^{p-1} - 1}{a^{\frac{p-1}{d}}} \text{ (mod. } p).$$

Or, évidemment, on ne peut avoir ni $S_1 = p$, ni $S_1 > p$, donc

1°. Si l'on a $a^{\frac{p-1}{d}} \equiv 1$ (mód. p), il en résultera $S_1 = d$.

2°. Si l'on n'a pas $a^{\frac{p-1}{d}} \equiv 1$ (mod. p), il en résultera $s_1 = 0$.

Ce dernier cas résulte de ce que $a^{p-1} - 1 \equiv 0$ (mod. p).

La condition de possibilité de la congruence $x^m \equiv a$ (mod. p) est donc $a^{\frac{p-1}{d}} \equiv 1$ (mod. p) et le nombre de ses solutions est d, ce nombre représentant le plus grand commun diviseur de m et de $p-1$.

La congruence $x^m \equiv a$ (mod. p) n'ayant que d racines réelles, on la ramènera à la forme $x^d \equiv a^i$ (mod. $p = gd + 1$) en posant..... $mi \equiv d$ (mod. $p - 1$). D'après cela on considère principalement le cas de la congruence $x^m \equiv a$ (mod. $p = hm + 1$), pour lequel $d = m$; alors la condition de possibilité devient $a^{\frac{p-1}{m}} \equiv 1$ (mod. p) et le nombre de solutions est égal à m. Si l'on avait $a \equiv 0$ (mod p) il n'y aurait qu'une solution, savoir $x = 0$. Quand la congruence.... $x^m \equiv a$ (mod p.) est possible, on dit que a est un résidu de m^e puissance pour le module p; et particulièrement un résidu quadratique, cubique, biquadratique, selon que m est égal à 2, 3 ou 4.

Voici les énoncés de quelques propositions qui serviront plus loin.

Les résidus de m^e puissance pour le module $p = mh + 1$ sont les racines de la congruence $x^{\frac{p-1}{m}} \equiv 1$ (mod. p). Ils sont en nombre $\frac{p-1}{m}$, et si l'un d'eux est représenté par a, la formule ay^m les contient tous.

Les nombres qui ne sont pas résidus de $m^{ième}$ puissance pour le module p, sont nommés non-résidus; ils sont en nombre.... $p - 1 - \frac{p-1}{m} = (m-1).\frac{p-1}{m}$: ils se subdivisent en $m - 1$ classes de $\frac{p-1}{m}$ nombres chacune. Voici le principe de cette classification importante: il est bon de le rappeler ici, à cause de l'usage continuel que nous en ferons.

La congruence $x^m \equiv 1$ (mod. $p = hm + 1$), ayant pour racine un certain nombre entier r, les nombres $r, r^2, r^3, \ldots r^m \equiv 1$ (mod. p) satisferont tous à la congruence $x^m \equiv 1$ (mod. p). Or si l'on a.....

$m = a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots$ où a, b, $c \ldots$ sont des nombres premiers différents, on a prouvé qu'il y a $m.\frac{a-1}{a}.\frac{b-1}{b}.\frac{c-1}{c}\ldots$ valeurs de r, telles que les puissances successives $r^1, r^2, r^3, \ldots r^m$ seront toutes incongrues suivant le module p, et formeront par conséquent la suite complète des racines de la congruence $x^m \equiv 1$ (mod. $p = hm + 1$). Les racines r qui jouissent de cette propriété sont dites *primitives* (*). D'après cela on classe les nombres $1, 2, 3 \ldots (p-1)$, ainsi qu'il suit :

Soit r une racine primitive de $x^m \equiv 1$ (mod. p) et ρ une racine primitive de p ou de $x^{p-1} \equiv 1$ (mod. p).

(*) Voici les énoncés de deux propositions qui prouvent l'existence des racines primitives et qui en déterminent le nombre.

Si l'on représente par A_1, $A_2 \ldots A_g$ des nombres entiers ou des polynomes de forme $a + bx + ex^2 + \ldots fx^k$, etc. Si de plus l'on représente par P_1 le produit des quantités A_1, $A_2 \ldots A_g$, par P_2 le produit des plus grands communs diviseurs des mêmes quantités combinées 2 à 2, par P_3 le produit desplus grands communs diviseurs des mêmes quantités combinées 3 à 3, et ainsi de suite : le plus petit nombre, ou le polynome de moindre degré divisible par $A_1, A_2, \ldots A_g$ sera $\frac{P_1.P_3.P_5\ldots}{P_2.P_4.P_6\ldots}$.

Si l'on suppose $m = a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots\ldots\ldots$ (a, b, $c \ldots$ étant des nombres premiers différents) et que l'on fasse $A_1 = x^{\frac{m}{a}} - 1$, $A_2 = x^{\frac{m}{b}} - 1$, $A_3 = x^{\frac{m}{c}} - 1$, etc., la congruence qui donne les racines primitives de la congruence $x^m \equiv 1$ (mod. p) sera $\frac{(x^m - 1).P_2.P_4.P_6\ldots}{P_1P_3P_5\ldots} \equiv 0$: (mod. p) son degré $m.\frac{a-1}{a}.\frac{b-1}{b}.\frac{c-1}{c}\ldots\ldots$ marquera le nombre des racines primitives.

Nous omettrons les démonstrations qui ne présentent aucune difficulté. Nous pourrons revenir dans un autre mémoire sur la détermination des racines primitives et la construction des tables qui résolvent la congruence $x^m \equiv a$ (mod. p), comme les tables de logarithmes résolvent $x^m = a$. (V. les *Recherches arithmétiques* de M. Gauss.) Nous ajouterons seulement que la congruence précédente s'étend aux racines primitives imaginaires de la congruence $x^m \equiv 1$ (mod. $p = hm - 1$). (V. *De Residuis cubicis commentatio numerosa*, J. de M. Crelle, tome II.)

Pour la détermination de la congruence aux racines primitives, on peut consulter les exercices mathématiques de M. Cauchy, année 1829. J'avais donné antérieurement la même congruence dans le *Bulletin du Nord*, journal scientifique et littéraire publié à Moscou.

1°. *On aura* $r \equiv \rho^h$ (mod. $p = hm + 1$).

2°. *Les résidus de* $m^{\text{ième}}$ *puissance ou les racines de* $x^{\frac{p-1}{m}} \equiv 1$ (mod. p) *seront* $\rho^0, \rho^m, \rho^{2m}, \ldots \rho^{(h-1)m}$: *leur formule est* y^m.

3°. *Les non résidus de première classe, ou les racines de*..... $x^m \equiv r \equiv \rho^h$ (mod. p) *seront les nombres* ρ, ρ^{m+1}, $\rho^{2m+1}, \ldots \rho^{(h-1)m+1}$: *leur formule est* ρy^m.

4°. *Les non-résidus de deuxième classe, ou les racines de*.... $x^h \equiv r^2 \equiv \rho^{2h}$ (mod. p) *seront les nombres* ρ^2, $\rho^{m+2}, \ldots \rho^{(m-2)m+2}$: *leur formule est* $\rho^2 y^m$.

5°. *En général, les non-résidus de* $g^{\text{ième}}$ *classe, ou les racines de la congruence* $x^m \equiv r^g \equiv \rho^{gh}$ (mod. p), *seront les nombres*..... $\rho^g, \rho^{m+g}, \ldots \rho^{(h-1)m+g}$, *dont la formule est* $\rho^g y^m$.

On emploie fréquemment les conséquences suivantes :

Pour le cas de $\frac{p-1}{m}$ *nombre pair,* -1 *sera résidu de* $m^{\text{ième}}$ *puissance, pour le module p. Pour le cas de* $\frac{p-1}{m}$ *nombre impair, ce qui ne peut arriver que pour m pair,* -1 *sera un non-résidu de* $\left(\frac{m}{2}\right)^{\text{ième}}$ *classe.*

Le produit abcd... sera résidu de $m^{\text{ième}}$ *classe pour le module p, si la somme des numéros de classe des facteurs non-résidus, est multiple de m, ou de forme Km. Ce produit sera au contraire un non-résidu de* $g^{\text{ième}}$ *classe, si la somme des numéros de classe des facteurs non-résidus est de la forme* $Km + g$.

Si a est un non-résidu de première classe, les nombres $a^1, a^2, a^3, \ldots a^{m-1}$, *seront des non-résidus de* 1er, 2e, 3e,... $(m-1)^{\text{ième}}$ *classe respectivement.*

Quoiqu'il y ait de l'arbitraire dans le numérotage des classes de non-résidus qui change avec la racine primitive ρ, cette classification n'en est pas moins importante, ainsi que l'a prouvé M. Gauss par sa résolution de l'équation $x^n = 1$, où il ne reste guère à faire que des simplifications de calcul, qui n'entraient point dans le plan de son ouvrage.

III.

Nombre de solutions de la congruence $a_1x_1^m + a_2x_2^m \equiv a_3 (\text{mod. } p = hm + 1)$.

Pour le cas de $a_3 \equiv 0 \ (\text{mod. } p)$; on a de suite ce théorème :

La congruence $a_1x_1^m + a_2x_2^m \equiv 0 \ (\text{mod. } p)$ *a une seule solution* $(x_1 = 0, \ x_2 = 0)$, *si* $-a_2a_1^{m-1}$ *est non-résidu de* $m^{\text{ième}}$ *puissance, et* $1 + m(p-1)$ *si* $-a_2a_1^{m-1}$ *est résidu de* $m^{\text{ième}}$ *puissance.*

Pour le second cas les $m(p-1)$ solutions autres que $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, résultent de la résolution de $z^m \equiv -a_2x_1^{m-1} \ (\text{mod. } p)$, en posant $zx_2 \equiv a_1x_1 \ (\text{mod. } p)$.

La formule générale $a_1x_1^m + a_2x_2^m \equiv a_3 (\text{mod. } p)$ se ramène de suite à la formule particulière $x^m - ay^m \equiv b \ (\text{mod. } p)$ en posant $x \equiv a_1x_1$, $y \equiv x_2$, $a \equiv -a_2a_1^{m-1}$, $b \equiv a_3a^{m-1} \ (\text{mod. } p)$, ce qui ne change pas le nombre de solutions, c'est donc cette dernière que nous allons considérer pour simplifier les calculs.

La congruence $x^m \equiv ay^m + b \ (\text{mod. } p = hm + 1)$, *a un nombre de solutions multiple de m et moindre que mp.*

En effet, si l'on peut avoir $ay^m + b \equiv 0 \ (\text{mod. } p)$, cela aura lieu pour m valeurs de y, à chacune desquelles correspondra $x = 0$; on aura d'abord m solutions.

Ensuite toute valeur de y qui donne $ay^m + b$ congru à un résidu de $m^{\text{ième}}$ puissance, donne m valeurs correspondantes pour x, d'où résultent m solutions. Il faut encore remarquer que si la valeur de y qui rend $ay^m + b$ résidu de $m^{\text{ième}}$ puissance n'est pas zéro, il y aura m valeurs de y, qui donneront pour $ay^m + b$, la même valeur résidue, d'où m^2 solutions par la combinaison des m valeurs de y avec les m valeurs de x.

Enfin, pour toute valeur de y qui ne rend pas $ay^m + b$ résidu de $m^{\text{ième}}$ puissance, il n'y aura aucune solution. D'après cela :

Le nombre de solutions de la congruence.................. $x^m \equiv ay^m + b (\text{mod. } p = hm + 1)$ *est toujours multiple de m et prend l'une des trois formes :*

1°. *km^2 si b et $-ba^{m-1}$ sont non-résidus de $m^{ième}$ puissance par rapport au module p.*

2°. *km^2+m, si des deux nombres b, $-ba^{m-1}$ l'un est résidu et l'autre non-résidu de $m^{ième}$ puissance par rapport au module p.*

3°. *km^2+2m, si b et $-ba^{m-1}$ sont tous deux résidus de $m^{ième}$ puissance pour le module p.*

Il suit de ce qui précède que y ne prenant que p valeurs $0, 1, 2\ldots(p-1)$, le nombre des solutions ne saurait surpasser mp. Pour qu'il fût égal à mp, il faudrait avoir $(ay^m+b)^{\frac{p-1}{m}} \equiv 1$ (mod. p) pour toute valeur de y: mettant donc pour y les nombres $0, 1, 2\ldots(p-1)$ et sommant, il en résulterait $a^{\frac{p-1}{m}}(p-1)\equiv 0$ (mod. p) en remarquant que si l'on pose $0^g+1^g+2^g+\ldots(p-1)^g=fg$, toutes les sommes comprises dans le résultat seront $\equiv 0$ (mod. p) à l'exception de $f(p-1)$ qui sera $\equiv p-1$ (mod. p). Mais on ne peut avoir............. $a^{\frac{p-1}{m}}(p-1)\equiv 0$ (mod. p) sans supposer $a\equiv 0$ (mod. p), ce qui n'est point. Le nombre de solutions est donc toujours moindre que mp.

La congruence (1) prendra donc la forme................. $mS'_2\equiv(-1)\,\Sigma A2(p-1)$ (mod. p), en posant $S_2=mS'_2$; et comme S'_2 est moindre que p, elle suffira pour déterminer cette inconnue.

Voici maintenant la congruence qui donne S_2; on y suppose

$$\begin{aligned}
A_1 &= 1.2.3\ldots.h,\\
A_2 &= (h+1)(h+2)\ldots.2h,\\
A_3 &= (2h+1)\ldots\ldots\ldots 3h,\\
&\vdots\\
A_{m-1}&\equiv[(m-2)h+1]\ldots(m-1)h\equiv(p-h-1)(p-h-2)\ldots\equiv A_2(-1)^h,\\
A_m &\equiv[(m-1)h+1]\ldots.mh\equiv(p-1)(p-2)\ldots p-h\equiv A_1(-1)^h.
\end{aligned}$$

La relation $A_{g+1}\equiv(-1)^h A_g$ (mod. p) servira pour simplifier les résultats.

Théorème. *La congruence qui donne le nombre S_2 des solutions de la congruence $x^m-ay^m\equiv b$ (mod. p) est*

$$
\begin{aligned}
(4) \qquad -S_n \equiv\ & a^k \qquad\qquad (\text{mod. } p = hm + 1) \\
& + a^{2k} + \frac{A_2}{A_1} a^k b^k \\
& + a^{3k} + \frac{A_3}{A_1} a^{2k} b^k + \frac{A_3}{A_1} a^k b^{2k} \\
& + a^{4k} + \frac{A_4}{A_1} a^{3k} b^k + \frac{A_4 A_3}{A_1 A_2} a^{2k} b^{2k} + \frac{A_4}{A_1} a^k b^{3k} \\
& \vdots \\
& + a^{(m-1)k} + \frac{A_{m-1}}{A_1} a^{(m-2)k} b^k + \frac{A_{m-1} A_{m-2}}{A_1 A_2} a^{(m-3)k} b^{2k} + \ldots + \frac{A_{m-1}}{A_1} a^k b^{(m-2)k}.
\end{aligned}
$$

Cette formule se trouve immédiatement par le développement de $(x^m - c)^{p-1}$; où l'on fait $c = ay^n + b$.

Négligeant d'abord les termes où x n'a pas un exposant multiple de $p-1$, et le terme où x n'entre pas avec y, on aura en réduisant tous les coefficients à l'unité, d'après l'article précédent,

$$c^k x^{m(p-1-k)} + c^{2k} x^{m(p-1-2k)} + \ldots + c^{(m-1)k} x^{mk}.$$

Maintenant, si l'on développe la puissance $c^{kk} = (ay^m + b)^{kk}$, en effaçant tous les termes sans y et ceux où l'exposant n'est pas multiple de $p-1$, on trouvera

$$
\begin{aligned}
& a^{kk} y^{m.kk} + \frac{A_k}{A} a^{(k-1)k} b^k y^{m(kk-k)} + \frac{A_k . A_{k-1}}{A_1 A_2} a^{(k-2)k} b^{2k} y^{m(kk-2k)} + \ldots \\
& \qquad \frac{A_k A_{k-1}}{A_1 A_2} a^{2k} b^{(k-2)k} y^{2mk} + \frac{A_k}{A} a^k b^{(k-1)k} y^{mk}.
\end{aligned}
$$

On tirera de là les valeurs de $c^k, c^{2k}, \ldots c^{(m-1)k}$, d'où la congruence de de l'énoncé.

Si l'on voulait avoir la congruence donnant le nombre des solutions qui ne contiennent aucune inconnue égale à zéro, il faudrait prendre

$$
\begin{aligned}
(5) \qquad s_2 \equiv{} & a^h b^h \qquad (\text{mod. } p = hm + 1) \\
& + a^{2h} + \frac{A_2}{A_1} a^h b^h + a^{2h} \\
& + a^{3h} + \frac{A_3}{A_1} a^{2h} b^h + \frac{A_3}{A_1} a^h b^{2h} + b^{3h} \\
& \vdots \\
& + a^{(m-1)h} + \frac{A_{m-1}}{A_1} a^{(m-2)h} b^h + \ldots + \frac{A_{m-1}}{A_1} a^h b^{(m-2)h} + b^{(m-1)h} \\
& + a^{mh} + \frac{A_m}{A_1} a^{(m-1)h} b^h + \ldots + \frac{A_m}{A_1} a^h b^{(m-1)h} + b^{mh}
\end{aligned}
$$

qui se trouve précisément de même en négligeant quelques termes de moins dans le développement de $(x^m - c)^{p-1}$.

Il faut remarquer que les congruences (4) et (5) ne contenant que a^h, b^h et leurs puissances, restent les mêmes, si a et b venant à changer, restent résidus de $m^{ième}$ puissance, quand ils sont résidus; et si quand ils sont non-résidus, ils restent non-résidus de la même classe. En un mot, les congruences (4) et (5) restent les mêmes, quand a et b changent de valeurs numériques sans changer de classe. En général pour toute congruence $ax^m + by^m + \ldots + ku^m \equiv l (\text{mod. } p = hm + 1)$, le nombre de solutions restera le même, quand les coefficients a, b, ...k, l resteront des mêmes classes. En effet, si le terme ax^m devient $ag^m y^m = a(gy)^m$, y se tirera de x au moyen de la congruence... $gy \equiv x (\text{mod. } p)$.

Les formules (4) et (5) donnent les valeurs de S_2 et s_2 quel que soit p : il est vrai cependant que les coefficients polynomiaux $\frac{A_2}{A_1}$, $\frac{A_3}{A_1}$, etc., rendent le calcul d'autant plus long que p est plus grand; mais nous verrons, dans des cas particuliers, des théorèmes qui donneront un moyen expéditif de calculer ces coefficients.

Nous allons montrer maintenant comment les deux cas précédents conduisent aux valeurs de S_k et s_k, quel que soit le nombre k des inconnues.

IV.

Nombre de solutions de la congruence ....
$$a_1x_1^m + a_2x_2^m + \ldots + a_kx_k^m \equiv a_{k+1} (\text{mod. } p = hm + 1).$$

Soient P et Q deux fonctions de la forme

$$a_1x_1^m + a_2x_2^m + \ldots + a_fx_f^m, \quad b_1y_1^m + b_2y_2^m + \ldots + b_iy_i^m;$$

représentons par P^0, P, P', P'', ... $P^{(m-1)}$ les nombres de solutions de la congruence $P \equiv A (\text{mod.} p)$, selon que A sera zéro, résidu de $m^{ième}$ puissance, ou non-résidu de 1^{re}, 2^e, 3^e, ... $(m-1)^{ième}$ classe. Autrement g étant un non-résidu de première classe, soient

P^0 le nombre de solutions de la congruence $P \equiv 0 (\text{mod. } p)$,
P ou $P^{(m)}$ le nombre de solutions de la congruence $P \equiv g^0 (\text{mod. } p)$,
P' le nombre de solutions de la congruence $P \equiv g\, (\textit{mod. } p)$,
P'' le nombre de solutions de la congruence $P \equiv g^2 (\text{mod. } p)$,
⋮
$P^{(m-1)}$ le nombre de solutions de la congruence $P \equiv g^{m-1} (\text{mod. } p)$.

Donnons à Q^0, Q, Q', Q'' ... $Q^{(m-1)}$ et à Π^0 des significations analogues et nous aurons la proposition suivante :

Théorème. *Le nombre de solutions de la congruence* .... $P \equiv Q (\text{mod.} p = hm + 1)$ *est en posant* $P - Q = \Pi$.

$$(6) \qquad \Pi^0 = P^0Q^0 + h[PQ + P'Q' + P''Q'' + \ldots + P^{(m-1)}Q^{(m-1)}],$$

Démonstration. En effet pour une solution, on doit avoir simultanément $P \equiv A$, $Q \equiv A (\text{mod. } p)$, A étant un nombre quelconque, qui peut être congru à zéro pour le module p, ou encore résidu ou non résidu de $m^{ième}$ puissance, par rapport au même module. Comme l'on devra prendre chaque solution de $P \equiv A (\text{mod. } p)$ avec chaque solution de $Q \equiv A (\text{mod. } p)$, pour en tirer les solutions de $P \equiv Q (\text{mod. } p)$, on voit qu'à $A \equiv 0 (\text{mod. } p)$, il répondra P^0Q^0 solutions de $P \equiv Q (\text{mod. } p)$. Si A au lieu d'être $\equiv 0 (\text{mod. } p)$ était résidu de $m^{ième}$ puissance pour

le module p, on montrerait de même qu'il y aurait PQ solutions qui donneraient $P \equiv Q \equiv A \pmod{p}$ et par conséquent $P \equiv Q \pmod{p}$. Maintenant si la congruence $P \equiv A \pmod{p}$ est possible, $P \equiv Af^m$ l'est également et a le même nombre de solutions, ces solutions s'obtenant, comme il est très facile de le voir, en multipliant par f les valeurs de $x_1, x_2, \ldots$ qui satisfont à $P \equiv A \pmod{p}$. Ainsi à chacune des $\frac{p-1}{m} = h$ valeurs résidues de $m^{ième}$ puissance qu'on peut prendre pour A, il répond PQ solutions, ou en tout hPQ solutions. On trouve semblablement hP′Q′ solutions de $P \equiv Q \pmod{p}$, pour lesquelles on a $P \equiv Q \equiv$ à un non-résidu de $m^{ième}$ puissance et de première classe; pareillement on trouve hP″Q″ solutions de la congruence $P \equiv Q \pmod{p}$, pour lesquelles on a $P \equiv Q \equiv$ à un non-résidu de $m^{ième}$ puissance et de deuxième classe et ainsi de suite. D'où le résultat de l'énoncé.

La formule (6) subsistera pour $P + Q = \Pi \equiv 0 \pmod{p}$. Si h est impair il suffira, comme il est très aisé de le voir, d'augmenter les indices de Q de $\frac{m}{2}$. Cela vient de ce qu'en représentant par ρ une racine primitive de p, on a $-1 \equiv \rho^{\frac{hm}{2}} \pmod{p}$, ou en posant $h = 2h' + 1$, $-1 \equiv \rho^{h'm + \frac{m}{2}} \pmod{p}$, ou en d'autres termes de ce que -1 est un non-résidu de $\frac{m}{2}^{ième}$ classe.

Pour le cas particulier de $Q = g^k x^m$, g étant un non-résidu de première classe, et par conséquent g^k un non-résidu de $k^{ième}$ classe, on aura évidemment

$$Q^0 = 1,\quad Q' = Q'' = Q''' \ldots = Q^{(k-1)} = Q^{(k+1)} \ldots = Q^{(m-1)} = 0,\quad Q^{(k)} = m.$$

En sorte que l'équation (6) deviendra dans la supposition de... $\Pi = P - Q = P - g^k x^m \equiv 0 \pmod{p}$.

$$\Pi^0 = P^0 + (p-1)P^{(k)}, \tag{7}$$

d'où l'on tire

$$P^{(k)} = \frac{\Pi^0 - P^0}{p-1}. \tag{8}$$

On parviendra au même résultat pour $\Pi = P + g^k x^m \equiv 0 \pmod{p}$, si h est pair, mais si h est impair, il faudra changer $P^{(k)}$ en $P^{\left(k+\frac{m}{2}\right)}$.

Les formules précédentes ramènent tous les cas à ceux de $k=1$ et $k=2$, c'est-à-dire à ceux de une et deux inconnues, précédemment traités; car si l'on prend d'abord la congruence

$$a_1x_1^m + a_2x_2^m + \ldots + a_kx_k^m \equiv (\text{mod. } p),$$

il suffira de poser $k = f + g$, et les nombres de solutions pour des congruences contenant l'une f inconnues et l'autre g inconnues

$$a_1x_1^m + \ldots + a_fx_f^m \equiv A\,,\quad -a_{f+1}x_{f+1}^m - \ldots - a_kx_k^m \equiv A \quad (\text{mod. } p)$$

donnera le nombre de solutions d'une congruence contenant $f+g$ inconnues, savoir de

$$a_1x_1^m + a_2x_2^m + \ldots + a_kx_k^m \equiv 0 \quad (\text{mod. } p).$$

Ensuite, par la formule (8), on passera du cas de la congruence $a_1x_1^m + \ldots + a_kx_k^m - a_{k+1}x_{k+1}^m \equiv 0 \ (\text{mod. } p)$, au cas de la congruence $a_1x_1^m + \ldots + a_kx_k^m \equiv a_{k+1} \ (\text{mod. } p)$.

Nous allons donner des exemples de ces calculs.

V.

Formules générales pour le nombre de solutions de la congruence $a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + \ldots + a_kx_k^2 \equiv a_{k+1} (\text{mod. } p = 2h+1)$.

Examinons le cas de $a_{k+1} = 0$, auquel les autres se ramènent, comme nous venons de le voir.

La congruence $a_1x_1^2 + \ldots + a_kx_k^2 \equiv 0 \ (\text{mod. } p)$ se réduit ainsi qu'il suit à une forme plus simple.

1°. Tous les termes tels que $a_ix_i^2$ dont le coefficient a_i est un résidu quadratique de p, pourront être remplacés par d'autres termes, tels que y_i^2. En effet, soit $a_i \equiv g^2 \ (\text{mod. } p)$ et $gx_i \equiv y_i \ (\text{mod. } p)$, il en résultera $a_ix_i^2 \equiv y_i^2 \ (\text{mod. } p)$.

2°. Tous les termes tels que $a_f x_f^2$ dont le coefficient a_f est un non-résidu quadratique, étant passés dans le second membre, quand -1 sera non-résidu quadratique, ce qui arrive pour p de forme $4q-1$, la congruence prendra la forme

$$y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_f^2 \equiv z_1^2 + z_2^2 + \ldots + z_i^2 \text{ (mod. } p).$$

3°. Mais si -1 est résidu quadratique, ce qui arrive pour... $p=4q+1$, $-a_f$ sera non-résidu quadratique aussi bien que a_f, dans ce cas n étant un non-résidu quadratique déterminé, on posera $-a_f \equiv nz^2$ (mod. p) ou $(nz)^2 \equiv -a_f n$ (mod. p), ce qui est possible ; et la congruence prendra la forme

$$y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_f^2 \equiv n(z_1^2 + z_2^2 + \ldots z_i^2) \text{ (mod. } p).$$

Si tous les coefficients sont de même espèce résidus ou non-résidus quadratiques, la congruence devient

$$y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_k^2 \equiv 0 \text{ (mod. } p)$$

qui est un cas particulier des précédentes.

Pour le cas de la congruence $y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_k^2 \equiv a$ (mod. p), nous représenterons le nombre de solutions par N_k^0, N_k, N_k' selon que l'on aura $a \equiv 0$ (mod. p), ou que a sera résidu quadratique, ou enfin non-résidu quadratique. Si la congruence au lieu d'être du second degré était du $m^{ième}$, le nombre de solutions serait N_k^0 pour $a \equiv 0$(mod. p); N_k pour a résidu de $m^{ième}$ puissance; N_k' pour a congru à un non-résidu de première classe, N_k'' pour a congru à un non-résidu de deuxième classe, et ainsi de suite jusqu'à $N_k^{(m-1)}$ pour a non-résidu de $(m-1)^{ième}$ classe. Ici l'indice inférieur est indispensable pour marquer le nombre des inconnues.

Dans le cas de $m=2$, objet de ce numéro, quand les nombres N_k^0, N_k, N_k' seront déterminés, le problème sera résolu, par la proposition suivante dont la vérité s'aperçoit immédiatement.

Le nombre de solutions de la congruence.................. $y_1^2 + y_2^2 + \ldots y_f^2 \equiv z_1^2 + \ldots + z_i^2$ (mod. $p = 2h+1$) *est égal à*

$$N_f^0 N_i^0 + h(N_f N_i + N_f' N_i').$$

Celui de la congruence $y_1^2+y_2^2+\ldots y_i^2\equiv n(z_1^2\ldots+z_i^2)$ (mod. $p=2h+1$) où n est un non-résidu quadratique est égal à

$$N_f N_i^\circ + h(N_f N_i' + N_f' N_i).$$

Ensuite pour le cas où l'on n'aurait pas $a_{k+1}=0$, soient

P_0 le nombre de solutions de $a_1x_1^2+a_2x_2^2+\ldots+a_kx_k^2\equiv 0$ (mod. p),
Π_0 le nombre de solutions de la congruence................,
$a_1x_1^2+\ldots+a_kx_k^2-a_{k+1}x^2\equiv 0$ (mod. p),
Le nombre de solutions de $a_1x_1^2+\ldots+a_kx_k^2\equiv a_{k+1}$ (mod. p),

sera $\frac{\Pi^\circ-P^\circ}{p-1}$, comme il suit de la formule (8).

La recherche est donc ramenée à trouver le nombre de solutions de la congruence

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2+\ldots+x_k^2\equiv a \text{ (mod. } p).$$

Voici d'abord deux relations qui serviront à simplifier les calculs.

Théorème. *Quel que soit le module premier $p=2h+1$, on a toujours*

$$N_k^\circ + h(N_k + N_k') = p^k. \tag{9}$$

Démonstration. Cela se voit de suite en substituant dans.... $P=x_1^2+x_2^2+\ldots+x_k^2$, au lieu de $x_1, x_2,\ldots x_k$, chacun des arrangements k à k des p nombres $0, 1, 2,\ldots(p-1)$. De ces arrangements il y en aura N_k° qui donneront $P\equiv 0$ (mod. p) à un résidu quadratique déterminé, a par exemple, il en aura encore N_k qui donneront $P\equiv ay^2$, quel que soit y. Ainsi comme il y a h résidus quadratiques, il y aura hN_k arrangements qui donneront $P\equiv$ à un résidu quadratique. De même il y aura hN'_k arrangements qui donneront P congru à un non-résidu quadratique; or il faut avoir $P\equiv 0$, à un résidu ou à un non résidu quadratiques, d'ailleurs le nombre total des arrangements k à k est égal à p^k, on aura donc $N_k^\circ+h(N_k+N'_k)=p^k$. Ce qu'il fallait démontrer.

Théorème. *Si le module p est de forme $4q+1$, on aura*

$$N_k^\circ=1+(p-1)(N'_{k-1}+N_{k-2}+\ldots+N_2+N_1)=1+(p-1)\Sigma N_{k-1}, \tag{10}$$

et si p est de forme $4q-1$, *on aura*

$$(11)\quad N_k^\circ = 1+(p-1)(N'_{k-1}+\ldots+N'_2+N'_1) = 1+(p-1)\Sigma N'_{k-1}.$$

Démonstration. En effet, dans le premier cas, on a par la formule (7) $N_k^\circ = N_{k-1}^\circ + (p-1)N_{k-1}$. Pareillement $N_{k-1}^\circ = N_{k-2}^\circ + (p-1)N_{k-2}$ et ainsi de suite jusqu'à $N_2^\circ = N_1^\circ + (p-1)N_1$: ajoutant ces équations membre à membre et remarquant que l'on a $N_1^\circ = 1$, on trouve de suite la formule (10).

La formule (11) se tire de même de l'équation

$$N_k^\circ = N_{k-1}^\circ + (p-1)N'_{k-1}.$$

Les formules (9), (10) et (11), pour le cas de la congruence

$$x_1^m + x_2^m + \ldots + x_k^m \equiv a(\text{mod.}\, p = hm+1).$$

se changent en

$$(12)\quad N_k^\circ + h(N_k + N'_k + \ldots + N_k^{(m-1)}) = p^k,$$

$$(13)\quad N_k^\circ = 1 + (p-1)\Sigma N_{k-1} \text{ pour } h \text{ pair},$$

$$(14)\quad N_k^\circ = 1 + (p-1)\Sigma N_{k-1}^{\left(\frac{m}{2}\right)} \text{ pour } h \text{ impair}.$$

La démonstration est absolument la même.

Si l'on voulait exclure les solutions renfermant des inconnues égales à zéro, il faudrait remplacer les équations (12), (13) et (14) par

$$(15)\quad N_k^\circ + h(N_k + N'_k + \ldots + N_k^{(m-1)}) = (p-1)^k,$$

$$(16)\quad N_k^\circ = (p-1)N_{k-1} \text{ pour } h \text{ pair},$$

$$(17)\quad N_k^\circ = (p-1)N_{k-1}^{\left(\frac{m}{2}\right)} \text{ pour } h \text{ impair}.$$

La démonstration est presque la même.

Venons-en aux formules générales pour le nombre de solutions de la congruence $x_1^2 + \ldots + x_k^2 \equiv a(\text{mod.}\, p)$.

D'abord la congruence (3) donne immédiatement ce théorème déjà démontré par M. Libri.

Théorème. *Le nombre de solutions de la congruence........*

$a_1x_1^2 + a_2x_2^2 \equiv a_3$ (mod. p) *est* $p-1$ si $-a_1a_2$ *est résidu quadratique, et* $p+1$, *si* $-a_1a_2$ *est non résidu.*

Démonstration. Metions la congruence sous la forme.......... $(a_1x_1)^2 - (-a_1a_2)x_2^2 \equiv a_1a_3$ (mod. p), ou $y_1^2 - ay_2^2 \equiv b$ (mod. p): la congruence (3) devient $-S_2 \equiv a^k$ (mod. p), ou bien $S_2 \equiv -(-a_1a_2)^k$ (mod. p). ou $S_2 \equiv \mp 1$ (mod. p), selon que $-a_1a_2$ est résidu, ou non résidu quadratique. De plus, on a $S_2 < 2p$ et pair, il faut donc poser $S_2 \equiv p \mp 1$. Pour le cas de $a_1 = a_2 = 1$, $-a_1a_2 = -1$, il y a donc $p-1$ solutions, si $p = 4q+1$, et $p+1$, si $p = 4q-1$; car dans le premier cas, -1 est résidu, et dans le second, il est non résidu quadratique.

Dans le cas de $a_3 = 0$, *ou de la congruence* $a_1x_1^2 + a_2x_2^2 \equiv 0$ (mod. p), *il y a* $1 + 2(p-1)$ *solutions si* $-a_1a_2$ *est résidu quadratique, et seulement* 1, *si* $-a_1a^2$ *est non résidu.*

Cette proposition est un cas particulier d'une plus générale démontrée au commencement de l'article III.

Voici maintenant la proposition générale :

Théorème. *On a pour k nombre impair,*

$$(18)\quad \begin{cases} N_k^0 = p^{k-1}, \\ N_k = p^{k-1} + (-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{k-1}{2}}\cdot p^{\frac{k-1}{2}}, \\ N_k' = p^{k-1} - (-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{k-1}{2}}\cdot p^{\frac{k-1}{2}}, \end{cases}$$

et pour k pair, on a

$$(19)\quad \begin{cases} N_k^0 = p^{k-1} + (-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{k}{2}}\cdot(p-1)\, p^{\frac{k}{2}-1}, \\ N_k = N_k' = p^{k-1} - (-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{k}{2}}\cdot p^{\frac{k}{2}-1}. \end{cases}$$

Démonstration. De la congruence $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_k^2 \equiv a$ (mod. p), nous tirerons les deux suivantes :

$$(20)\quad \left.\begin{matrix} x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_k^2 \equiv ax_{k+1}^2, \\ x_1^2 + \ldots\ldots + x_{k-1}^2 \equiv ax_{k+1}^2 - x_k^2, \end{matrix}\right\} \text{(mod. } p),$$

qui n'en font qu'une. Nous égalerons leurs nombres de solutions; de

là nous tirerons N_k ou N'_k, d'où il sera facile de déduire N°_k, et ensuite N'_k ou N_k.

Premier cas. $p = 4q + 1$ et a résidu quadratique. La première des congruences (20) a par la formule (7) un nombre de solutions égal à

$$N^\circ_k + (p - 1) N_k.$$

La deuxième des congruences (20) deviendra en posant

$$P = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{k-1}^2, \quad Q = a x_{k+1}^2 - x_k^2, \quad P \equiv Q \,(\text{mod. } p).$$

Si l'on représente par P°, Q° les nombres de solutions des congruences $P \equiv 0$, $Q \equiv 0$ (mod. p); par P et Q les nombres de solutions des congruences $P \equiv$ à un résidu et $Q \equiv$ à un résidu, suivant le module p; et enfin par P′ et Q′ les nombres de solutions des congruences $P \equiv$ à un non-résidu, $Q \equiv$ à un non-résidu pour le module p, le nombre de solutions de la congruence $P \equiv Q$ (mod. p), sera

$$P^\circ Q^\circ + h(PQ + P'Q');$$

mais d'après les notations convenues,

$$P_\circ = N^\circ_{k-1}, \quad P = N_{k-1}, \quad P' = N'_{k-1},$$

et d'après les théorèmes qui donnent le nombre de solutions de $a x_1^2 - x_2^2 \equiv b$ (mod. p).

$$Q^\circ = 1 + 2(p - 1), \quad Q = p - 1, \quad Q' = p - 1,$$

car $-a \times -1 = a$ est résidu quadratique.

Le nombre de solutions de la congruence $P \equiv Q$ (mod. p), devient donc

$$[1 + 2(p - 1)] N^\circ_{k-1} + h[(p - 1) N_{k-1} + (p - 1) N'_{k-1}],$$

égalant ce nombre à $N^\circ_k + (p - 1) N_k$ et simplifiant au moyen des équations (9) et (10), on aura, à cause de

$$\Sigma N_g = N_g + N_{g-1} + \ldots + N_2 + N_1,$$

l'équation $\quad \Sigma N_k = p \Sigma N_{k-2} + p^{k-1} + 1,$

pareillement,

$$\Sigma N_{k-1} = p \Sigma N_{k-3} + p^{k-2} + 1,$$

d'où

$$N_k = pN_{k-2} + p^{k-1} - p^{k-2},$$

qui revient à

$$(21) \qquad N_k - p^{k-1} = p(N_{k-2} - p^{k-3}).$$

Cette équation montre que les quantités $N_1 - 1$, $N_3 - p$, $N_5 - p^2$, etc. forment une série récurrente dont l'échelle de relation est o, p.

Soit en général A, B l'échelle de relation d'une série récurrente : si l'on veut que $ax^n + by^n$ soit le terme de rang $n+1$, il faudra poser

$$ax^n + by^n = A(ax^{n-1} + by^{n-1}) + B(ax^{n-2} + by^{n-2}),$$

qui peut s'écrire

$$ax^{n-2}(x^2 - Ax + B) + by^{n-2}(y^2 - Ay - B) = o,$$

à laquelle on satisfera en prenant pour x et y les racines de... $z^2 - Az - B = o$. Puis il faudra déterminer a et b, de manière que $ax^0 + by^0$ et $ax + by$ soient respectivement égaux aux deux premiers termes. Dans le cas présent on a

$$A = o, \quad B = p, \quad z^2 = p, \quad \text{d'où} \quad x = \sqrt{p}, \quad y = -\sqrt{p}:$$

de plus,

$$N_1 - 1 = 2 - 1 = 1, \quad N_3 - p = p - 1 - p = -1.$$

Les équations qui déterminent a et b sont donc

$$a + b = 1, \quad (a - b)\sqrt{p} = -1,$$

d'où l'on tire

$$a = \frac{\sqrt{p}-1}{2\sqrt{p}}, \quad b = \frac{\sqrt{p}+1}{2\sqrt{p}},$$

et par conséquent,

$$N_k - p^{k-1} = \frac{\sqrt{p}-1}{2\sqrt{p}}(\sqrt{p})^{k-1} + \frac{\sqrt{p}+1}{2\sqrt{p}}(-\sqrt{p})^{k-1},$$

ou bien encore,

(22) $N_k - p^{k-1} = \frac{1}{2}(\sqrt{p}-1)(\sqrt{p})^{k-2} - \frac{1}{2}(\sqrt{p}+1)(-\sqrt{p})^{k-2}$.

Ce qui donne pour k nombre pair,

$$N_k = p^{k-1} - p^{\frac{k}{2}-1},$$

et pour k nombre impair,

$$N_k = p^{k-1} + p^{\frac{k-1}{2}}.$$

On aurait pu obtenir ces deux équations par de simples éliminations et sans recourir aux séries récurrentes, car la valeur de N_k dépend de celle de N_{k-2}, celle-ci s'obtient au moyen de N_{k-4} et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on parvienne à N_2 et N_1 dont les valeurs sont connues; dans ce calcul, il faut traiter séparément le cas de k pair et celui de k impair.

Au moyen des valeurs trouvées pour N_k, l'équation

$$N_k^0 = 1 + (p-1)(N_{k-1} + N_{k-2} + \ldots + N_2 + N_1),$$

donnera pour k impair,

$$N_k^0 = p^{k-1},$$

et pour k pair,

$$N_k^0 = p^{k-1} + (p-1).p^{\frac{k}{2}-1}.$$

Deuxième cas. $P = 4q+1$ et a non-résidu.

Pour k impair l'équation $N_k^0 - h(N_k + N_k') = p^k$, donne

$$N_k + N_k' = \frac{2(p^k - p^{k-1})}{p-1} = 2p^{k-1}, \quad \text{d'où l'on tire} \quad N_k' = 2p^{k-1} - N_k,$$

ou bien

$$N_k' = p^{k-1} - p^{\frac{k-1}{2}}.$$

Pour k pair, on a

$$N_k + N_k' = 2\left[p^k - p^{k-1} - (p-1)p^{\frac{k}{2}-1}\right]:(p-1) = 2\left(p^{k-1} - p^{\frac{k}{2}-1}\right) = 2N_k',$$

d'où

$$N'_k = N_k.$$

Troisième cas. $P = 4q - 1$ et a non-résidu quadratique.

Les nombres de solutions de deux congruences (20), sont ici en vertu de $Q^0 = 1$, $Q = Q' = p + 1$, égaux respectivement à

$$N^0_k + (p-1)N'_k\,, \qquad N^0_{k-1} + \frac{p-1}{2}\left[(p+1)N_{k-1} + (p+1)N'_{k-1}\right];$$

égalant ces deux nombres, il vient

$$\Sigma N'_k = -p\Sigma N'_{k-2} + \frac{p+1}{p-1}(p^{k-1} - 1);$$

pareillement

$$\Sigma N'_{k-1} = -p\Sigma N'_{k-3} + \frac{p+1}{p-1}(p^{k-2} - 1),$$

d'où

$$N'_k = -pN'_{k-2} + p^{k-1} + p^{k-2},$$

ce qui revient à

$$(23) \qquad N'_k - p^{k-1} = -p(N'_{k-2} - p^{k-3}).$$

Cette équation traitée comme l'équation (21) donnera

$$(24) \quad N'_k - p^{k-1} = \tfrac{1}{2}(\sqrt{-p}+1)(\sqrt{-p})^{k-2} + \tfrac{1}{2}(-\sqrt{-p}+1)(-\sqrt{-p})^{k-2};$$

car il faut remarquer qu'on a ici $N'_1 - 1 = -1$ et $N'_2 - p = 1$, puisque $N'_1 = 0$, $N'_2 = p + 1$; de là résulte

$$a = \frac{-\sqrt{-p}+1}{2\sqrt{-p}}\,, \qquad b = -\frac{\sqrt{-p}+1}{2\sqrt{-p}}.$$

Pour k nombre impair l'équation (24) donne

$$N'_k = p^{k-1} - (-p)^{\frac{k-1}{2}},$$

et pour k nombre pair, elle donne au contraire,

$$N'_k = p^{k-1} + (-p)^{\frac{k}{2}-1}.$$

On pouvait obtenir ces valeurs de N'_k par de simples éliminations.

L'équation $N^\circ_k = 1 + (p - 1)\Sigma N'_{k-1}$ donnera, comme plus haut, pour k impair,

$$N^\circ_k = p^{k-1},$$

et pour k pair,

$$N^\circ_k = p^{k-1} - (p - 1)p^{\frac{k}{2}-1}.$$

Quatrième cas. $p = 4q - 1$ et a résidu quadratique. L'équation $N_k + \frac{p-1}{2}(N_k + N'_k) = p^k$ donne encore pour k impair $N_k + N'_k = 2p^{k-1}$, d'où $N_k = p^{k-1} + (-p)^{\frac{k-1}{2}}$, et pour k pair $N_k + N'_k = 2N_k$, d'où $N'_k = N_k$.

Si l'on remarque maintenant que l'on a $(-1)^{\frac{p-1}{2}} = +1$ pour... $p = 4q + 1$ et $(-1)^{\frac{p-1}{2}} = -1$ pour $p = 4q - 1$, on aura les résultats de l'énoncé.

Les formules (22) et (24) se déduisent avec la plus grande facilité d'une formule très générale et très remarquable donnée par M. Libri, dans son mémoire sur la *Théorie des Nombres* : nous reviendrons plus loin sur cette formule.

VI.

Nombre de solutions de la congruence......................

$$a_1x_1^3 + a_2x_2^3 \equiv a_3 \pmod{p = 3h + 1}.$$

1°. Si $a_3 = 0$, il y aura, comme on l'a vu, 1 ou $1 + 3(p - 1)$ solutions selon que $-a_2a_1^2$ sera résidu ou non résidu cubique (111).

2°. Dans le cas général, nous ramènerons la congruence précédente à la forme $y_1^3 - ay_2^3 \equiv b \pmod{p = 3h + 1}$. Ici, en posant

$$\frac{2h\ (2h-1)\ (2h-2)\ldots(h+1)}{1\ .\ 2\ .\ 3\ldots\ldots\ldots h} = Q,$$

la congruence (3) donnera

$$(25)\qquad -S_2 \equiv a^h + a^{2h} + Qa^hb^h \text{ (mod. } p = 3h + 1\text{)}.$$

Comme h est pair, on voit que les signes de a et b venant à changer, S_2 n'en conservera pas moins la même valeur. Comme a^h et b^h, selon les valeurs particulières de a et de b, peuvent prendre trois valeurs, qui sont les racines de la congruence $z^3 \equiv 1$ (mod. p), savoir 1, r, et r^2 en représentant par r une racine primitive de $z^3 \equiv 1$ (mod. p), ou ce qui est la même chose dans le cas présent, où il y a deux racines primitives, une des racines de $z^2 + z + 1 \equiv 0$ (mod. p), ou encore de $(2z + 1)^2 \equiv -3$ (mod. p). On voit de suite que la congruence $y_1^3 - ay_2^3 \equiv b$ (mod. p) peut présenter neuf cas correspondants aux neuf combinaisons des trois valeurs de a^h et des trois valeurs de b^h. Soit donc un a non-résidu cubique de première classe, nous aurons les neuf congruences suivantes à côté desquelles sont inscrits les nombres de solutions, représentés par les lettres A, B, C, différemment accentuées.

$y_1^3 - y_2^3 \equiv 1$ (mod. p)	A sol.	$y_1^3 - ay_2^3 \equiv$ (mod. p)	A′ sol.	$y_1^3 = a^2y_2^3 \equiv 1$ (mod. p)	A″ sol.
$y_1^3 - y_2^3 \equiv a$	B	$y_1^3 - ay_2^3 \equiv a$	B′	$y_1^3 - a^2y_2^3 \equiv a$	B″
$y_1^3 - y_2^3 \equiv a^2$	C	$y_1^3 - ay_2^3 \equiv a^2$	C′	$y_1^3 - a^2y_2^3 \equiv a^2$	C″

Si l'on substitue dans la congruence (25) les valeurs de a^h et a^{2h}, qui sont r et r^2, on obtiendra, au moyen de la relation $1 + r + r^2 \equiv 0$ (mod. p), les congruences

$$\begin{array}{lll}
A \equiv -2 - Q, & A' \equiv 1 - Qr, & A'' \equiv 1 - Qr^2 \quad \text{(mod. } p\text{)},\\
B \equiv -2 - Qr, & B' \equiv 1 - Qr^2, & B'' \equiv 1 - Q,\\
C \equiv -2 - Qr^2, & C' \equiv 1 - Q, & C'' \equiv 1 - Qr,
\end{array}$$

d'où l'on déduira facilement les congruences

$$(26)\qquad \begin{array}{l}
A + 3 = C' = B'' \equiv 1 - Q \quad \text{(mod. } p = 3h + 1\text{)},\\
B + 3 = A' = C'' \equiv 1 - Qr,\\
C + 3 = B' = A'' \equiv 1 - Qr^2.
\end{array}$$

Par exemple, la congruence (25) donnant $A + 3 \equiv 1 - Q$ (mod. p) et $C' \equiv 1 - Q$ (mod. p), comme A et C′ sont moindres que $3p$ et que $A + 3$ et C' sont divisibles par 3, il en résultera que la différence

$A+3-C'$ sera divisible par $3p$, d'où suit nécessairement $A+3=C'$, et ainsi des autres congruences.

Les congruences (26) donneront immédiatement $A, B, C, A', B', C', A'', B'', C''$, quand on aura déterminé Q et r. Pour déterminer r on a la congruence $(2r+1)^2 \equiv -3 \pmod{p}$

$$\text{ou } r \equiv \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} \pmod{p}.$$

Nous donnerons plus bas la manière de calculer presque à la fois r et Q, ou plutôt le reste de Q divisé par p.

Les congruences (26) donnent par addition

$$9+A+B+C \equiv A'+B'+C' \equiv A''+B''+C'' \equiv 3 \pmod{p},$$

ce qui résulte encore de l'équation

$$9+A+B+C = A'+B'+C' = A''+B''+C'' = 3(p+1),$$

qui est une conséquence immédiate des équations

$$\begin{aligned} 1+3(p-1)+h\,(A+B+C) &= p^2, \\ 1+h\,(A'+B'+C') &= p^2, \\ 1+h\,(A''+B''+C'') &= p^2, \end{aligned}$$

qui se prouvent précisément comme l'équation

$$N_2^2 + h(N_2+N_2'+N_2'') = p^2.$$

On a donc entre A', B', C' la relation

$$(27) \qquad A'+B'+C' = 3(p+1).$$

Les deux autres équations qui donneraient $A+B+C$ et $A''+B''+C''$, résulteraient de (26) et de (27); de sorte qu'il est inutile de les écrire.

On peut trouver entre A', B', C' une autre relation qui conduira à la valeur du reste de Q divisé par p; mais pour les cas particuliers où p sera un petit nombre, il sera plus court de calculer le reste de Q au moyen de la formule $Q = \frac{2h.(2h-1)\ldots(h+1)}{1\,.\,2\ldots\ldots\ldots h}$.

Soit la congruence $x_1^3 - ax_2^3 \equiv y_1^3 - a^2y_2^3 \pmod{p}$ où a est un

non-résidu cubique de première classe, la formule (6) donnera pour le nombre de ses solutions

$$1 + h(A'A'' + B'B'' + C'C''),$$

ou d'après les équations (26),

$$1 + h(A'B' + B'C' + A'C').$$

Mais si l'on écrit la congruence précédente sous la forme $x_1^3 - y_1^3 \equiv \alpha (x_2^3 - a y_2^3)$ (mod. p), la formule (6) donnera pour le nombre de ses solutions

$$1 + 3(p-1) + h(AC' + BA' + CB'),$$

nombre qui, par le moyen des équations (26), devient

$$1 + 3(p-1) + h(A'^2 + B'^2 + C'^2) - (p-1)(A' + B' + C');$$

égalant ces deux valeurs du même nombre, on a

$$A'B' + A'C' + B'C' = A'^2 + B'^2 + C'^2 - 3(A' + B' + C') + 9,$$

d'où, en simplifiant au moyen de l'équation (27), on tire

$$A'B' + A'C' + B'C' = 3(p^2 + p + 1).$$

Si l'on pose $A' - B' = 9u$, u sera nécessairement entier, et à cause de $A' + B' = 3(p+1) - C'$, on aura

$$A' = \tfrac{1}{2}[3(p+1) - C' + 9u], \quad B' = \tfrac{1}{2}[3(p+1) - C' - 9u].$$

Substituant dans $A'B' + A'C' + B'C'$, on trouvera, réduction faite,

$$(28) \qquad (C' - p - 1)^2 + 27u^2 = 4p.$$

Soit $L^2 + 27M^2 = 4p$, où L et M sont positifs, cette équation n'aura

qu'une solution (*); au moyen d'une table de carrés, il sera très facile de déterminer L et M par voie d'exclusion. Ce calcul fait, on posera

$$C'-p-1=\pm L \text{ et } u=\pm M, \text{ d'où } A'-B'=\pm 9M.$$

La première équation donne $C'=p+1\pm L$; et comme C' doit être divisible par 3, le signe de L sera déterminé, il faudra poser $\pm L=3l+1=3\lambda-2$; en donnant à l et λ le signe convenable, il en résultera $C'=3(h+\lambda)$, et parconséquent

$$(29)\qquad \begin{aligned} A+3&=C'=B''=3(h+\lambda),\\ B+3&=A'=C''=3\left(h+1-\frac{\lambda\mp 3M}{2}\right),\\ C+3&=B''=A''=3\left(h+1-\frac{\lambda\pm 3M}{2}\right). \end{aligned}$$

Si l'on compare la première de ces équations avec la première des congruences (26), il en résultera $1-Q\equiv 3(h+\lambda)\equiv 3h+2\pm L$ (mod. p), ou bien $-Q\equiv\pm L$ (mod. p): on a donc ce théorème qui est dû à M. Jacobi.

THÉORÈME. *Le coefficient* $-\dfrac{2h.(2h-1)\ldots(h+1)}{1.\ 2\ldots\ldots h}$ *étant divisé par* p *donne un reste* $\left(<\frac{p}{2}\right)$ *toujours égal à* L *sous la relation....* $L^2+27M=4p$, *en prenant* L, *positif ou négatif, de la forme* $3l+1$.

(J. de M. Crelle, tome 2. *De residuis cubicis commentatio numerosa*).

Quant au signe de M, il reste nécessairement ambigu dans les équa-

---

(*) Voici comment le prouve M. Gauss. Soit s'il est possible une nouvelle solution $L'^2+27M'^2=4p$, on obtiendrait

1°. $(LL'-27MM')^2+27(LM'+L'M)=16p^2$.
2°. $(LL'+27MM')+27(LM'-L'M)=16p^2$.
3°. $(LM'+L'M)(LM'-L'M)=4p^2(M'^2-M^2)$.

La 3° équation montré que le nombre premier p, divise un des nombres $LM'+L'M$, $LM'-LM'$, tandis que la première et la deuxième font voir que chacun de ces nombres est moindre que p. Donc, etc.

tions (29), parce qu'il dépend de la valeur de r, racine primitive de $z^3 \equiv 1$ (mod. p), et que cette congruence a deux racines primitives $\frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$ (mod. p). L'équation $A' - B' = \pm 9M$ revient à

$-(2r+1)Q \equiv \pm 9M$ (mod. p) qui se réduit à $L^2 + 27M^2 \equiv 0$ (mod. p).

Cette dernière congruence, qui se tire immédiatement de l'équation $L^2 + 27M^2 = 4p$, donnera très facilement la valeur de p, car on en tire $L \equiv 3M\sqrt{-3}$ (mod. p), ou, si l'on veut, $9M \equiv L\sqrt{-3}$ (mod. p). Cette dernière congruence revient à $-(2r+1)Q \equiv \pm 9M$ (mod. p).

Les valeurs de A, B, C, A′, B′, C′, A″, B″, C″, pourraient conduire à des formules générales pour le cas d'un nombre quelconque d'inconnues, et l'on obtiendrait encore, pour le cas principal, des séries récurrentes dont l'échelle de relation aurait trois termes; mais les calculs seraient assez longs. Nous donnerons plus loin la formule de M. Libri, qui ne présente point cet inconvénient, et qui deviendra très facilement applicable au moyen des propositions précédentes.

VII.

Nombre de solutions de la congruence
$a_1 x^4 + a_2 x_2^4 \equiv a_3$ (mod. $p = 4h + 1$).

Nous traiterons ici le cas de la congruence $y_1^4 - a y_2^4 \equiv b$ (mod. p), auquel les autres se ramènent. Les formules générales seront données à la fin du paragraphe.

Le nombre S_2 des solutions de la congruence précédente est déterminé complétement par la congruence (3), qui devient ici

$$-S_2 \equiv a^h + \left(a^{2h} + \frac{A}{A_1} b^h a^h\right) + a^{3h} + \frac{A_2}{A_1} a^{2h} b^h + \frac{A_3}{A} a^h b^{2h} \text{ (mod. } p).$$

Or, $A_3 \equiv (-1)^h A_2$ (mod. p), on aura donc pour h pair, et en posant

$$\frac{2h(2h-1)\ldots(h+1)}{1.2\ldots\ldots h} = Q;$$

$$(30) \quad -S_2 \equiv a^h + a^{2h} + a^{3h} + Q a^h b^h (1 + a^h + b^h) \text{ (mod. } p),$$

et pour h impair

$$(31)\quad -S_2 \equiv a^h + a^{2h} + a^{3h} + Qa^h b^h (1 - a^h - b^h) \pmod{p}.$$

Les valeurs de a^h, b^h, et de leurs puissances, quelles que soient les valeurs de a et b, sont les racines de la congruence $z^4 \equiv 1 \pmod{p}$, savoir, 1, r, r^2, r^3, en représentant par r une racine primitive de la congruence $z^4 \equiv 1 \pmod{p}$, ou, ce qui est la même chose dans le cas présent, où il y a deux racines primitives, r satisfait à la congruence $z^2 + 1 \equiv 0 \pmod{p}$.

Ainsi la suite $1, r, r^2, r^3$ pourra être remplacée par $1, r, -1, -r$.

Quand on connaîtra r et le reste de Q divisé par p, on pourra employer les formules (30) et (31); mais comme le calcul direct du reste de Q est fort long, et même impraticable quand p est un grand nombre, nous démontrerons plus loin un théorème de M. Gauss, qui déterminera très expéditivement le reste de Q, au moyen de l'équation $L^2 + 4M^2 = p$, qui donnera aussi la racine primitive r.

Premier cas. $h = 2h'$, $p = 8h' + 1$.

Si l'on représente par a un non-résidu biquadratique de première classe, la congruence $y_1^4 - ay_2^4 \equiv b \pmod{p}$ sera susceptible de seize formes, dont nous écrirons le tableau avec les nombres correspondants de solutions, représentés par les lettres A, B, C, D, différemment accentuées.

$$\left.\begin{array}{l}
y_1^4 - y_2^4 \equiv 1,\ \mathrm{A};\ y_1^4 - ay_2^4 \equiv 1,\ \mathrm{A}';\ y_1^4 - a^2y_2^4 \equiv 1,\ \mathrm{A}'';\\
\qquad y_1^4 - a^3y_2^4 \equiv 1,\ \mathrm{A}'''.\\
y_1^4 - y_2^4 \equiv a,\ \mathrm{B};\ y_1^4 - ay_2^4 \equiv a,\ \mathrm{B}';\ y_1^4 - a^2y_2^4 \equiv a,\ \mathrm{B}'';\\
\qquad y_1^4 - a^3y_2^4 \equiv a,\ \mathrm{B}'''.\\
y_1^4 - y_2^4 \equiv a^2,\ \mathrm{C};\ y_1^4 - ay_2^4 \equiv a^2,\ \mathrm{C}';\ y_1^4 - a^2y_2^4 \equiv a^2,\ \mathrm{C}'';\\
\qquad y_1^4 - a^3y_2^4 \equiv a^2,\ \mathrm{C}'''.\\
y_1^4 - y_2^4 \equiv a^3,\ \mathrm{D};\ y_1^4 - ay_2^4 \equiv a^3,\ \mathrm{D}';\ y_1^4 - a^2y_2^4 \equiv a^3,\ \mathrm{D}'';\\
\qquad y_1^4 - a^3y_2^4 \equiv a^3,\ \mathrm{D}'''.
\end{array}\right\} (\mathrm{mod.}\ p = 4h + 1).$$

Substituant dans la formule (30) les valeurs de a^h, a^{2h}, a^{3h}, on aura, réductions faites,

$$\left.\begin{array}{lll}
A \equiv -3-3Q, & A' \equiv 1-(2r-1)Q, & A'' \equiv 1+Q, \\
& A''' \equiv 1+(2r+1)Q, & \\
B \equiv -3-(2r-1)Q, & B' \equiv 1+(2r+1)Q, & B'' \equiv 1-Q, \\
& B''' \equiv 1-Q, & \\
C \equiv -3+Q, & C' \equiv 1-Q, & C'' \equiv 1+Q, \\
& C''' \equiv 1-Q, & \\
D \equiv -3+(2r+1)Q, & D' \equiv 1-Q, & D'' \equiv 1+Q, \\
& D''' \equiv 1-(2r-1)Q, &
\end{array}\right\} (\text{mod. } p = 4h+1).$$

d'où l'on tirera très facilement

$$(32)\quad \left.\begin{array}{l}
A + 4 \equiv 1 - 3Q, \\
B + 4 = A' = D''' \equiv 1 - (2r-1)Q, \\
C + 4 = A'' = C'' \equiv 1 + Q, \\
D + 4 = B' = A''' \equiv 1 + (2r+1)Q, \\
C' = D' = B'' = D'' = B''' = C''' \equiv 1 - Q.
\end{array}\right\} (\text{mod. } p = 4h + 1).$$

On trouve encore les équations

$$\begin{aligned}
16 + A + B + C + D = A' + B' + C' + D' &= A'' + B'' + C'' + D'' \\
= A''' + B''' + C''' + D''' &= 4(p+1),
\end{aligned}$$

qui se prouvent tout-à-fait de même que l'équation

$$N_2^0 + h(N_2 + N_2' + N_2'' + N_2''') = p^2.$$

On aura donc, au moyen des équations (32), les nouvelles équations

$$(33)\qquad \begin{aligned}
A + B + C + D &= 4(p-3), \\
B + D + 2B'' &= 4(p-1), \\
C + B'' &= 2(p-1).
\end{aligned}$$

Les deux dernières conduisent à $B + D = 2C$.

Si l'on pose $C - B'' = 16u$, $B - D = 16v$, il s'ensuivra que u et v seront entiers, et les équations (33) donneront

$$\begin{aligned}
&B'' = p - 1 - 8u, \quad B = p - 1 + 8u + 8v, \quad A = p - 9 - 24u, \\
&C = p - 1 + 8u, \quad D = p - 1 + 8u - 8v.
\end{aligned}$$

Or, il existe entre u et v une équation indéterminée qui les fait con-

naître sans ambiguité (sauf celle du signe), par la raison qu'elle n'a qu'une solution; c'est l'équation

$$(34) \qquad p = (1 + 4u)^2 + 4v^2,$$

que l'on obtient de la manière suivante :

Le nombre a étant un non-résidu biquadratique de première classe, la congruence $x_1^4 - a^2x_2^4 \equiv a(y_1^4 - ay_2^4)$ (mod. p) a, d'après la formule (6) et les relations précédentes, un nombre de solutions représenté par

$$1 + h(A'D' + B'A' + C'B' + D'C').$$

La même congruence, mise sous la forme $x_1^4 - ay_1^4 = a^2(x_2^4 - y_2^4)$, a pour nombre de solutions

$$1 + 16h + h(A'C + B'D + C'A + D'B);$$

égalant ces deux valeurs du même nombre, on trouve

$$B''(B'' + C - A + 8) = D^2 + C(B - D),$$

qui se réduit, par la substitution des valeurs de A, B, C, D, B'', à l'équation (34).

On prouvera, comme dans l'article précédent, que l'équation $L^2 + 4M^2 = p$ n'a qu'une seule solution en nombres positifs, et en déterminant convenablement le signe de L, on pourra faire $1 + 4u = \pm L$. D'ailleurs on a $C - B'' = 16u \equiv 2Q - 4$ (mod. p), ou $8u \equiv Q - 2$ (mod. p). Par conséquent l'on aura $Q \equiv \pm 2L$ (mod. $p = 8h' + 1$). Comme L est moindre que $\frac{1}{2}p$, on pourra poser

$$\tfrac{1}{2}Q \equiv \pm L \text{ (mod. } p).$$

De là ce théorème de M. Gauss :

« *La quantité* $\frac{1}{2}\frac{2h.(2h-1)\ldots(h+1)}{1.\,2\ldots\ldots\ldots h}$ (mod. p) *est toujours égale à* » $\pm L\left(< \frac{p}{2}\right)$, *en prenant* $p = L^2 + 4M^2$ *et* $\pm L = 1 + 4u$. »

Quant au signe de v il dépend de r, qui se détermine par $2M \equiv L\sqrt{-1} \equiv Lr$ (mod. p), congruence qui revient à $B - D = 16v$, ou du moins qui s'en déduit.

Les quantités A, B, C, D, etc., étant déterminées par ce qui précède, on calculera, par le moyen de la formule (6), le nombre de solutions pour toute autre congruence contenant plus de deux inconnues. Voici un seul exemple qui suffira pour que l'on puisse appliquer dans tous les cas la formule générale qui sera donnée plus loin.

Pour trouver le nombre de solutions de la congruence

$$x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + 1 \equiv 0 \ (\text{mod.}\ p = 4h + 1):$$

Si l'on représente par Π^0 et P^0 les nombres de solutions des congruences $\Pi = x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4 \equiv 0$ et $P = x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 \equiv 0$ (mod. p), la formule (8) donnera pour le nombre cherché $\frac{\Pi^0 - P^0}{p-1}$.

Or $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 \equiv 0$ (mod. $p = 8h' + 1$), revenant à $x_1^4 + x_2^4 \equiv y_1^4$ (mod. p), on aura

$$P^0 = 1.[1 + 4(p-1)] + h.4.A = 1 + 4(p-1) + (p-1)A.$$

Quant à la valeur de Π^0, en mettant $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4 \equiv 0$ (mod. p) sous la forme $x_1^4 + x_2^4 \equiv y_1^4 + y_2^4$ (mod. p), ce sera

$$[1 + 4(p-1)]^2 + \frac{p-1}{4}(A^2 + B^2 + C^2 + D^2).$$

Le nombre cherché est donc

$$4[1 + 4(p-1)] + \frac{A^2 + B^2 + C^2 + D^2}{4} - A = p^2 + 17p + 10 + 56u + 64u^2,$$

par la substitution des valeurs de A, B, C, D.

Les congruences (32) montrent de suite que ce nombre est indépendant de la racine primitive r.

Deuxième cas. $h = 2h' + 1$, $p = 8h' + 5$.

Dans ce cas la formule (31) donne

$$\left.\begin{array}{llll}
A \equiv -3 + Q, & A' \equiv 1 - Q, & A'' \equiv 1 + Q, & A''' \equiv 1 - Q, \\
B \equiv -3 - Q, & B' \equiv 1 - (2r - 1)Q, & B'' \equiv 1 + (2r + 1)Q, & B''' \equiv 1 - Q, \\
C \equiv -3 + Q, & C' \equiv 1 + (2r + 1)Q, & C'' \equiv 1 - 3Q, & C''' \equiv 1 - (2r - 1)Q, \\
D \equiv -3 - Q, & D' \equiv 1 - Q, & D'' \equiv 1 - (2r - 1)Q, & D''' \equiv 1 + (2r + 1)Q,
\end{array}\right\} (\text{mod.}\ p)$$

d'où l'on tire

$$(35)\quad \left.\begin{array}{l} A+4=C+4=A''\equiv 1+Q, \\ B+4=D+4=A'=D'=A'''=D'''\equiv 1-Q, \\ B'=D''=C'''\equiv 1-(2r-1)Q, \\ C'=B''=D'''\equiv 1+(2r+1)Q, \\ C''\equiv 1\ -3Q. \end{array}\right\}(\text{mod. } p=8h'+5).$$

On a de plus les équations

$$(36)\qquad \begin{aligned} A''+B''+C''+D''&=4(p+1), \\ B''+D''+2B'''&=4(p+1), \\ A''+\ B'''&=Q(p+1), \end{aligned}$$

qui donnent les deux suivantes:

$$A''+C''=2B''',\ \ B''+D''=2A''.$$

Si l'on pose $A''-B'''=4u$, $D''-B''=16v$, on aura, comme il est facile de le voir, u et v entiers, et de plus

$$\begin{aligned} &B'''=p+1-2u,\ \ B''=p+1+2u-8v,\ \ C''=p+1-6u, \\ &A''=p+1+2u,\ \ D''=p+1+2u+8v. \end{aligned}$$

Si l'on cherche, par le moyen de la formule (6), les nombres de solutions des congruences

$$x_1^4-ax_2^4\equiv y_1^4-ay_2^4,\ \ x_1^4-y_1^4\equiv a(x_2^4-y_2^4)\ (\text{mod. } p=8h'+5),$$

qui reviennent à la même, et où le nombre a est un non-résidu biquadratique de première classe, on trouvera, en égalant ces nombres,

$$1+h(A'^2+B'^2+C'^2+D'^2)=(1+16h)^2+h(AB+BC+CD+DA),$$

ou, réductions faites,

$$(37)\qquad p=u^2+4v^2.$$

Donc si l'on pose $p=L^2+4M^2$, L et M étant positifs, il faudra faire

$u = \pm L$, en choisissant le signe de sorte que $A'' = p + 1 \pm 2L$ devienne multiple de 8. Il faut, pour cela, prendre $\pm L = 1 + 4u'$. On a encore ici $A'' - B''' = 4u \equiv 2Q$ (mod. p), et par suite $\frac{1}{2} Q \equiv L$ (mod. p), comme dans le premier cas.

Pour donner un exemple de l'application des formules (6) et (8), nous chercherons le nombre de solutions de la congruence $x_1^4 + x_2^4 \ldots + x_3^4 + 1 \equiv 0$ (mod. $p = 8h' + 5$), nombre qu'il est nécessaire d'obtenir pour pouvoir employer dans tous les cas la formule générale qui sera démontrée plus bas. Nous représenterons par Π la fonction $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4$, et par P la fonction $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4$.

Le nombre cherché sera, d'après la formule (8), $\frac{\Pi^\circ - P_\circ}{p-1}$.
Si l'on écrit la congruence $\Pi \equiv 0$ (mod. p) sous la forme $x_1^4 - (-1)x_2^4 \ldots \equiv (-1)\,[x_3^4 - (-1)\,x_4^4]$ (mod. p), qui rentre dans la forme $x_1^4 - a^2 x_2^4 \ldots \equiv a^2(x_3^4 - a^2 x_4^4)$ (mod. p), on aura, pour le nombre de solutions,

$$\Pi^\circ = 1 + h(A''C'' + B''D'' + C''A'' + D''B'').$$

Quant à la congruence $P \equiv 0$, ou $x_1^4 + x_2^4 \equiv -x_3^4$ (mod. p), elle a pour nombre de solutions $P^\circ = 1 + 4h\,C''$.

Le nombre de solutions cherché sera donc

$$\frac{A''C'' + B''D''}{2} - C'' = p^2 - 7p + 10 + 56u + 64u^2,$$

par la substitution des valeurs de A'', B'', C'', D''.

Nous ferons observer, en terminant ici ces applications, que nous pourrons reprendre dans un autre mémoire pour le cas de $m = 5$, que pour ce cas et celui de $m = 6$, c'est-à-dire pour $p = 5h + 1$ et $p = 6h + 1$, les formules qui donnent les nombres de solutions des congruences $ax^5 + by^5 \ldots\ldots + ku^5 \equiv l$ (mod. $p = 5h + 1$), ... $ax^6 + by^6 + \ldots\ldots + ku^6 \equiv l$ (mod. $p = 6h + 1$), renfermeraient les deux coefficients binomiaux

$$\frac{2h.(2h-1)\ldots\ldots(h+1)}{1.\ 2\ldots\ldots\ldots\ldots h},\quad \frac{3h.(3h-1)\ldots\ldots 2h}{1.\ 2\ldots\ldots\ldots\ldots h};$$

et comme leur détermination directe serait fort longue, et souvent

même impraticable, on ferait dépendre leur détermination de la résolution de certaines équations indéterminées. Pareillement, pour $p=7h+1,\ldots p=8h+1$, les formules contiendraient les trois coefficients binomiaux

$$\frac{2h(2h-1)\ldots(h+1)}{1.\ 2\ldots\ldots h},\quad \frac{3h.(3h-1)\ldots(2h+1)}{1.\ 2\ldots\ldots h},\quad \frac{4h.(4h-1)\ldots(3h+1)}{1.\ 2\ldots\ldots h},$$

et ainsi de suite.

Il se présente donc ici un problème important à résoudre, et dont voici l'énoncé :

« *Soient* $p=mh+1$ et $A_1=1.2\ldots h$, $A_2=(h+1)(h+2)\ldots 2h$, $A_3=(2h+1)(2h+2)\ldots\ldots 3h,\ldots A_m=(m-1)(h+1)\ldots mh$; *on demande les valeurs de* $\frac{A_2}{A_1}$, $\frac{A_3}{A_1}$, ... $\frac{A_n}{A_1}$ (mod. p), *n étant* $\frac{m}{2}$ *ou l'entier immédiatement supérieur; ou, s'il est possible, les valeurs de* $A_1, A_2\ldots\ldots A_n$ (mod. p), *c'est-à-dire les restes de ces quantités divisées par p nombre premier.* »

Ce problème a été résolu dans quelques cas particuliers; la solution générale serait fort utile pour la détermination des équations auxiliaires qui servent à l'abaissement de l'équation $x^p=1$; c'est ce qu'on verra dans l'article suivant; et elle ne serait pas moins utile pour l'établissement des lois de réciprocité dans la théorie des résidus de puissances, ainsi qu'on le montrera dans un autre paragraphe.

VIII.

Nombre de solutions de la congruence $A_0+A_1x_1^m+A_2x_2^m+\ldots\ldots+A_k^m x_k^m\equiv 0$ (mod. $p=hm+1$).

Pour trouver le nombre de solutions d'une congruence $\varphi(x_1 x_2,\ldots x_k)\equiv 0$ (mod. p) déterminé ainsi qu'il a été dit dans l'article premier, il suffit de chercher une fonction $\psi(x_1, x_2\ldots, x_k)$ qui se réduise à l'unité pour toute solution $x_1=\alpha_1$, $x_2=\alpha_2\ldots$, $x_k=\alpha_k$, et qui se réduise à zéro pour toute substitution $x_1=\mathfrak{C}_1$; $x_2=\mathfrak{C}_2\ldots x_k=\mathfrak{C}_k$, qui ne satisfait pas à la congruence $\varphi(x_1, x_2\ldots, x_k)\equiv 0$ (mod. p) la somme des valeurs de $\psi(x_1, x_2\ldots, x_k)$ formées en mettant suc-

cessivement, au lieu de $x_1, x_2 \ldots, x_k$, les p^k arrangements k à k des nombres $0, 1, 2 \ldots p-1$, sera le nombre des solutions que nous représenterons par S_k.

Pour le cas de p nombre premier, en représentant par R une racine imaginaire quelconque de l'équation $z^p = 1$, on sait que $\frac{1}{p}(1 + R^i + R^{2i} + R^{3i} + \ldots + R^{(p-1)i})$ devient 1 ou 0, selon que le nombre entier i est divisible ou non divisible par p.

On peut donc poser

$$\psi. = \frac{1}{p}(1 + R^{\varphi\cdot} + R^{2\varphi\cdot} + \ldots + R^{(p-1)\varphi\cdot}).$$

Pour abréger, on a écrit $\psi.$ et $\varphi.$ au lieu de $\psi(x_1, x_2 \ldots, x_k) \ldots \varphi(x_1, x_2 \ldots, x_k)$. De là résulte

$$S_k = \frac{1}{p}\Sigma(1 + R^{\varphi\cdot} + R^{2\varphi\cdot} + \ldots R^{(p-1)\varphi\cdot}), \tag{38}$$

la somme étant prise, par rapport à x_1, depuis $x_1 = 0$ inclusivement jusqu'à $x_1 = p$ (exclusivement); par rapport à x_2, depuis $x_2 = 0$ jusqu'à $x_2 = p$, et ainsi des autres.

Pour calculer plus facilement cette somme, représentons par ρ une racine primitive de p ou de $x^{p-1} - 1 \equiv 0$ (mod. $p = hm + 1$), et posons

$$\begin{aligned}
y_0 &= R^{\rho^0} + R^{\rho^m} + R^{\rho^{2m}} + \ldots\ldots + R^{\rho^{(h-1)m}}, \\
y_1 &= R^{\rho^1} + R^{\rho^{m+1}} + R^{\rho^{2m+1}} + \ldots + R^{\rho^{(h-1)m+1}}, \\
y_2 &= R^{\rho^2} + R^{\rho^{m+2}} + R^{\rho^{2m+2}} + \ldots + R^{\rho^{(h-1)m-1}}, \\
&\vdots \\
y_a &= R^{\rho^a} + R^{\rho^{m+a}} + R^{\rho^{2m+a}} + \ldots + R^{\rho^{(h-1)m+a}}, \\
&\vdots \\
y_{m-1} &= R^{\rho^{m-1}} + R^{\rho^{2m-1}} + R^{\rho^{3m-1}} + \ldots + R^{\rho^{hm-1}}.
\end{aligned}$$

Ces m quantités seront nécessairement les racines d'une équation du

degré m, puisque si l'on remplace la racine R par une autre racine imaginaire, telle que R^{ρ^e}, la suite y_0, $y_1 \ldots . y_{m-1}$ deviendra $y_e, y_{e+1}, y_{e+2} \ldots, y_{e-1}$, qui n'en diffère que par l'ordre des termes.

Appliquons la formule (38) à la congruence

$$A_0 + A_1 x_1^m + A_2 x_2^m + \ldots . + A_k x_k^m \equiv 0 \,(\text{mod. } p = hm + 1),$$

ou plutôt à la congruence

$$\rho^a + \rho^b x_1^m + \rho^c x_2^m + \ldots + \rho^g x_k^m \equiv 0 \,(\text{mod. } p = hm + 1),$$

puisque tout nombre entier est congru à une certaine puissance de la racine primitive ρ.

On voit de suite que la formule (38) donne

$$pS_k = p^k + \Sigma R^{\varphi.} + \Sigma R^{2\varphi.} + \ldots + \Sigma R^{(p-1)\varphi.}.$$

Cherchons donc la valeur de $\Sigma R^{i\varphi.}$, ou plutôt, en prenant pour le nombre entier positif i la puissance ρ^n qui lui est congrue suivant le module p, cherchons la valeur de $\Sigma R^{\rho^n \varphi.}$. Mettant pour $\varphi.$ sa valeur, on trouve immédiatement

$$\Sigma R^{\rho^n \varphi.} = R^{\rho^{a+n}} \Sigma R^{\rho^{b+n} x_1^m} \Sigma R^{\rho^{c+n} x_2^m} \ldots . . \Sigma R^{\rho^{g+n} x_k^m},$$

chaque somme étant prise, comme on l'a dit, depuis zéro jusqu'à p.

Or, si l'on met pour x_1 les nombres 1, 2, 3, 4 ... $p-1$, ou ρ, $\rho^2 \ldots \rho^{p-1}$, x_1^m donne, à l'ordre près, les termes ρ^m, $\rho^{2m} \ldots \rho^{hm}$, pris chacun m fois.

Soit en effet $x_1 \equiv \rho^{ih+f}$ (mod. $p = hm + 1$), i et f étant tous deux moindres que m, il en résultera $x_1^m \equiv \rho^{ihm+fm} \equiv \rho^{fm}$ (mod. p); or i peut prendre m valeurs 0, 1, 2 ..., $m-1$; le terme ρ^{fm} se trouve donc répété m fois, et il en est de même de ρ^m, ρ^{2m}, etc.

Ayant donc égard à la valeur $x_1 = 0$, on trouvera $\Sigma R^{\rho^q x_1^m} = \ldots . . 1 + my_q$, et par suite

$$\Sigma R^{\rho^n \varphi.} = R^{\rho^{a+n}} (1 + my_{b+n})(1 + my_{c+n}) \ldots (1 + my_{g+n});$$

faisant successivement $n=0,\ 1,\ 2\ldots p-2$, et ajoutant toutes les valeurs de $\Sigma \mathrm{R}^{l^{n}\rho}$, on trouve

$$(39)\quad p\mathrm{S}_k = p^k + y_a(1+my_a)(1+my_b)(1+my_c)\ldots(1+my_g)$$
$$y_{a+1}(1+my_{a+1})(1+my_{b+1})(1+my_{c+1})\ldots(1+my_{g+1}),$$
$$\vdots$$
$$y_{a+m-1}(1+my_{a+m-1})(1+my_{b+m-1})(1+my_{c+m-1})\ldots(1+my_{g+m-1}),$$

où il faut ôter m des indices qui surpassent ce nombre.

Examinons quelques cas particuliers.

Soit d'abord $1+x_1^m+x_2^m+\ldots+x_k^m \equiv 0 \pmod{p=hm+1}$, il faudra faire $a=b=c\ldots=g=0$. Si nous représentons le nombre de solutions par N_k, il viendra

$$(40)\quad p\mathrm{N}_k = p^k + y_0(1+my_0)^k + y_1(1+my_1)^k + \ldots + y_{m-1}(1+my_{m-1})^k,$$

formule due à M. Libri, qui la démontre de même.

Considérons encore la congruence

$$x_1^m + x_2^m + x_3^m + \ldots + x_k^m \equiv \rho^f \equiv -\rho^{f+\frac{hm}{2}} \pmod{p=hm+1}.$$

Comme on doit ôter m des indices qui surpassent ce nombre, pour h pair on posera $a=f$, $b=c\ldots=\gamma=0$, et la formule (39) deviendra

$$(41)\quad p\mathrm{S}_k = p^k + y_f(1+my_0)^k + y_{f+1}(1+my_1)^k + \ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ y_{f-1}(1+y_{m-1})^k.$$

Mais, pour h impair, on fera $a=f+\frac{m}{2}$, $b=c\ldots=g=0$, et la formule (39) deviendra

$$(42)\quad p\mathrm{S}_k = p^k + y_{f+\frac{m}{2}}(1+my_0)^k + y_{f+1+\frac{m}{2}}(1+my_1)^k + \ldots\ldots$$
$$+ y_{f-1+\frac{m}{2}}(1+my_{m-1})^k.$$

Ces formules nous serviront plus loin.

La formule (40) donnant les équations

$$pN_1 = p + y_0(1+my_0) + y_1(1+my_1) + y_2(1+my_2) + \ldots\ldots + y_{m-1}(1+my_{m-1}).$$
$$pN_2 = p^2 + y_0(1+my_0)^2 + y_1(1+my_1)^2 + y_2(1+my_2)^2 + \ldots\ldots + y_{m-1}(1+my_{m-1})^2.$$
$$pN_3 = p^3 + y_0(1+my_0)^3 + y_1(1+my_1)^3 + y_2(1+my_2)^3 + \ldots\ldots + y_{m-1}(1+my_{m-1})^3.$$
$$\vdots$$
$$pN_{m-1} = p^{m-1} + y_0(1+my_0)^{m-1} + y_1(1+my_1)^{m-1} + y_2(1+my_2)^{m-1} \ldots + y_{m-1}(1+my_{m-1})^{m-1},$$

auxquelles il faudra joindre

$$0 = 1 + y_0 + y_1 + y_2 + \ldots + y_{m-1}.$$

On tirera de ces m équations les valeurs des m sommes

$$y_0 + y_1 + \ldots + y_{m-1},\ y_0^2 + y_1^2 + \ldots + y_{m-1}^2, \ldots y_0^m + y_1^m + y_2^m \ldots + y_{m-1}^m,$$

et par les formules connues on en déduira les valeurs des coefficients de l'équation en y. C'est là le procédé employé par M. Libri pour le calcul de l'équation en y; il se trouve complété ici par le calcul des nombres N_1, N_2, $N_3 \ldots$, N_{m-1}, qui se fait au moyen des formules de l'article IV.

Nous ferons remarquer ici que les coefficients N_1, N_2, N_{m-1} seront uniquement fonctions de certains coefficients binomiaux, aussi bien que les coefficients de l'équation en y, car r doit disparaître du résultat qui ne peut rien contenir d'indéterminé. Les exemples du paragraphe suivant confirment cette remarque.

La formule (40) qui ne contient que les fonctions

$$y_0 + y_1 + \ldots + _{m-1},\ y_0^2 + y_1^2 + \ldots + y_{m-1}^2, \ldots y_0^m + y_1^m + \ldots y_{m-1}^m,$$

qui se déterminent très facilement au moyen des coefficients de l'équation en y, sans qu'il soit nécessaire de la résoudre, pourra toujours être employée dès qu'on aura trouvé l'équation en y. Mais

il n'en est pas de même des formules (39), (41) et (42); les fonctions

$$y_f y_0 + y_{f+1} y_1 + \ldots + y_{f-1} y_{m-1},\; y_f y_0^{2} + y_{f+1} y_1^{2} + \ldots + y_{f-1} y_{-1}^{2}\;, \text{ etc.}$$

qui entrent dans la formule (41), par exemple, ne sont point des fonctions symétriques qui puissent se déterminer rationnellement par le moyen de l'équation en y. Cependant elles ont une propriété commune avec la somme $y_0^a + y_1^a + y_2^a + \ldots y_{m-1}^a$, c'est de conserver la même valeur quand la racine imaginaire de $x^p = 1$, qui a servi pour former les fonctions $y_0, y_1 \ldots, y_{m-1}$ vient à changer. Ce qui tient à ce que ce changement augmentant tous les indices d'un même nombre, le $g^{ième}$ terme, par exemple, devient le premier, le $(g+1)^{ième}$ le deuxième, le $(g+2)^{ième}$ le troisième, et ainsi de suite. Quand on aura calculé ces fonctions, qu'on pourrait appeler circulantes, on pourra faire usage des formules démontrées dans cet article, sans qu'il soit besoin de résoudre l'équation en y, en la ramenant à une équation à deux termes, ce qui serait fort long (*).

---

(1) Les autres paragraphes de ce mémoire forment, pour ainsi dire, autant de mémoires séparés que nous publierons dans ce Journal, dès que l'auteur nous les aura fait parvenir. (J. Liouville.)

NOTE

Sur un cas particulier de la construction des tangentes aux projections des courbes, pour lequel les méthodes générales sont en défaut;

PAR M. CHASLES.

Dans plusieurs questions de Géométrie descriptive, particulièrement dans quelques épures de coupe des pierres, il arrive que, pour certains points d'une ligne courbe provenant de l'intersection de deux surfaces, la tangente à cette courbe est perpendiculaire à l'un des plans de projection; alors la projection de cette tangente, sur ce plan, se réduit à un point, et ne fait plus connaître la tangente à la projection de la courbe.

La méthode générale pour construire les tangentes aux projections des courbes situées dans l'espace, en les regardant comme les projections des tangentes à ces courbes, est donc absolument en défaut pour ces cas particuliers, et une méthode spéciale devient nécessaire.

Cette question a occupé, il y a une vingtaine d'années, MM. Binet et Hachette, qui, l'un et l'autre, sans la résoudre dans la généralité où nous venons de la proposer, ont imaginé des moyens particuliers propres à déterminer les tangentes dans quelques-uns des cas dont il s'agit. (Voir la *Correspondance sur l'École Polytechnique*, tome III, pages 197 à 201, année 1815.)

La construction de M. Binet est fondée sur une belle méthode, autre que celle de Monge suivie jusqu'alors, pour déterminer les tangentes à la courbe d'intersection de deux surfaces. Au lieu de mener les plans tangents aux deux surfaces en un point de cette courbe, et de prendre leur commune intersection qui est la tangente cherchée, M. Binet mène les normales aux deux surfaces en ce point, et une perpendiculaire au plan déterminé par ces deux normales : cette perpendiculaire

est la tangente cherchée, et ses projections sont perpendiculaires aux tracés de ce plan sur les plans de projection.

Cette méthode est générale comme la première; mais elle est aussi en défaut dans le cas particulier qui nous occupe. Car si la tangente en un point de la courbe est perpendiculaire à l'un des plans de projection, les normales aux deux surfaces seront parallèles à ce plan, et conséquemment la trace du plan qu'elles déterminent sera à l'infini, et ne pourra point servir pour la construction de la tangente à la projection de la courbe.

Cependant il est un cas où, par une circonstance particulière, M. Binet a pu faire usage de cette méthode. C'est dans l'épure de la courbe d'intersection de deux surfaces de révolution dont les deux axes se rencontrent. Le plan des deux axes étant pris pour l'un des plans de projection, en chaque point de la courbe d'intersection des deux surfaces situé dans ce plan, la tangente à cette courbe est perpendiculaire à ce plan; par conséquent les méthodes générales sont en défaut. Néanmoins, par des considérations particulières, celle de M. Binet conduit encore, dans cette question, à la construction de la tangente. En effet, les normales aux deux surfaces, en un point quelconque m de leur intersection, rencontrent le plan des deux axes de révolution, pris pour plan de projection, précisément aux points où elles rencontrent respectivement les deux axes; il faut donc joindre ces deux points par une droite, et mener une perpendiculaire à cette droite par le point qui est la projection du point m. Cette perpendiculaire est la tangente à la projection de la courbe d'intersection des deux surfaces. Cette construction subsiste encore quand le point m est situé dans le plan des deux axes, bien que les considérations géométriques sur lesquelles elle repose ne soient plus applicables; mais on en conclut, *par la loi de continuité*, qu'elle doit encore donner la tangente à la courbe.

Telle est la méthode de M. Binet, qui a été reproduite depuis dans les traités de Géométrie descriptive, mais toujours pour la même question de deux surfaces de révolution dont les axes se rencontrent.

Les solutions que M. Hachette a données aussi pour quelques cas semblables consistent à remplacer les deux surfaces proposées par deux autres dont la courbe d'intersection ait la même projection que

les deux premières sur le plan où l'on veut avoir les tangentes à cette projection. Alors ce sont les tangentes à la courbe d'intersection de ces deux nouvelles surfaces qui font connaître les tangentes à la projection de cette courbe. Et l'on prend les deux nouvelles surfaces de manière que pour le point de leur courbe d'intersection, qui répond au point de projection pour lequel la méthode des tangentes était en défaut, les plans tangents à ces deux surfaces ne soient pas perpendiculaires au plan de projection. M. Hachette détermine ces surfaces par l'analyse, dans les deux applications qu'il a faites de ce procédé. Mais, outre cet inconvénient qui fait que ce procédé ne convient pas à la Géométrie descriptive, on voit qu'il ne constitue point une méthode, puisqu'il n'y a aucun moyen certain pour trouver, même avec le secours de l'analyse, les deux nouvelles surfaces.

Voilà, je crois, tout ce qui a été fait au sujet du cas particulier des tangentes qui nous occupe. Il y a donc encore à trouver la méthode générale qui lui convient, et à dire aussi la raison *à priori* pour laquelle les méthodes ordinaires devaient être en défaut dans ce cas.

La réponse à ces deux questions découlera naturellement du théorème suivant :

Quand une ligne courbe tracée sur une surface cylindrique est tangente, en un point, à l'une des arètes du cylindre, le plan tangent au cylindre suivant cette arète est le plan osculateur à la courbe au point qu'on considère.

Cela est évident, car la courbe a un premier élément compris sur l'arète du cylindre, puisqu'elle lui est tangente, et l'élément suivant aboutit à l'arète infiniment voisine de cette première ; il s'ensuit que le plan tangent au cylindre, lequel est le plan des deux arètes, contient les deux éléments de la courbe ; il est donc son plan osculateur : ce qu'il fallait démontrer.

D'après cela, remarquons que quand une courbe située dans l'espace a sa tangente en un point perpendiculaire au plan de projection, cette courbe est tangente, en ce point, à l'arète du cylindre projetant ; donc le plan tangent à ce cylindre, dont la trace sur le plan de projection sera la tangente à la projection de la courbe, est le plan osculateur à la courbe. Donc

Quand la tangente en un point m *d'une courbe située dans l'espace*

est perpendiculaire au plan de projection, la tangente à la projection de cette courbe, au point correspondant au point m, *est la trace, sur le plan de projection, du plan osculateur de la courbe au point* m.

Ainsi le problème des tangentes, dans ce cas, se change en celui du plan osculateur.

Cette solution est générale, et rentre dans une des théories que considère la Géométrie descriptive où l'on sait mener le plan osculateur en chaque point d'une courbe à double courbure.

Ce problème a été introduit dans la Géométrie descriptive par M. Hachette, qui en a donné une belle et savante solution, qui est celle que nous proposerons ici pour le cas de la construction des tangentes qu'il s'agit de résoudre. Comme cette solution, quoique bien remarquable, n'est pas celle néanmoins que l'on a adoptée dans les traités de Géométrie descriptive, nous allons la rappeler ici.

Pour construire le plan osculateur d'une courbe à double courbure en un point, on mène, par les différents points de cette courbe, les normales aux deux surfaces dont elle est l'intersection. Ces deux séries de normales forment deux surfaces gauches. Par le point pour lequel on veut le plan osculateur, on mène le plan normal à la courbe; il touche les deux surfaces gauches en deux points qu'on joint par une droite; par la tangente à la courbe on mène un plan perpendiculaire à cette droite, ce qui est possible, parce qu'elle est dans le plan normal; *ce plan est le plan osculateur cherché;* et, de plus, le point où il rencontre la droite est le *centre de courbure* de la courbe que que l'on considère (*).

(*) M. Hachette a donné cette solution dans le *Bulletin des Sciences* de la Société philomatique (année 1816, p. 88), et dans ses *Élémens de Géométrie à trois dimensions* (partie synthétique), in-8°, 1817. Dans quelques notes que j'avais adressées à M. Hachette, en réponse à la communication qu'il me faisait de sa solution, notes que ce géomètre a eu la bonté d'insérer dans son ouvrage, j'ai indiqué une seconde manière de construire le plan osculateur. Elle consiste à mener les tangentes à la courbe proposée, et à chercher les points où elles percent un plan quelconque; ces points forment une courbe dont les tangentes sont situées dans les plans osculateurs de la courbe proposée. On n'a donc, pour déterminer ces plans osculateurs, qu'à mener les tangentes à cette nouvelle courbe.

C'est cette construction qu'on a reproduite depuis dans les traités de Géométrie

Pour déterminer le point où un plan mené par une génératrice d'une surface gauche touche la surface, on construit la courbe suivant laquelle ce plan coupe la surface : cette courbe rencontre la génératrice au point de contact cherché.

Dans le cas où la courbe proposée est l'intersection de deux surfaces de révolution, les normales qui forment les deux surfaces gauches s'appuient respectivement sur les deux axes de révolution ; le plan normal en un point m de la courbe touche ces deux surfaces aux points où les deux normales, menées par le point m, rencontrent les deux axes. Il suffit donc, pour construire les deux surfaces gauches, de joindre ces deux points par une droite, et de mener par le point m un plan perpendiculaire à cette droite : c'est le plan osculateur.

---

descriptive : je ne sais pourquoi ; car celle de M. Hachette est infiniment préférable sous tous les rapports, notamment comme donnant le centre du cercle osculateur, en même temps que son plan. Pour déterminer ce centre, on est obligé de recourir à d'autres constructions. On projette la courbe proposée sur son plan osculateur ; on a une courbe plane dont on cherche le cercle osculateur par une méthode graphique particulière donnée par M. Bergery, dans son excellent ouvrage intitulé : *Géométrie des courbes appliquée à l'industrie* (in-8°, Metz, 1826).

J'avais donné aussi une méthode pour construire le centre du cercle osculateur, après avoir déterminé le plan osculateur ; la voici : *Que par chaque point de la courbe proposée on mène sa normale comprise dans son point osculateur ; toutes ces normales forment une surface gauche. Le plan normal à la courbe, en un de ses points, touche la surface en un point qui est le centre de courbure cherché.* (Voir *Eléments de Géométrie à trois dimensions ;* par M. Hachette, p. 112).

Enfin, pour dire ici tout ce qui a été fait au sujet du problème du plan osculateur et du centre de courbure d'une courbe à double courbure, nous ajouterons que MM. Ch. Dupin et Poncelet l'ont aussi résolu. Leurs solutions, quoique différentes, consistent l'une et l'autre à chercher les centres de courbure des deux courbes planes qui sont les projections de la courbe proposée, et à faire usage de ces deux centres de courbure (et c'est en ce point qu'elles diffèrent), pour arriver à la connaissance du plan osculateur et du centre de courbure cherchés. (Voir *Annales de Mathématiques*, t. 7, p. 18, année 1816; et t. 15, p. 245, année 1825).

Ces solutions ne sont pas applicables à la question actuelle, puisque, loin de connaître le centre de courbure de la projection de la courbe proposée, on veut déterminer la tangente de cette projection.

Cette construction a lieu quelle que soit la position des axes des deux surfaces de révolution dans l'espace. Si on l'applique au cas particulier où les axes se rencontrent, elle conduit à la construction même de M. Binet; elle rattache à une méthode générale cette construction obtenue par induction, et dont la légitimité ne reposait que sur le principe de continuité.

Les considérations précédentes font bien voir pourquoi les méthodes générales pour la construction des tangentes aux projections des courbes devaient être en défaut pour le cas en question; c'est que, dans ce cas, la tangente à la projection de la courbe fait connaître immédiatement le plan osculateur à la courbe, et que la considération de ce plan implique nécessairement la considération de deux éléments consécutifs de la courbe, ou, en analyse, des infiniment petits du second ordre, tandis que les méthodes générales pour la construction des tangentes ne demandent que la considération d'un seul élément de la courbe, et, en analyse, des infiniment petits du premier ordre seulement. Ces méthodes devaient donc être en défaut pour le cas en question, sans quoi elles eussent fait connaître, par la considération des infiniment petits du premier ordre seulement, les plans osculateurs aux différents points d'une courbe à double courbure : ce qui est contraire à la nature des choses.

Le cas de la construction des tangentes, qui fait l'objet de cette note, ne se présente pas seulement dans les épures de la géométrie descriptive proprement dite. Il peut se présenter dans plusieurs questions de perspective où l'on aura à faire la perspective d'une courbe dont une des tangentes passera par l'œil. Cette tangente ne suffira plus pour faire connaître la tangente à la perspective de la courbe. Pour construire celle-ci, il faudra mener le plan osculateur de la courbe; sa trace sur le tableau sera la tangente cherchée.

Cette construction servira aussi pour déterminer les tangentes à la perspective du contour apparent d'une surface, pour les points où le rayon visuel est tangent à ce contour; circonstance qui se présente, et qui a été remarquée expressément dans plusieurs dessins, particulièrement dans la perspective du piédouche, où les points en question deviennent, en perspective, des points de rebroussement.

THÉORÈMES

Sur les contacts des lignes et des surfaces courbes;

PAR M. CHASLES.

Des courbes planes. On dit que deux courbes ont un contact de l'ordre m, quand elles ont m éléments consécutifs communs; et alors elles passent par $(m+1)$ points infiniment voisins. Cette condition *géométrique*, traduite en *analyse*, fait voir que les deux courbes étant exprimées par deux équations entre les coordonnées x, y, obliques ou rectangulaires, il faut que les m premiers coefficients différentiels $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}, \ldots \frac{d^my}{dx^m}$, de la première courbe soient égaux respectivement à ceux de la seconde, quand on y met pour x et y les coordonnées du point de contact.

Ainsi deux courbes auront un contact de l'ordre m en un point, quand on reconnaîtra que l'une de ces deux conditions, *géométrique* et *algébrique*, a lieu.

Si de l'équation de la première courbe on tire la valeur de la coordonnée x, et qu'on la mette dans l'équation de la seconde courbe, cette équation donnera les ordonnées y des points d'intersection des deux courbes. Ces deux courbes passant par $(m+1)$ points infiniment voisins, qui, dans la réalité, se réunissent en un seul, l'équation en y aura $(m+1)$ racines égales, pour chaque point où les deux courbes ont un contact de l'ordre m. Cette équation sera donc de la forme $(Fy)^{m+1} \times fy = 0$; l'équation $Fy = 0$ correspondant aux points en chacun desquels les courbes ont un contact de l'ordre m, et l'équation $fy = 0$ aux autres points d'intersection des deux courbes.

D'après cela, soit $\varphi(x, y) = 0$ l'équation de la première courbe; celle de la seconde pourra nécessairement être mise sous la forme

$$A\varphi(x, y) + B[\psi(x, y)]^{m+1} = 0;$$

A et B pouvant être des constantes ou des fonctions de x et y. Car la valeur de x tirée de la première équation $\varphi(x, y) = 0$, et mise dans la seconde, réduira celle-ci à la forme

$$fy.(Fy)^{m+1} = 0;$$

comme nous venons de faire voir que cela doit être. Et le point de contact, ou les points de contact des deux courbes seront déterminés par les deux équations

$$\varphi(x, y) = 0, \quad \text{et} \quad \psi(x, y) = 0.$$

Nous pouvons donc énoncer ce théorème:

1er Théorème. *Les deux équations*

$$\varphi = 0, \quad \text{et} \quad A\varphi + B\psi^{m+1} = 0,$$

où A, B, φ *et* ψ *sont des fonctions de* x *et* y, *représentent deux courbes qui ont un contact de l'ordre* m *en chacun des points d'intersection des deux courbes* $\varphi = 0$ *et* $\psi = 0$;

Et réciproquement, *deux courbes qui ont un contact de l'ordre* m *en un ou plusieurs points, peuvent être représentées par deux équations de cette forme.*

Nous venons d'obtenir les deux équations ci-dessus, en nous servant de la condition *géométrique* pour que deux courbes aient un contact de l'ordre m; il est facile de vérifier qu'elles satisfont à la condition *algébrique*, c'est-à-dire que les m coefficients différentiels $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots \frac{d^my}{dx^m}$ sont égaux respectivement un à un, dans les deux courbes, pour les points dont les cordonnées satisfont aux deux équations $\varphi = 0$, et $\psi = 0$.

En effet, supposons d'abord que A et B soient des quantités constantes, c'est-à-dire ne contenant ni x ni y; les différentiations successives des équations des deux courbes donneront, pour la première,

les m équations

$$d\varphi = 0,\quad d^2\varphi = 0,\quad d^3\varphi = 0,\ldots d^m\varphi = 0,$$

d'où l'on tirera les valeurs des m premiers coefficients différentiels de cette première courbe; et pour la seconde, les m suivantes qui serviront aussi pour calculer les m premiers coefficients différentiels de la seconde courbe,

$$\begin{aligned}
&\mathrm{A}d\varphi + \mathrm{B}(m+1)\psi^m.d\psi = 0,\\
&\mathrm{A}d^2\varphi + \mathrm{B}(m+1)m.\psi^{m-1}(d\psi)^2 + \mathrm{B}(m+1)\psi^m.d^2\psi = 0,\\
&\mathrm{A}d^3\varphi + \mathrm{B}(m+1).m.(m-1)\psi^{m-2}(d\psi)^3 + \ldots + \mathrm{B}(m+1)\psi^m d^3\psi = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\mathrm{A}d^m\varphi + \mathrm{B}(m+1).m.(m-1)\ldots 3.2.\psi(d\psi)^m + \ldots + \mathrm{B}(m+1)\psi^m.d^m\psi = 0.
\end{aligned}$$

Tous les termes de chacune de ces équations, excepté le premier, contiennent le facteur ψ élevé à des puissances qui vont en augmentant jusqu'au dernier terme où l'exposant de ψ est toujours m. On voit donc que pour chacun des points de la seconde courbe, dont les coordonnées satisfont à l'équation $\psi = 0$, toutes les équations se réduiront à celles-ci :

$$d\varphi = 0,\quad d^2\varphi = 0,\quad d^3\varphi = 0,\ldots d^m\varphi = 0.$$

Ce sont précisément les équations provenant de la différentiation de l'équation $\varphi = 0$ de la première courbe. Donc les m premiers coefficients différentiels des deux courbes sont égaux un à un; et conséquemment les deux courbes ont un contact de l'ordre m, en chacun de leurs points communs dont les coordonnées satisfont à l'équation $\psi = 0$.

Les deux courbes ne peuvent avoir, en général, un contact d'un ordre plus élevé; parce qu'une différentiation de plus de l'équation donnerait

$$\mathrm{A}d^{m+1}\varphi + \mathrm{B}(m+1).m.(m-1)\ldots 2.1.(d\psi)^{m+1} + \ldots + \mathrm{B}(m+1)\psi^m d^{m+1}\psi = 0;$$

et la supposition de $\psi = 0$ ne réduit plus cette équation à son premier terme seulement, mais bien à ses deux premiers termes; et par

conséquent la valeur de $\frac{d^{m+1}y}{dx^{m+1}}$ qu'on en tirerait ne sera pas égale à celle que donnerait l'équation $d^{m+1}\varphi = 0$ de la première courbe.

Il nous reste à démontrer le théorème pour le cas où A et B sont des fonctions de x et y.

D'abord si nous supposons que B soit une fonction de x et de y, nos m équations différentielles de la seconde courbe contiendront de nouveaux termes provenant de la différentiation de B, et qui seront tous multipliés par des puissances de ψ. Donc, quand on fera $\psi = 0$, ces termes disparaîtront et les équations se réduiront encore à leurs premiers termes.

Enfin, quand A est aussi une fonction de x et y, au lieu des simples termes $Ad\varphi$, $Ad^2\varphi$, $Ad^3\varphi$,.... auxquels se réduisent les premiers membres des équations différentielles de la seconde courbe, nous aurons

$$\begin{aligned}
&Ad\varphi + \varphi dA = 0,\\
&Ad^2\varphi + 2dA.d\varphi + \varphi d^2A = 0,\\
&Ad^3\varphi + 3dAd^2\varphi + 3d\varphi d^2A + \varphi d^3A = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Mais comme on a $\varphi = 0$, la première équation se réduit à $d\varphi = 0$, par suite la seconde se réduit à $d^2\varphi = 0$; puis la troisième à $d^3\varphi = 0$; et ainsi des autres. De sorte que dans le cas où A et B sont des fonctions de x et y, les deux équations $\varphi = 0$, et $A\varphi + B\psi^{m+1} = 0$, représentent encore deux courbes qui ont un contact de l'ordre m en chacun des points d'intersection des deux courbes $\varphi = 0$, $\psi = 0$.

2ᵉ Théorème. *Si les courbes représentées par les deux équations $\varphi = 0$ et $\psi = 0$, ont un contact de l'ordre de n en certains points, les équations*

$$\varphi = 0 \quad et \quad A\varphi + B\psi^{m+1} = 0$$

représenteront deux courbes qui auront un contact de l'ordre $(m+1)\cdot(n+1) - 1$ en chacun de ces points.

En effet, les deux courbes $\varphi = 0$ et $\psi = 0$, ayant un contact de l'ordre n, la seconde équation $\psi = 0$, d'après le théorème que nous venons de démontrer, pourra prendre la forme

$$A'\varphi + B'\pi^{n+1} = 0,$$

π étant une fonction de x et y, et A', B' des constantes ou des fonctions de x et y indifféremment.

L'équation $A\varphi + B\psi^{m+1} = 0$, deviendra donc

$$A\varphi + B(A'\varphi + B'\pi^{n+1})^{m+1} = 0.$$

Dans le développement du binome $(B'\pi^{n+1} + A'\varphi)$ élevé à la puissance $(m+1)$, le premier terme sera $B'^{m+1}.\pi^{(n+1)(m+1)}$, et tous les autres contiendront en facteur la fonction φ élevée aux puissances $1, 2, \ldots, (m+1)$; le résultat sera donc de la forme

$$B'^{m+1}\pi^{(n+1)(m+1)} + a'\varphi.$$

De sorte que l'équation de la seconde courbe est de la forme

$$A\varphi + B[a'\varphi + B'^{m+1}\pi^{(n+1)(m+1)}] = 0,$$
$$(A + Ba')\varphi + B.B'^{m+1}.\pi^{(n+1)(m+1)} = 0,$$

ou enfin,

$$a\varphi + b\pi^{(n+1)(m+1)} = 0,$$

Or, d'après le premier théorème, la courbe représentée par cette équation a un contact de l'ordre $(m+1)(n+1)-1$, avec la courbe $\varphi = 0$, en chacun des points d'intersection des deux courbes $\varphi = 0$ et $\pi = 0$; mais ces points se trouvent aussi sur la courbe $\psi = 0$, puisque l'on a $\psi = A'\varphi + B'\pi^{n+1}$, ce qui prouve que les coordonnées tirées des deux équations $\varphi = 0$, $\pi = 0$ satisfont à l'équation $\psi = 0$; nous pouvons donc dire que le contact de l'ordre $(m+1)(n+1)-1$ des deux courbes proposées a lieu aux points d'intersection des deux courbes $\varphi = 0$ et $\psi = 0$. Ce qu'il fallait démontrer.

Il est facile de vérifier, comme pour le premier théorème, que les $(m+1)(n-1)-1$ premiers coefficients différentiels des deux courbes sont égaux un à un; car les équations qui donneront ceux de la première courbe seront

$$d\varphi = 0, \quad d^2\varphi = 0, \quad d^3\varphi = 0, \ldots d^{(m+1)(n+1)-1}\varphi = 0.$$

Quant à celles qui donneront ceux de la seconde courbe qui a pour équation $A\varphi + B\psi^{m+1} = 0$, si l'on observe que les deux courbes $\varphi = 0$ et $\psi = 0$ ayant un contact de l'ordre n en quelques-uns de leurs points d'intersection, on a ensemble les équations $\varphi = 0$, $d\varphi = 0$, $d^2\varphi = 0, \ldots d^{n+1}\varphi = 0$, et $d\psi = 0$, $d^2\psi = 0, \ldots d^{n+1}\psi = 0$ pour chacun de ces points, on reconnaît aisément qu'en vertu de ces équations, celles qui donnent les $(m+1)(n+1)-1$ coefficients différentiels de la seconde courbe se réduisent précisément à $d\varphi = 0$, $d^2\varphi = 0$, $d^3\varphi = 0, \ldots d^{(m+1)(n+1)-1}\varphi = 0$, comme pour la première courbe. Ce qui prouve que les deux courbes auront leurs..... $(m+1)(n+1)-1$ premiers coefficients différentiels égaux un à un respectivement.

Des surfaces courbes. Deux surfaces ont un contact de l'ordre m suivant une courbe, quand toute surface menée par un point de cette courbe les coupe suivant deux courbes qui ont, en ce point, un contact de l'ordre m, c'est-à-dire qui ont m éléments consécutifs communs. Les deux surfaces auront donc m zones communes, et, par conséquent, passeront par $(m+1)$ courbes infiniment voisines entre lesquelles, deux à deux, sont comprises ces m zones.

L'expression analytique de ces considérations géométriques, c'est que les coefficients différentiels $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$, $\frac{d^2z}{dx^2}$, $\frac{d^2z}{dy^2}$, $\frac{d^2z}{dxdy}$,........ jusques et y compris ceux de l'ordre m, de la première surface, soient égaux respectivement à ceux de la seconde, pour chaque point de la courbe de contact.

Cherchons quelle doit être la forme des équations des deux surfaces. Si de l'équation de la première on tire la valeur de l'abscisse x, et qu'on la mette dans celle de la seconde, on aura une équation en y et z qui donnera les projections des courbes d'intersection des deux surfaces, et qui pourra se décomposer en autant de facteurs qu'il y a de ces courbes distinctes. Or, les deux surfaces passant par $(m+1)$ courbes infiniment voisines qui, dans la réalité, se confondent, il devra y avoir $(m+1)$ facteurs égaux qui représenteront ces $(m+1)$ courbes; l'équation en y, z sera donc de la forme

$$f(y, z).[F(y, z)]^{m+1} = 0.$$

L'équation $F(y, z) = 0$ représente la projection de la courbe, ou des courbes suivant lesquelles les deux surfaces ont un contact de l'ordre m, et l'équation $f(y, z) = 0$ correspond aux autres courbes d'intersection des deux surfaces.

D'après cela, l'équation de la première surface étant

$$\varphi(x, y, z) = 0,$$

celle de la seconde sera de la forme

$$A\varphi(x, y, z) + B[\psi(x, y, z)]^{m+1} = 0;$$

A et B pouvant être des fonctions de x, y et z, ou simplement des constantes. Et les équations de la courbe de contact seront

$$\varphi(x, y, z) = 0 \quad \text{et} \quad \psi(x, y, z) = 0.$$

Ainsi nous poserons ce théorème :

3° Théorème. *Les deux équations*

$$\varphi = 0, \quad \textit{et} \quad A\varphi + B\psi^{m+1} = 0,$$

où A, B, φ *et* ψ *sont des fonctions de* x, y, z, *représentent deux surfaces qui ont un contact de l'ordre* m *suivant toute l'étendue de la courbe d'intersection des deux surfaces* $\varphi = 0$ *et* $\psi = 0$.

Et réciproquement, *deux surfaces qui ont un contact de l'ordre* m *suivant une courbe, peuvent être représentées par ces deux équations.*

Il serait facile de vérifier, comme nous l'avons fait pour les courbes, que les deux équations

$$\varphi = 0 \quad \text{et} \quad A\varphi + B\psi^{m+1} = 0$$

satisfont à la condition que les coefficients différentiels

$$\frac{dz}{dx}, \frac{dz}{dy}, \frac{d^2z}{dx^2}, \frac{d^2z}{dx\,dy}, \frac{d^2z}{dy^2}, \ldots \frac{d^mz}{dx^m}, \frac{d^mz}{dx^{m-1}dy}, \ldots \frac{d^mz}{dy^m},$$

tirés de la première, sont égaux respectivement à ceux tirés de la seconde, pour tous les points qui satisfont aux deux équations..... $\varphi = 0$ et $\psi = 0$.

4° Théorème. *Lorsque deux surfaces ont un contact de l'ordre m suivant une courbe, toute surface qui aura avec cette courbe, en un point, un contact de l'ordre n, coupera les deux surfaces suivant deux courbes qui auront en ce point un contact de l'ordre....* $(m+1)(n+1)-1$.

La démonstration de ce théorème se déduit facilement de ce qui précède.

En effet, les deux surfaces peuvent être représentées par les deux équations

$$\varphi = 0 \quad \text{et} \quad A\varphi + A\psi^{m+1} = 0;$$

leur contact a lieu suivant la courbe dont les équations sont $\varphi = 0$ et $\psi = 0$.

Soit $F(x, y, z) = 0$ l'équation de la surface coupante; si l'on en tire la valeur de x et qu'on la mette dans les équations des deux surfaces proposées, on aura les équations des projections sur le plan des yz, des courbes d'intersection de ces deux surfaces par la surface coupante; ces équations seront de la forme

$$\varphi_1 = 0, \quad \text{et} \quad A_1\varphi_1 + B_1\psi_1^{m+1} = 0,$$

où

$$\varphi_1,\ \psi_1,\ A_1 \text{ et } B_1 \text{ sont des fonctions de } y \text{ et } z.$$

Or les équations $\varphi_1 = 0$ et $\psi_1 = 0$ sont celles des projections des sections des deux surfaces $\varphi = 0$ et $\psi = 0$ par la surface coupante; et ces projections doivent avoir entre elles un contact de l'ordre n en un point, car les deux sections dont elles sont les projections ont elles-mêmes un contact de l'ordre n en un point de la courbe d'intersection des deux surfaces $\varphi = 0$, $\psi = 0$, puisque la surface coupante a en ce point un contact de l'ordre n avec cette conrbe. Donc, d'après le deuxième théorème, les deux courbes

$$\varphi_1 = 0 \quad \text{et} \quad A_1\varphi_1 + B_1\psi_1^{m+1} = 0$$

ont un contact de l'ordre $(m+1)(n+1)-1$.

Ainsi les sections que la surface coupante fait dans les deux surfaces se projettent sur un plan quelconque suivant deux courbes qui ont un

contact de l'ordre $(m+1)(n+1)-1$; donc ces deux sections ont elles-mêmes un contact de l'ordre $(m+1)(n+1)-1$. C. Q. F. D.

Ce beau théorème est dû à M. Ch. Dupin qui l'a démontré par la théorie générale des fonctions analytiques, dans ses *Développements de Géométrie*, p. 231.

On conclut de ce théorème, que

Quand deux surfaces ont un contact de l'ordre m suivant une courbe, toute ligne qui est tracée sur l'une d'elles et qui a avec cette courbe un contact de l'ordre n, a un contact de l'ordre $(m+1)(n+1)-1$ *avec la seconde surface.*

En effet, si par cette ligne on fait passer une surface quelconque, elle aura un contact de l'ordre n avec la courbe de contact des deux surfaces; conséquemment elle coupera ces deux surfaces suivant deux courbes qui auront un contact de l'ordre $(m+1)(n+1)-1$. La première de ces courbes sera la ligne tracée arbitrairement sur la surface; elle aura donc un contact de l'ordre $(m+1)(n+1)-1$ avec la seconde surface, puisqu'elle a un contact de cet ordre avec une ligne tracée sur cette surface.

Ainsi, quand un cône est circonscrit à une surface quelconque, toute courbe tracée sur cette surface, qui a un contact de l'ordre n avec la ligne de contact de cette surface et du cône, aura un contact de l'ordre $2n+1$ avec le cône.

Si donc, par cette courbe, on fait passer un cône qui ait le même sommet que le cône circonscrit à la surface, ces deux cônes auront, suivant leur arète commune, un contact de l'ordre $2n+1$; et toute surface les coupera suivant deux courbes qui auront un contact du même ordre. C'est ce qu'on peut exprimer par le théorème suivant :

Lorsqu'on fait la perspective d'une surface, si une courbe tracée sur elle a un contact de l'ordre n avec son contour apparent, cette courbe et ce contour auront, en perspective, un contact de l'ordre $2n+1$.

Supposons que les deux surfaces

$$\varphi = 0 \quad \text{et} \quad A\varphi + B\psi^{n+1} = 0,$$

qui ont un contact de l'ordre m suivant la courbe représentée par $\varphi = 0$ et $\psi = 0$, soient toutes deux du second degré; la première équation $\varphi = 0$ sera du second degré; et il faudra, pour que la seconde $A\varphi + B\psi^{m+1} = 0$ soit aussi du second degré, que A et B soient des constantes, et ψ une fonction linéaire de x, y et z; c'est-à-dire que $\psi = 0$ représente un plan; alors l'équation de la seconde surface sera

$$\varphi + a\psi^2 = 0.$$

Ce qui prouve d'abord que *deux surfaces du second degré ne peuvent avoir qu'un contact du premier ordre suivant toute l'étendue d'une courbe*, et ensuite que *cette courbe est nécessairement plane.*

Une troisième surface qui serait pareillement circonscrite à la première, aurait pour équation

$$\varphi + b\pi^2 = 0,$$

$\pi = 0$ étant l'équation du plan de la courbe de contact.

La courbe d'intersection de ces deux surfaces circonscrites à la première, se trouve sur la surface qui a pour équation

$$a\psi^2 - b\pi^2 = 0.$$

Il peut se présenter deux cas, celui où les coefficients a et b sont de même signe, et celui où ils sont de signes différents.

Dans le premier cas, l'équation ci-dessus prend la forme

$$(\sqrt{a}.\psi + \sqrt{b}.\pi)(\sqrt{a}.\psi - \sqrt{b}.\pi) = 0,$$

et donne les deux suivantes qui ont lieu séparément,

$$\sqrt{a}.\psi + \sqrt{b}.\pi = 0,$$
$$\sqrt{a}.\psi - \sqrt{b}.\pi = 0.$$

Ces équations représentent deux plans, sur lesquels se trouve l'intersection complète des deux surfaces. Ces plans passent par la droite d'intersection des plans des courbes de contact des deux surfaces avec la première. Car leurs équations sont satisfaites par les deux $\psi = 0$,

$\pi = 0$ qui sont celles de ces plans des courbes de contact.

Ainsi, dans ce premier cas, si les deux surfaces circonscrites à la première se coupent, leur intersection se compose de deux courbes planes, c'est-à-dire de deux sections coniques, dont les plans passant par la droite d'intersection des plans de leurs courbes de contact avec la première surface.

Nous disons *si les deux surfaces se coupent*, car l'existence des deux plans que nous venons de trouver n'entraîne point nécessairement la réalité de l'intersection des deux surfaces. Ces deux plans représentent seulement une surface du deuxième dégré qui satisfait aux conditions analytiques de passer par l'intersection complète des deux surfaces, soit que cette intersection soit réelle ou imaginaire. Ainsi les deux surfaces peuvent ne pas se couper quoique les deux plans existent.

Il faut observer que quand elles se coupent, leur intersection peut se réduire à une seule courbe plane; l'autre devenant imaginaire.

Maintenant examinons le cas où les deux coefficients a, b sont de signes différents. Alors l'équation

$$a\psi^2 - b\pi^2 = 0$$

ne peut être satisfaite que par les deux suivantes prises simultanément,

$$\psi = 0, \quad \pi = 0,$$

Ces deux équations représentent une ligne droite qui est l'intersection des plans des deux courbes de contact. L'intersection des deux surfaces est donc tout entière sur cette ligne droite: ce qui prouve que cette intersection se réduit à deux points qui sont ceux où la droite rencontre la surface à laquelle elles sont circonscrites.

Cette ligne droite représente une surface du second degré dont deux des trois axes principaux sont nuls, et qui satisfait à la condition algébrique de passer par l'intersection complète des deux surfaces circonscrites à la première.

Concevons, par exemple, une surface quelconque du second degré S, et deux courbes planes tracées sur elle et se coupant en deux points

a, b. Que l'une de ces deux courbes soit une ellipse, et qu'on la prenne pour la courbe de contact d'un ellipsoïde A *inscrit* dans la surface S; et que suivant la seconde courbe on *circonscrive* à la même surface S une autre surface B, ellipsoïde ou hyperboloïde. Cette surface B et l'ellipsoïde A n'auront évidemment d'autres points communs que les deux points a, b où se coupent leurs lignes de contact avec la première surface S. Et dans ce cas les deux plans que nous avons trouvés précédemment ne peuvent exister; car s'ils existaient ils passeraient par la droite ab, et conséquemment chacun d'eux couperait les deux surfaces suivant deux courbes différentes, ce qui n'est pas pas possible, puisqu'ils doivent faire la même section dans les deux surfaces.

Ainsi, dans le cas que nous considérons, la ligne droite ab représente une des surfaces du second degré, en nombre infini, qu'on peut faire passer par l'intersection complète des deux surfaces A, B; et aucune de ces surfaces ne peut plus être, comme dans le cas précédent, l'ensemble de deux plans.

Observons que la droite ab, qui est l'intersection des plans de contact des deux surfaces A, B avec la surface S, peut ne pas rencontrer cette dernière; alors les deux points a, b, sont imaginaires; et l'intersection des deux surfaces A, B est entièrement imaginaire.

Des considérations précédentes, nous conclurons ce théorème :

Quand deux surfaces du second degré sont inscrites ou circonscrites à une même surface du même degré, leur intersection complète est l'ensemble de deux courbes planes, ou bien se réduit à deux points;

Dans le premier cas, une des deux courbes, ou toutes les deux, peuvent être imaginaires, quoique leurs plans sont tous deux réels;

Dans le second cas, les deux points sont tous deux réels ou tous deux imaginaires.

La première partie de ce théorème est due à Monge qui l'a énoncée ainsi : *Lorsque deux surfaces quelconques du second degré sont circonscrites à une même troisième surface du second degré, elles se coupent*

toujours dans le système de deux courbes planes du second degré (*). Depuis on l'a reproduite sous le même énoncé, en remarquant seulement que les deux courbes peuvent être imaginaires, bien que les deux plans soient réels. Mais on voit par la discussion dans laquelle nous venons d'entrer, que cette restriction ne suffit pas pour donner au théorème un énoncé complet et rigoureusement exact. Il aurait fallu ajouter encore, pour conserver l'énoncé de Monge, que les deux plans peuvent aussi devenir imaginaires, comme les deux courbes elles-mêmes, et n'avoir de réel que leur droite d'intersection, qui alors représente, à elle seule, une surface satisfaisant aux conditions analytiques de passer par l'intersection complète des deux proposées.

(*) *Correspondance de l'École Polytechnique*, t. II, p. 321, et t. III, p. 299.

NOTE

Relative à un passage de la Mécanique céleste ;

Par M. POISSON.

Dans le n° 26 du III^e livre, l'auteur s'est proposé de démontrer, sans recourir à la réduction en série, qu'un fluide homogène, tournant uniformément autour d'un axe fixe, n'a qu'une seule figure d'équilibre, très peu différente de la sphère. L'objection que M. Liouville a faite contre la généralité de cette démonstration est réelle (*); mais la démonstration générale qu'il a substituée à celle de la *Mécanique céleste* est fort compliquée, et l'on parvient plus simplement au résultat par les considérations suivantes, qui diffèrent moins de celles que Laplace avait employées.

Je conserve, sans les rappeler ici, toutes les notations du mémoire de M. Liouville, et l'équation (A) citée au commencement de l'article second, savoir :

$$C = \frac{4\pi a}{3} Y - a\int_0^\pi\int_0^{2\pi} Y' \sin p dp dq - \tfrac{1}{2} g (1 - \mu^2). \qquad (A)$$

Le rayon vecteur r d'un point quelconque de la surface, est représenté par

$$r = a(1 + \alpha Y).$$

L'inconnue Y peut être une fonction quelconque de deux variables désignées par μ et ϖ, pourvu qu'elle conserve toujours une valeur finie. On ne suppose pas que la surface soit de révolution, ou que Y

(*) *Voyez* le cahier de ce journal du mois de juin dernier.

ne dépende pas de l'angle ϖ; on ne suppose pas non plus que le fluide ait son centre de gravité sur l'axe de rotation; on suppose seulement sa figure très peu différente d'une sphère qui aurait son centre sur cet axe. La constante a peut différer du rayon de la sphère équivalente au volume du fluide, pourvu que la différence soit de l'ordre de petitesse de la fraction α, le même que celui de la fraction g, et dont on néglige le carré.

La condition rigoureuse de l'équilibre consiste en ce que la somme des éléments du fluide divisés par leurs distances respectives à un point quelconque de la surface, plus la quantité $\frac{1}{2}g(1-\mu^2)$ qui provient de la force centrifuge de ce point, soit une constante. La partie de cette constante relative à la sphère du rayon a et indépendante de la force centrifuge, est égale à $\frac{4\pi a^2}{3}$; la partie relative à cette force et à la non-sphéricité du fluide, est la constante C de l'équation précédente, prise avec un signe contraire; en désignant par γ sa valeur complète, on a donc

$$\gamma = \frac{4\pi a^2}{3} - a^2 C.$$

Or, pour chaque figure possible d'équilibre, cette constante γ est évidemment une quantité déterminée qui ne peut pas dépendre du rayon que l'on prend pour a, c'est-à-dire, de la différence entre ce rayon et celui de la sphère équivalente au volume donné du fluide; la constante C est donc indéterminée comme cette différence; de telle sorte que pour chaque valeur que l'on peut prendre pour a, l'équation précédente déterminera la valeur correspondante de C, et que, réciproquement, si l'on prend à volonté pour C une valeur qui soit de l'ordre de petitesse de α, cette équation déterminera le rayon a.

Cela posé, faisons

$$Y = l\mu + m\mu^2 + X;$$

l et m étant des constantes indéterminées, et X une nouvelle inconnue, fonction de μ et ϖ, dont toutes les valeurs sont des quantités finies. Soit c la plus grande de ces valeurs; en faisant

$$c - X = Z,$$

l'inconnue Z ne pourra plus avoir que des valeurs positives, et l'expression de Y deviendra

$$\mathrm{Y} = c + l\mu + m\mu^2 - \mathrm{Z}.$$

Je la substitue dans l'équation (A). Ce que devient μ dans Y′ étant désigné par μ', on a

$$\mu' = \mu\cos^2 p - \sin^2 p\cos q;$$

d'où il résulte

$$\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\mu'\sin p\,dp\,dq = \frac{4\pi}{3}\mu,\quad \int_0^\pi\int_0^{2\pi}\mu'^2\sin p\,dp\,dq = \frac{4\pi}{5}(\mu^2+\tfrac{2}{3});$$

et comme on a aussi

$$\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\sin p\,dp\,dq = 4\pi,$$

le résultat de cette substitution, sera

$$\begin{aligned}\mathrm{C} = \left(\frac{8\pi a}{15}m + \tfrac{1}{2}g\right)\mu^2 - \frac{16\pi a}{15}m - \frac{8\pi a}{3}c - \tfrac{1}{2}g\\ - \frac{4\pi a}{3}\mathrm{Z} + a\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\mathrm{Z}'\sin p\,dp\,dq;\end{aligned}$$

Z′ étant ce que devient Z dans Y′. Or, les constantes m et C pouvant être prises arbitrairement, on peut supposer qu'on ait

$$\frac{8\pi a}{15}m + \tfrac{1}{2}g = 0,\qquad \mathrm{C} = -\frac{16\pi a}{15}m - \frac{8\pi a}{3}c - \tfrac{1}{2}g;$$

ce qui réduit l'équation précédente à celle-ci :

$$\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\mathrm{Z}'\sin p\,dp\,dq - \frac{4\pi}{3}\mathrm{Z} = 0,$$

que l'on peut écrire sous cette forme :

$$\int_0^\pi\int_0^{2\pi}(\mathrm{Z}' - \tfrac{1}{3}\mathrm{Z})\sin p\,dp\,dq = 0.$$

Maintenant, j'appelle h et k les valeurs de μ et ϖ qui répondent à la plus petite des valeurs possibles de Z, et je désigne par L cette plus petite valeur ; pour $\mu = h$ et $\varpi = k$, la dernière équation deviendra donc

$$\int_0^\pi\int_0^{2\pi}(\mathrm{Z}' - \tfrac{1}{3}\mathrm{L})\sin p\,dp\,dq = 0;$$

mais il est évident que Z′ ou Z étant, par hypothèse, une quantité positive ou zéro, la différence $Z' - \frac{1}{3}L$ est aussi positive ou nulle; tous les éléments de l'intégrale double ayant donc le même signe, elle ne peut être nulle qu'autant que le facteur $Z' - \frac{1}{3}L$ sera zéro; condition qui ne peut être remplie qu'autant que Z′ ou Z sera aussi constamment zéro. D'ailleurs, on tire des équations précédentes

$$m = -\frac{15g}{16\pi a}, \quad c = \frac{3g}{16\pi a} - \frac{3}{8\pi a}C;$$

en substituant donc ces valeurs de m et c dans l'expression de Y, supprimant le terme Z, et mettant ensuite cette expression dans celle de r, nous aurons

$$r = a\left[1 + \frac{3(g - 2C)}{16\pi} + al\mu - \frac{15g}{16\pi}\mu^2\right].$$

Ce résultat renferme la constante indéterminée al qui tient à l'origine, aussi indéterminée, des coordonnées sur l'axe de rotation. On la fera aisément disparaître par un déplacement convenable de cette origine sur cette droite, ou si l'on veut, on peut tout de suite la supposer nulle, et écrire

$$r = a\left[1 + \frac{3(g - 2C)}{16\pi} - \frac{15g}{16\pi}\mu^2\right].$$

On fera aussi disparaître, sans difficulté, les constantes a et C que renferme cette valeur de r. En effet, soit

$$a\left[1 + \frac{3(g - 2C)}{16\pi}\right] = b\left(1 + \frac{5g}{16\pi}\right); \qquad (a)$$

en négligeant les carrés et le produit de g et C, et faisant, pour abréger,

$$\frac{15g}{16\pi} = n,$$

il en résultera finalement

$$r = b[1 + n(\tfrac{1}{3} - \mu^2)].$$

Or, il est facile de s'assurer, d'après cette expression de r, que b est

le rayon donné de la sphère équivalente au volume du fluide; cette expression ne contient donc plus rien d'inconnu ou d'indéterminé; et l'on en conclut que le fluide n'a qu'une seule figure possible d'équilibre, qui s'écarte très peu de la sphère; ce qu'il s'agissait de prouver.

Cette démonstration est plus simple que celle qui est fondée sur la réduction de r en série d'une certaine forme, et qui suppose connues les propriétés des termes de ce développement, ainsi que la généralité de cette forme de série, que l'on avait contestée, mais que j'ai mise hors de doute dans mon mémoire sur l'*attraction des sphéroïdes* (*).

Si l'on met

$$a = b, \quad \alpha Y = n(\tfrac{1}{3} - \mu^2),$$

dans l'expression $a(1 + \alpha Y)$ de r, ce qui l'a fait coïncider avec la valeur finale de ce rayon vecteur; que l'on désigne par B, la valeur de la constante C qui répond à ces valeurs de a et de αY; et que l'on ait égard à ce que n représente, on trouvera sans difficulté que l'équation (A) se réduit à

$$B = -\tfrac{1}{3} g.$$

On aura, en même temps,

$$\gamma = \frac{4\pi b^2}{3} + \tfrac{1}{3} g b^2;$$

et comme, d'après ce qu'on a dit plus haut, cette quantité γ doit être la même, quel que soit le rayon peu différent de b que l'on prenne pour a, il faudra qu'on ait

$$\frac{4\pi b^2}{3} + \tfrac{1}{3} g b^2 = \frac{4\pi a^2}{3} - a^2 C;$$

résultat qui coïncide, en effet, avec l'équation (a), en négligeant toujours les carrés et le produit de g et de C.

(*) *Additions à la Connaissance des Tems*, année 1829.

REMARQUES

Sur l'intégration des équations différentielles de la Dynamique ;

PAR M. POISSON.

En combinant le principe de d'Alembert avec celui des *vitesses virtuelles*, Lagrange est parvenu à une formule générale d'où il a déduit, sous la forme la plus simple, les équations différentielles du mouvement d'un système quelconque de points matériels. Certains coefficients qu'il introduit dans ces équations font connaître, en grandeur et en direction, les forces *intérieures* qui naissent de la liaison mutuelle des points du système, exprimée par des équations données entre leurs coordonnées. La considération de la surface sur laquelle chaque mobile doit demeurer, en vertu de chacune de ces équations, détermine seulement la direction de la force correspondante à cette équation, et qui doit être normale à cette surface. Les intensités des forces intérieures ne seraient donc pas connues d'après cette seule considération; mais le principe de d'Alembert montre qu'elles sont dues aux *forces perdues* à chaque instant, et les mêmes, d'ailleurs, dans l'état de mouvement que dans l'état d'équilibre; en sorte qu'on doit les déterminer au moyen du principe des vitesses virtuelles, appliqué à ces dernières forces. La combinaison de ces deux principes, dont Lagrange a fait la base de la *Mécanique analytique*, était donc nécessaire pour la détermination complète des forces intérieures. Quant aux *forces extérieures*, appliquées aux mobiles, elles proviennent, dans la nature, d'attractions ou de répulsions qui émanent de points fixes ou mobiles, et sont alors données par hypo-

thèse; ou bien elles résultent, comme dans les fluides et les corps élastiques, d'actions moléculaires qui ne s'étendent qu'à des distances insensibles; et c'est, dans ce dernier cas, un problème appartenant à la *Mécanique physique*, de déterminer leurs résultantes. Quelle que soit l'origine des forces extérieures, si on les suppose données, le problème de la Dynamique est aujourd'hui complétement résolu, en ce sens qu'il est réduit à une question de pure analyse, c'est-à-dire à l'intégration d'un système d'équations différentielles du second ordre. Mais presque toujours on est obligé de recourir à des méthodes d'approximation très compliquées, pour effectuer cette intégration; et il est singulier que dans les questions qui paraissent très simples, dans le cas, par exemple, du mouvement de trois points qui s'attirent mutuellement, on ne connaisse pas d'autres intégrales exactes de ces équations, que celles qui sont communes à tous les problèmes, et qui sont fournies par les principes généraux du mouvement du centre de gravité, des aires, des forces vives. Cependant la forme remarquable des équations différentielles de la Dynamique, semblerait devoir donner quelque facilité pour leur intégration. Un examen approfondi de ce point d'analyse est l'objet des réflexions suivantes. Elles m'ont été suggérées par la lecture d'un mémoire fort intéressant que M. Hamilton, astronome royal de Dublin, a inséré dans les *Transactions philosophiques* de Londres (*), et qui a pour titre : *On a general Method in Dynamics*.

I.

Considérons un système de points matériels en mouvement, dont les masses seront représentées par m, $m_{,}$, $m_{,,}$, etc., et qui pourront être entièrement libres, ou liés entre eux d'une manière quelconque. Au bout d'un temps t, écoulé depuis que le mouvement a commencé, soient x, y, z, les trois coordonnées rectangulaires de m, et x', y', z', les composantes de sa vitesse suivant leurs directions, de sorte qu'on ait

$$\frac{dx}{dt} = x', \quad \frac{dy}{dt} = y', \quad \frac{dz}{dt} = z'.$$

(*) Année 1834, seconde partie.

Désignons aussi par les mêmes lettres avec des accents inférieurs, les coordonnées et les vitesses des autres points $m_{,}$, $m_{,,}$, etc. Représentons par U une fonction donnée de toutes ces coordonnées $x, y, z, x_{,}$, etc., qui pourra, en outre, renfermer t explicitement; et supposons que les composantes de la force motrice de m soient exprimées par les différences partielles $\frac{dU}{dx}, \frac{dU}{dy}, \frac{dU}{dz}$; celles de la force motrice de $m_{,}$, par $\frac{dU}{dx_{,}}, \frac{dU}{dy_{,}}, \frac{dU}{dz_{,}}$; etc. Enfin soient

$$L = 0, \quad M = 0, \quad N = 0, \text{ etc.,} \qquad (a)$$

les équations qui expriment la liaison des points du système, s'ils ne sont pas entièrement libres, et dans lesquelles L, M, N, etc., sont des fonctions données de $x, y, z, x_{,}$, etc., qui contiendront le temps t explicitement, lorsque cette liaison variera pendant la durée du mouvement.

Les trois équations différentielles du mouvement de m seront, comme on sait,

$$\left.\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} &= \frac{dU}{dx} + \lambda\frac{dL}{dx} + \mu\frac{dM}{dx} + \nu\frac{dN}{dx} + \text{etc.,} \\ m\frac{d^2y}{dt^2} &= \frac{dU}{dy} + \lambda\frac{dL}{dy} + \mu\frac{dM}{dy} + \nu\frac{dN}{dy} + \text{etc.,} \\ m\frac{d^2z}{dt^2} &= \frac{dU}{dz} + \lambda\frac{dL}{dz} + \mu\frac{dM}{dz} + \nu\frac{dN}{dz} + \text{etc.;} \end{aligned}\right\} (m)$$

celles du mouvement de $m_{,}$ seront de même

$$\left.\begin{aligned} m_{,}\frac{d^2x_{,}}{dt^2} &= \frac{dU}{dx_{,}} + \lambda\frac{dL}{dx_{,}} + \mu\frac{dM}{dx_{,}} + \nu\frac{dN}{dx_{,}} + \text{etc.,} \\ m_{,}\frac{d^2y_{,}}{dt^2} &= \frac{dU}{dy_{,}} + \lambda\frac{dL}{dy_{,}} + \mu\frac{dM}{dy_{,}} + \nu\frac{dN}{dy_{,}} + \text{etc.,} \\ m_{,}\frac{d^2z_{,}}{dt^2} &= \frac{dU}{dz_{,}} + \lambda\frac{dL}{dz_{,}} + \mu\frac{dM}{dz_{,}} + \nu\frac{dN}{dz_{,}} + \text{etc.;} \end{aligned}\right\} (m_{,})$$

et ainsi pour les autres mobiles.

Les coefficients λ, μ, ν, etc., sont des inconnues dont le nombre est égal à celui des équations (a), et d'où dépendent les actions mutuelles des points du système, résultantes de leur liaison exprimée par ces équations. En les éliminant entre les équations (m), $(m_{,})$,

$(m_{\prime\prime})$, etc., on réduira celles-ci à un nombre n qui sera l'excès du nombre des coordonnées x, y, z, $x_{\prime}$, etc., des mobiles sur celui des équations (a). En même temps, ces coordonnées s'exprimeront, au moyen des équations (a), en fonctions d'un pareil nombre n d'autres inconnues que je représenterai par φ, ψ, θ, etc. Après avoir ainsi substitué ces fonctions à la place de x, y, z, $x_{\prime}$, etc., dans les équations qui proviennent de l'élimination de λ, μ, ν, etc., il en résultera un système de n équations différentielles du second ordre, que j'appellerai (n). Le problème sera réduit à l'intégration de ces n équations simultanées. Leurs intégrales complètes feront connaître les valeurs de φ, ψ, θ, etc., en fonctions de t et de $2n$ constantes arbitraires que je désignerai par α, $\mathit{6}$, γ, etc. Les coordonnées x, y, z, $x_{\prime}$, etc., et par suite, les vitesses x', y', z', $x'_{\prime}$, etc., seront donc aussi des fonctions de t, α, $\mathit{6}$, γ, etc; et si l'on représente par a, b, c, etc., a', b', c', etc., les valeurs initiales de ces coordonnées et de ces vitesses, ces constantes seront des fonctions de α, $\mathit{6}$, γ, etc., qui se déduiront de x, y, z, $x_{\prime}$, etc., x', y', z', $x'_{\prime}$, etc., en y faisant $t=0$.

II.

Je désigne actuellement par chacune des caractéristiques δ et Δ, la variation infiniment petite d'une fonction quelconque de t, α, $\mathit{6}$, γ, etc., prise par rapport à une partie ou à la totalité des quantités arbitraires α, $\mathit{6}$, γ, etc., tandis que la différentielle de cette fonction par rapport à t, sera toujours indiquée par la caractéristique d. En indiquant aussi, suivant l'usage, par la caractéristique Σ, une somme étendue à tous les mobiles m, $m_{\prime}$, $m_{\prime\prime}$, etc., et faisant

$$\Sigma m[(\Delta x\delta x'-\Delta x'\delta x)+(\Delta y\delta y'-\Delta y'\delta y)+(\Delta z\delta z'-\Delta z'\delta z)]=\varkappa: \quad (1)$$

cette quantité $\varkappa$, infiniment petite du second ordre, sera constante par rapport à t, ou, autrement dit, on aura $d\varkappa=0$, quelle que soit d'ailleurs la liaison des points m, $m_{\prime}$, $m_{\prime\prime}$, etc., exprimée par les équations (a). Pour la démonstration de cette propriété remarquable des équations générales de la Dynamique, je renverrai à mon second

mémoire sur *la variation des constantes arbitraires* (*), ou bien au *Bulletin de la Société Philomathique* (**), où je l'avais donnée auparavant.

Maintenant, si le temps t n'est pas contenu explicitement dans la fonction U, non plus que dans aucune des équations (a), il en sera de même à l'égard des équations (n), qui ne renfermeront que dt; parmi les $2n$ constantes arbitraires α, $\mathcal{C}$, γ, etc., de leurs intégrales, il y en aura donc une qui sera partout ajouté à la variable t, de sorte qu'en la désignant par ε, toutes les inconnues φ, ψ, θ, etc., seront des fonctions de $t+\varepsilon$ et des $2n-1$ autres constantes. Or, si l'on suppose que la variation Δ se rapporte à cette seule quantité ε, et si l'on fait $\delta\varepsilon = dt$, on devra changer Δ en d; en même temps, η sera le produit de dt et de la variation d'une quantité indépendante de t, que je désignerai par k; par conséquent, l'équation (1) deviendra

$$\Sigma m[(dx\delta x'-dx'\delta x)+(dy\delta y'-dy'\delta y)+(dz\delta z'-dz'\delta z)]=\delta k dt; \quad (2)$$

et je dis, de plus, que cette constante arbitraire k sera celle de l'équation qui renferme le *principe des forces vives*, lequel a lieu, comme on sait, dans le cas dont il s'agit.

En effet, les quantités L, M, N, etc, ne contenant pas le temps t explicitement, on a

$$\begin{aligned}
dL &= \frac{dL}{dx}dx + \frac{dL}{dy}dy + \frac{dL}{dz}dz + \frac{dL}{dx_,}dx_, \text{ etc.},\\
dM &= \frac{dM}{dx}dx + \frac{dM}{dy}dy + \frac{dM}{dz}dz + \frac{dM}{dx_,}dx_, \text{ etc.},\\
dN &= \frac{dN}{dx}dx + \frac{dN}{dy}dy + \frac{dN}{dz}dz + \frac{dN}{dx_,}dx_, \text{ etc.},\\
&\text{etc.};
\end{aligned}$$

parce que les équations (a) ont lieu pour toutes les valeurs de t, on a aussi

$$dL = 0, \quad dM = 0, \quad dN = 0, \text{ etc.};$$

au moyen de quoi, en ajoutant les équations (m), ($m_,$), ($m_{,,}$), etc.,

---

(*) Tome I^er des *Mémoires de l'Académie des Sciences.*

(**) Année 1816, page 109.

après les avoir multipliées respectivement par dx, dy, dz, $dx_{,}$, etc., on en déduit

$$\Sigma m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\,dx + \frac{d^2y}{dt^2}\,dy + \frac{d^2z}{dt^2}\,dz\right) = dU,$$

ou bien, en intégrant et désignant par h la constante arbitraire,

$$\frac{1}{2}\Sigma m(x'^2 + y'^2 + z'^2) = U + h; \qquad (3)$$

ce qui est l'équation des forces vives. En la différentiant suivant la caractéristique δ, et multipliant ensuite par dt, on aura donc

$$\Sigma m(\delta x' dx + \delta y' dy + \delta z' dz) = \delta U dt + \delta h dt. \qquad (4)$$

Mais à cause que les valeurs de x, y, z, $x_{,}$, etc., doivent satisfaire aux équations (a), pour toutes les valeurs de α, β, γ, etc., on peut aussi différentier ces équations suivant δ; ce qui donne

$$\delta L = 0, \quad \delta M = 0, \quad \delta N = 0, \text{ etc.}$$

Si donc on ajoute les équations (m), ($m_{,}$), ($m_{,,}$), etc., après les avoir multipliées respectivement par δx, δy, δz, $\delta x_{,}$, etc., et toutes par dt, il en résultera

$$\Sigma m(dx'\delta x + dy'\delta y + dz'\delta z) = \delta U dt; \qquad (5)$$

en retranchant ces équations (4) et (5) l'une de l'autre, il vient

$$\Sigma m[(dx\delta x' - dx\delta x) + (dy\delta y' - dy'\delta y) + (dz\delta z' - dz'\delta z)] = \delta h dt;$$

et si l'on compare cette formule à l'équation (2), on en conclut $\delta k = \delta h$; ce qu'il s'agissait de démontrer.

En vertu de l'équation (3), on aura d'ailleurs

$$h = \frac{1}{2}\Sigma(a'^2 + b'^2 + c'^2) - D, \qquad (6)$$

en faisant $t = 0$ dans cette équation, et désignant par D, ce que U devient pour cette valeur de t.

III.

Faisons maintenant

$$\int \Sigma m(x'dx + y'dy + z'dz) = \mathrm{V};$$

et supposons que cette intégrale relative à t, commence à $t = 0$, de manière que V exprime ce que l'on appelle *la quantité d'action* dépensée par le système des mobiles m, $m_{,}$, $m_{,,}$, etc., pour passer de sa position initiale à celle qu'il occupe au bout du temps t. En différentiant cette intégrale suivant la caractéristique δ, nous aurons, d'après les règles connues,

$$\delta\mathrm{V} = \int \Sigma m(x'd.\delta x + y'd.\delta y + z'd.\delta z + dx\delta x' + dy\delta y' + dz\delta z').$$

Mais, en vertu de l'équation (2) et à cause de $k = h$, on a aussi

$$\int \Sigma m(dx\delta x' + dy\delta y' + dz\delta z' - dx'\delta x - dy'\delta y - \delta z'\delta z) = t\delta h;$$

en retranchant cette équation de la précédente, on aura donc

$$\delta\mathrm{V} = \int \Sigma m(d.x'\delta x + d.y'\delta y + d.z'\delta z) - t\delta h;$$

ou bien, en effectuant l'intégration,

$$\delta\mathrm{V} = \Sigma m(x'\delta x + y'\delta y + z'\delta z) - \Sigma m(a'\delta a + b'\delta b + c'\delta c) - t\delta h, \quad (7)$$

en observant que l'intégrale doit s'évanouir, par hypothèse, avec la variable t, et qu'on a désigné par a, b, c, a', b', c', les valeurs de x, y, z, x', y', z', qui répondent à $t = 0$.

Les coordonnées x, y, z, $x_{,}$, étant des fonctions de φ, ψ, θ, etc., données par les équations (a), on pourra toujours ramener cette équation (7) à la forme

$$\delta\mathrm{V} = \mathrm{P}\delta\varphi + \mathrm{Q}\delta\psi + \mathrm{R}\delta\theta + \text{etc.} - \mathrm{A}\delta\alpha - \mathrm{B}\delta\beta - \mathrm{C}\delta\gamma - \text{etc.} - t\delta h, \quad (8)$$

où l'on désigne par P, Q, R, etc., des fonctions données de φ, ψ, θ, etc., $\frac{d\varphi}{dt}$, $\frac{d\psi}{dt}$, $\frac{d\theta}{dt}$, etc.; par A, B, C, etc., ce que ces fonctions de-

viennent pour $t=0$; et par α, β, γ, etc., ce que φ, ψ, θ, etc., deviennent également pour $t=0$. Si l'on désigne aussi par α', β', γ', etc., les valeurs de $\frac{d\varphi}{dt}$, $\frac{d\psi}{dt}$, $\frac{d\theta}{dt}$, etc., qui répondent à $t=0$, il sera permis de prendre les n quantités α, β, γ, etc., et les n quantités α', β', γ', etc., pour les $2n$ constantes arbitraires des intégrales complètes des équations (n), que nous avions désignées jusqu'ici, d'une manière générale, par α, β, γ, etc.

Observons actuellement que V, ainsi que chacune des n quantités φ, ψ, θ, etc., sera une fonction de $2n+1$ quantités indépendantes entre elles, savoir, t, α, β, γ, etc., α', β', γ', etc. La quantité h sera une fonction de α, β, γ, etc., α', β', γ', etc., résultante de la formule (6). Par conséquent, si l'on conçoit qu'au moyen des valeurs de φ, ψ, θ, etc., et de celle de h, on ait éliminé de l'expression de V, la variable t et les n constantes α', β', γ', etc., on pourra considérer V comme une fonction de ces $2n+1$ autres quantités φ, ψ, θ, etc., h, α, β, γ, etc., et écrire, en conséquence,

$$V=f(\varphi, \psi, \theta, \text{etc.}, h, \alpha, \beta, \gamma, \text{etc.}),$$

d'où l'on conclut que si l'on parvient, par un moyen quelconque, à trouver cette fonction f, et qu'on la substitue à la place de V dans l'équation (8), elle devra rendre cette équation identique par rapport aux $2n+1$ variations δh, $\delta\varphi$, $\delta\psi$, $\delta\theta$, etc., $\delta\alpha$, $\delta\beta$, $\delta\gamma$, etc.; de sorte que l'on aura ce système de $2n+1$ équations, savoir:

$$\left.\begin{array}{lll} \frac{df}{dh}=-t, & & \\ \frac{df}{d\varphi}=\text{P}, & \frac{df}{d\psi}=\text{Q}, & \frac{df}{d\theta}=\text{R, etc.,} \\ \frac{df}{d\alpha}=-\text{A}, & \frac{df}{d\beta}=-\text{B}, & \frac{df}{d\gamma}=-\text{C, etc.,} \end{array}\right\} \quad (9)$$

duquel on déduira par l'élimination des n quantités $\frac{d\varphi}{dt}$, $\frac{d\psi}{dt}$, $\frac{d\theta}{dt}$, etc., et de l'une des $2n+1$ constantes arbitraires h, α, β, γ, etc., α', β', γ', etc., un autre système de n équations entre t, φ, ψ, θ, etc., et les $2n$ constantes restantes, qui exprimera les intégrales complètes des équations (n), ou des équations différentielles du second ordre (m),

$(m_{,})$, $(m_{,,})$, etc., réduites au nombre n au moyen des équations (a) données entre x, y, z, $x_{,}$, etc.

Ainsi, dans tous les cas où le principe des forces vives a lieu, l'intégration des équations différentielles du mouvement d'un système de corps liés entre eux comme on voudra, est ramenée à la détermination de la fonction que nous désignons par f. On ne doit pas confondre cette proposition avec le *principe de la moindre action*, qui n'est qu'une règle, inutile aujourd'hui, pour former les équations différentielles du mouvement, tandis que la proposition dont il s'agit maintenant, en fait connaître les intégrales, toutes les fois que l'on est parvenu à déterminer une certaine quantité V, et à mettre sa valeur sous la forme que nous supposons, c'est-à-dire à l'exprimer en fonction des inconnues φ, ψ, θ, etc., de leurs valeurs initiales α, $\mathcal{C}$, γ, etc., et de la constante h de l'équation des forces vives. Cette méthode d'intégration est celle que M. Hamilton a donnée dans le mémoire cité au commencement de celui-ci, mais pour le cas seulement des équations (m), $(m_{,})$, $(m_{,,})$, etc., ou d'un système de points matériels entièrement libres. Elle s'étend, comme nous venons de le faire voir, aux équations (n) relatives au mouvement d'un système quelconque de corps; mais malgré cette extension, l'usage en serait encore très borné et à peu près nul, si l'on voulait, comme l'auteur le propose, la faire servir à trouver toutes les intégrales premières et secondes des équations du mouvement, et qu'il fallût déterminer *à priori* la fonction V, sans connaître aucune de ces intégrales. Quand on connaîtra un nombre convenable des intégrales premières, cette méthode pourra servir à achever l'intégration; et nous en donnerons tout à l'heure un exemple.

IV.

Pour expliquer la marche qu'il faudra suivre, en général, supposons d'abord qu'au moyen des équations (a), on ait réduit l'intégrale que V représente à la forme

$$V = \int (Xd\varphi + Yd\psi + Zd\theta + \text{etc.});$$

X, Y, Z, etc., étant des fonctions données des n variables φ, ψ, θ, etc.,

et de leurs coefficients différentiels $\frac{d\varphi}{dt}$, $\frac{d\psi}{dt}$, $\frac{d\theta}{dt}$, etc., qui seront désignés, pour plus de simplicité, par φ', ψ', θ', etc. Soient

$$G = 0, \quad G' = 0, \quad G'' = 0, \text{ etc.}, \qquad (10)$$

les intégrales premières des équations (n) que l'on suppose connues, qui sont distinctes de l'équation des forces vives, et qui ne contiennent pas non plus le temps t explicitement, de sorte que G, G′, G″, etc., représentent des fonctions de φ, ψ, θ, etc., φ', ψ', θ', etc., et d'un nombre de constantes arbitraires g, g', g'', etc., égal à celui de ces équations (10). On pourra aussi représenter l'équation des forces vives, qu'il faudra joindre à celles-là, par

$$H = 0; \qquad (11)$$

et H sera une fonction de φ, ψ, θ, etc., φ', ψ', θ', etc., et de la constante particulière h.

Il suffirait que n fût le nombre de ces équations (10) et (11), pour qu'on en pût déduire les valeurs de φ', ψ', θ', etc., et qu'en substituant ensuite ces valeurs dans les fonctions X, Y, Z, etc., la formule contenue sous le signe $\int$ ne renfermât plus que les variables φ, ψ, θ, etc., dont elle contient les différentielles. Mais quoique, d'après la formule (8), la variation de V, par rapport à ces n variables, ne contienne plus $\delta\varphi$, $\delta\psi$, $\delta\theta$, etc., sous le signe $\int$, il ne s'ensuit pas que la formule $Xd\varphi + Vd\psi + Zd\theta +$ etc., satisfera toujours aux conditions d'intégrabilité d'une formule différentielle à n variables indépendantes, ou qu'elle puisse s'intégrer indépendamment d'aucune relation entre φ, ψ, θ, etc. : si cette formule est intégrable, le signe $\int$ disparaîtra dans la variation de son intégrale; mais l'inverse de cette proposition n'a pas lieu nécessairement.

En effet, quelles que soient les fonctions de φ, ψ, θ, etc., φ', ψ', θ', etc., représentées par X, Y, Z, etc., on aura après l'élimination de φ', ψ', θ', etc.,

$$\begin{aligned}
\delta V = & \int (Xd.\delta\varphi + Yd.\delta\psi + Zd.\delta z + \text{etc.}) \\
& + \int \left(\frac{dX}{d\varphi}\delta\varphi + \frac{dX}{d\psi}\delta\psi + \frac{dX}{d\theta}\delta\theta + \text{etc.}\right) d\varphi \\
& + \int \left(\frac{dY}{d\varphi}\delta\varphi + \frac{dY}{d\psi}\delta\psi + \frac{dY}{d\theta}\delta\theta + \text{etc.}\right) d\psi \\
& + \int \left(\frac{dZ}{d\varphi}\delta\varphi + \frac{dZ}{d\psi}\delta\psi + \frac{dZ}{d\theta}\delta\theta + \text{etc.}\right) d\theta \\
& + \text{etc.}
\end{aligned}$$

En intégrant par partie, la première intégrale devient

$$\begin{aligned}
& X\delta\varphi + Y\delta\psi + Z\delta\theta + \text{etc.} \\
& \quad - \int \left(\frac{dX}{d\varphi}\delta\varphi + \frac{dY}{d\varphi}\delta\psi + \frac{dZ}{d\varphi}\delta\theta + \text{etc.}\right) d\varphi \\
& \quad - \int \left(\frac{dX}{d\psi}\delta\varphi + \frac{dY}{d\psi}\delta\psi + \frac{dZ}{d\psi}\delta\theta + \text{etc.}\right) d\psi \\
& \quad - \int \left(\frac{dX}{d\theta}\delta\varphi + \frac{dY}{d\theta}\delta\psi + \frac{dZ}{d\theta}\delta\theta + \text{etc.}\right) d\theta \\
& \quad - \text{etc.};
\end{aligned}$$

et si l'on suppose, pour fixer les idées, que les variables φ, ψ, θ, etc., soient seulement au nombre de trois, l'expression de δV pourra s'écrire ainsi

$$\begin{aligned}
\delta V = & X\delta\varphi + Y\delta\psi + Z\delta\theta \\
& + \int \left[\left(\frac{dY}{d\varphi} - \frac{dX}{d\psi}\right) d\psi + \left(\frac{dZ}{d\varphi} - \frac{dX}{d\theta}\right) d\theta\right] \delta\varphi \\
& + \int \left[\left(\frac{dX}{d\psi} - \frac{dY}{d\varphi}\right) d\varphi + \left(\frac{dZ}{d\psi} - \frac{dY}{d\theta}\right) d\theta\right] \delta\psi \\
& + \int \left[\left(\frac{dX}{d\theta} - \frac{dZ}{d\varphi}\right) d\varphi + \left(\frac{dY}{d\theta} - \frac{dZ}{d\psi}\right) d\psi\right] \delta\theta.
\end{aligned}$$

Or, les conditions d'intégrabilité connues de la formule $Xd\varphi + Yd\psi + Zd\theta$, savoir :

$$\frac{dY}{d\varphi} = \frac{dX}{d\psi}, \quad \frac{dZ}{d\varphi} = \frac{dX}{d\theta}, \quad \frac{dZ}{d\psi} = \frac{dY}{d\theta},$$

font évidemment disparaître les signes $\int$ de l'expression de δV; mais pour qu'ils disparaissent, quelles que soient les variations $\delta\varphi$, $\delta\psi$, $\delta\theta$,

il suffit qu'on ait

$$\left(\frac{dY}{d\varphi}-\frac{dX}{d\psi}\right)d\psi+\left(\frac{dZ}{d\varphi}-\frac{dX}{d\theta}\right)d\theta=0,$$
$$\left(\frac{dZ}{d\psi}-\frac{dY}{d\theta}\right)d\theta-\left(\frac{dY}{d\varphi}-\frac{dX}{d\psi}\right)d\varphi=0,$$
$$\left(\frac{dZ}{d\varphi}-\frac{dX}{d\theta}\right)d\varphi+\left(\frac{dZ}{d\psi}-\frac{dY}{d\theta}\right)d\psi=0;$$

équations dont la troisième est une suite des deux autres, et qui peuvent avoir lieu, en vertu de quelque relation particulière entre φ, ψ, θ, sans que les coefficients de $d\varphi$, $d\psi$, $d\theta$, soient zéro, c'est-à-dire sans que les conditions d'intégrabilité précédentes soient satisfaites. Si, au lieu de trois ou d'un plus grand nombre de variables, il y en a deux seulement φ et ψ, l'expression de δV se réduira à

$$\delta V=X\delta\varphi+Y\delta\psi+\int\left(\frac{dY}{d\varphi}-\frac{dX}{d\psi}\right)(\delta\varphi d\psi-\delta\psi d\varphi);$$

et le signe $\int$ n'y pourra disparaître, à moins qu'on n'ait

$$\frac{dY}{d\theta}=\frac{dX}{d\psi};$$

mais si cette équation n'est point identique, c'est-à-dire si elle n'a lieu qu'en vertu d'une relation entre φ et ψ, il ne s'ensuivra pas que la formule $Xd\varphi+Yd\psi$ soit une différentielle à deux variables.

Cela posé, soit $n+i$ le nombre des équations (10) et (11), qui excédera de i celui des quantités φ', ψ', θ', etc. Il faudra que i soit moindre que n; car si l'on avait $i=n$, on tirerait des $2n$ équations (10) et (11), qui ne contiennent pas le temps t explicitement, des valeurs constantes pour les n inconnues φ, ψ, θ, et pour leurs coefficients differentiels φ', ψ', θ', etc. Désignons par

$$E=0,\quad E'=0,\quad E''=0,\ \text{etc.},\qquad (12)$$

les équations entre φ, ψ, θ, etc., qui résulteront de l'élimination de φ', ψ', θ', etc., entre ces intégrales (10) et (11), et dont le nombre sera égal à i. Ayant aussi éliminé φ', ψ', θ', etc., de chacune des quantités

X, Y, Z, etc.; si la formule $Xd\varphi + Yd\psi + Zd\theta +$ etc., satisfait aux conditions d'intégrabilité, en vertu des équations (12) qui réduiront à $n-i$ le nombre des variables indépendantes, on effectuera l'intégration par les règles ordinaires, et il en résultera une valeur de V en fonction de ces $n-i$ variables et des $n+i$ constantes arbitraires que renferment les équations (10) et (11). On pourra ensuite, au moyen des équations (12), réintroduire dans V toutes les variables φ, ψ, θ, etc., en en éliminant un nombre égal à i de constantes arbitraires, différentes de h que nous conserverons. Si l'on observe d'ailleurs que V doit être zéro, par hypothèse, pour $t = 0$, on aura donc finalement

$$V = F(\varphi, \psi, \theta, \text{etc.}, \quad h, e, e', e'', \text{etc.}) - k;$$

e, e', e'', etc., étant les $n - 1$ constantes arbitraires que l'on aura conservées avec h, et qui seront une partie des constantes g, g', g'', etc., ou plus généralement, des fonctions de celles-ci; F désignant une fonction connue de $2n$ quantités, dont n variables et n constantes; et en faisant, pour abréger,

$$F(\alpha, \beta, \gamma, \text{etc.}, \ h, e, e', e'', \text{etc.}) = k.$$

Les n constantes h, e, e', e'', etc., ne peuvent être que des fonctions des valeurs initiales α, β, γ, etc., α', β', γ', etc., de φ, ψ, θ, etc., φ', ψ', θ', etc.; les n variables φ, ψ, θ, etc., sont aussi des fonctions de t, α, β, γ, etc., α', β', γ', etc.; en joignant la valeur de k à celles de φ, ψ, θ, etc., h, e, e', e'', etc., il en résultera $2n+1$ équations, entre lesquelles on peut concevoir que l'on ait éliminé t, α', β', γ', etc., pour en déduire ensuite des valeurs de α, β, γ, etc., en fonction de φ, ψ, θ, etc., k, h, e, e', e'', etc. De cette manière, on pourra considérer la valeur de V, représentée plus haut par la fonction f, comme une fonction de ces $2n+1$ dernières quantités; elle devra alors être identique avec celle que l'on vient d'écrire; et en égalant, de part et d'autre, dans les variations complètes de ces deux expressions de V, les coefficients de chacune des variations de φ, ψ, θ, etc., k, h, e, e', e'', etc., on obtiendra un nombre $2n+1$ d'équations pour remplacer les équations (9). Parmi ces nouvelles équations, nous aurons seulement besoin de celles qui proviennent des

variations de h, e, e', e'', etc., et qui seront, d'après la formule (8),

$$\frac{dF}{dh} = -t + \varepsilon, \quad \frac{dF}{de} = l, \quad \frac{dF}{de'} = l', \quad \frac{dF}{de''} = l'', \text{ etc.}, \quad (13)$$

en faisant, pour abréger,

$$\begin{aligned}
&A\frac{d\alpha}{dh} + B\frac{d\beta}{de} + C\frac{d\gamma}{de} + \text{etc.} = -\varepsilon,\\
&A\frac{d\alpha}{de} + B\frac{d\beta}{dh} + C\frac{d\gamma}{dh} + \text{etc.} = -l,\\
&A\frac{d\alpha}{de'} + B\frac{d\beta}{de'} + C\frac{d\gamma}{de'} + \text{etc.} = -l',\\
&\text{etc.}
\end{aligned}$$

Quoique nous considérions α, β, γ, etc., dans ces différentiations, comme des fonctions de h, e, e', e'', etc., et de φ, ψ, θ, etc.; ces quantités α, β, γ, etc., étant des constantes arbitraires par rapport à t, quelles que soient les valeurs de h, e, e', e'', etc., il s'ensuit que leurs différences partielles sont également des quantités constantes, aussi bien que A, B, C, etc., et par conséquent aussi, les n quantités ε, l, l', l'', etc. Maintenant, les équations (12) et (13), dont le nombre total est $n+i$, seront des intégrales des équations (n), en quantités finies, qui devront se réduire, dans chaque cas, à un nombre n d'équations distinctes, contenant les variables t, φ, ψ, θ, etc., et $2n$ constantes arbitraires.

§ V.

Appliquons ces considérations générales au mouvement d'un point matériel, entièrement libre et soumis à une force dirigée vers un centre fixe.

Supposons que ce point soit celui dont x, y, z, sont les trois coordonnées; plaçons le centre fixe à leur origine; les trois composantes de la force dirigée vers ce point seront entre elles comme ces coordonnées; on aura donc

$$y\frac{dU}{dx} = x\frac{dU}{dy}, \quad x\frac{dU}{dy} = z\frac{dU}{dx}, \quad z\frac{dU}{dy} = y\frac{dU}{dz};$$

et si l'on désigne par r la distance du mobile au centre fixe, de sorte qu'on ait

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2,$$

on ne pourra satisfaire à ces équations qu'en prenant pour U une fonction de ce rayon vecteur r. En la désignant par R, et prenant aussi la masse du mobile pour unité, les trois équations du mouvement seront

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d\mathrm{R}}{dr}\frac{x}{r}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d\mathrm{R}}{dr}\frac{y}{r}, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{d\mathrm{R}}{dr}\frac{z}{r}.$$

On aura, pour l'équation des forces vives,

$$\frac{1}{2}(x'^2 + y'^2 + z'^2) = \mathrm{R} + h, \qquad (\alpha)$$

et, pour les trois équations que fournit le principe des aires,

$$xy' - yx' = g, \quad zx' - xz' = g', \quad yz' - zy' = g''. \qquad (\beta)$$

Ces quatre intégrales complètes des équations du mouvement s'en déduisent d'ailleurs immédiatement. Les trois dernières donnent celle-ci

$$gz + g'y + g''x = 0, \qquad (\gamma)$$

qui est une intégrale seconde, et qui montre que la trajectoire du mobile est comprise dans un plan passant par le centre fixe, ce qu'on peut aussi regarder comme évident *à priori*. Enfin l'intégrale que V représente, se réduit à

$$\mathrm{V} = \int (x'dx + y'dy + z'dz).$$

En joignant l'équation (α) aux deux premières équations (β), on en déduit

$$x' = \frac{g'z - gy}{r^2} + \frac{1}{r}\sqrt{(2\mathrm{R}r^2 + 2hr^2 - g^2 - g'^2)x^2 - (g'y + gz)^2},$$

$$y' = \frac{gx^2 + (g'y + gz)z}{xr^2} + \frac{y}{xr}\sqrt{(2\mathrm{R}r^2 + 2hr^2 - g^2 - g'^2)x^2 - (g'y + gz)^2},$$

$$z' = -\frac{g'x^2 + (g'y + gz)y}{xr^2} + \frac{z}{xr}\sqrt{(2\mathrm{R}r^2 + 2hr^2 - g^2 - g'^2)x^2 - (g'y + gz)^2},$$

Or, ces valeurs de x', y', z', déduites de trois intégrales premières des équations du mouvement, ne rendent pas la formule $x'dx + y'dy + z'dz$ une différentielle exacte à trois variables indépendantes x, y, z; mais, si l'on suppose ces variables liées entre elles par l'équation (γ), les valeurs de x', y', z', deviennent

$$x' = \frac{g'z - gy}{r^2} + \frac{x}{r^2}\sqrt{2Rr^2 + 2hr^2 - e^2},$$

$$y' = \frac{gx - g''z}{r^2} + \frac{y}{r^2}\sqrt{2Rr^2 + 2hr^2 - e^2},$$

$$z' = \frac{g''y - g'x}{r^2} + \frac{z}{r^2}\sqrt{2Rr^2 + 2hr^2 - e^2},$$

où l'on a fait, pour abréger,

$$g^2 + g'^2 + g''^2 = e^2;$$

et il en résulte d'abord

$$x'dx + y'dy + z'dz = \frac{1}{r}\sqrt{2Rr^2 + 2hr^2 - e^2}\,dr$$
$$+ \frac{1}{r^2}[g(xdy - ydx) + g'(zdx - xdz) + g''(ydz - zdy)].$$

Soit v l'angle que fait le rayon vecteur r avec une ligne fixe, menée par l'origine des coordonnées, dans le plan de la trajectoire; l'aire décrite par ce rayon, dans un temps infiniment petit, sera r^2dv; les coefficients de g, g', g'', exprimeront ses projections sur les trois plans des coordonnées; et, comme d'après l'équation (γ), les cosinus des inclinaisons du plan de la trajectoire sur ces trois plans, sont, $\frac{g}{e}$, $\frac{g'}{e}$, $\frac{g''}{e}$, on en conclura

$$xdy - ydx = \frac{gr^2dv}{e}, \quad zdx - xdz = \frac{g'r^2dv}{e}, \quad ydz - zdy = \frac{g''r^2dv}{e}.$$

Par conséquent, on aura

$$x'dx + y'dy + z'dz = \frac{1}{r}\sqrt{2Rr^2 + 2hr^2 - e^2}\,dr + edv;$$

formule qui se trouve ainsi réduite à une différentielle exacte à deux

variables r et ν, et d'où l'on tire, en intégrant,

$$V = \int \frac{1}{r} \sqrt{2Rr^2 + 2hr^2 - e^2}\, dr + e\nu - k;$$

k étant, comme plus haut, la constante qui rend nulle la valeur de V relative à $t = o$.

Au lieu des coordonnées x, y, z, on peut prendre les trois variables z, r, ν, pour déterminer à chaque instant la position du mobile; et comme ce point matériel est entièrement libre, on peut aussi prendre z, r, ν, pour les inconnues que nous avons désignées généralement par ϕ, ψ, θ. Abstraction faite de son dernier terme, la valeur de V que nous trouvons sera alors la fonction F de l'article précédent; laquelle, dans le cas particulier dont nous nous occupons, ne renferme que deux variables r et ν, et deux constantes arbitraires h et e. Les deux premières équations (13) seront

$$t - \epsilon = -\int \frac{rdr}{r\sqrt{2Rr^2 + 2hr^2 - e^2}},$$

$$\nu - l = \int \frac{dr}{r\sqrt{2Rr^2 + 2hr^2 - e^2}},$$

en mettant dans la seconde el au lieu de l, et divisant par e. La troisième se réduira à $l' = o$; et il n'y aura pas lieu de considérer les suivantes. On pourra d'ailleurs remplacer l'équation (γ) par celle-ci :

$$z = \text{Є} r \sin(\nu - \alpha),$$

où l'on désigne par α l'angle que fait l'intersection du plan de la trajectoire et du plan des x et y avec la ligne fixe d'ou l'on compte l'angle ν, et par Є le sinus de l'inclinaison du premier plan sur le second. De cette manière, ces trois équations seront les intégrales complètes de celles du mouvement entre les quatre variables t, r, ν, z, et les six constantes arbitraires $h, e, \epsilon, l, \alpha$, Є; ce qui coïncide avec les formules connues.

On aurait pu simplifier le calcul en prenant le plan de la trajectoire pour l'un des trois plans des coordonnées x, y, z; on a conservé des directions quelconques aux axes des coordonnées, afin que cet exemple

présentât les principales circonstances de la méthode générale, et pour montrer que la formule $x'dx + y'dy + z'dz$ n'est une différentielle exacte qu'en vertu d'une relation particulière entre x, y, z, qui se trouve remplacée par l'une de ces coordonnées égalée à zéro, lorsqu'on fait coïncider le plan des deux autres avec celui de la trajectoire.

§ VI.

Considérons encore le cas d'un point matériel entièrement libre, dont la force motrice ait toujours ses trois composantes exprimées par les différences partielles d'une même fonction U des coordonnées, mais ne soit pas dirigée vers un centre fixe, comme dans l'exemple précédent. Supposons que ce mouvement ait lieu dans un plan que nous prendrons pour celui des x et y; de sorte que les équations différentielles du second ordre se réduisent à deux, savoir :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dU}{dx}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dU}{dy};$$

U étant une fonction donnée de x et y. L'intégrale que V représente se réduira aussi à

$$V = \int (x'dx + y'dy);$$

l'équation des forces vives sera

$$\frac{1}{2}(x'^2 + y'^2) = U + h; \qquad (h)$$

et si l'on représente par

$$f(x, y, x', y') = g, \qquad (g)$$

une intégrale première des deux équations du mouvement, on tirera de ces deux dernières équations, des valeurs de x' et y', en fonctions des deux variables x' et y', et des deux constantes arbitraires h et g. Or, pourvu que la fonction donnée f ne soit pas seulement une fonction de la quantité $x'^2 + y'^2$, et des variables x et y, c'est-à-dire pourvu qu'en éliminant l'une des variables x' ou y',

entre les deux dernières équations, l'autre variable y' ou x' ne disparaisse pas en même temps, les valeurs de x' et y' tirées de ces équations rendront la formule $x'dx + y'dy$ une différentielle exacte, ainsi qu'on le prouvera tout à l'heure. Cela étant, on obtiendra par les règles ordinaires, l'expression de V en fonction de x, y, h, g; et d'après les équations (13), on en déduira

$$\int\left(\frac{dx'}{dh}\,dx + \frac{dy'}{dh}\,dy\right) = -t + \epsilon,$$
$$\int\left(\frac{dx'}{dg}\,dx + \frac{dy'}{dg}\,dy\right) = l,$$

pour les intégrales, en quantités finies, des deux équations du mouvement; h, g, ϵ, l, étant les quatre constantes arbitraires. La seconde de ces intégrales sera l'équation de la trajectoire, et la première déterminera le temps t en fonction des coordonnées du mobile.

Ce résultat coïncide avec celui que M. Jacobi a énoncé dans une lettre adressée l'an dernier à l'Institut (*). Il se rapporte, comme on voit, à la théorie de M. Hamilton; mais en faisant concourir à la détermination de la fonction V, indépendamment de l'équation des forces vives, une autre intégrale première des équations du mouvement, que l'on suppose donnée *à priori*.

Pour faire voir que les valeurs de x' et y' tirées des équations (h) et (g), satisfont à la condition d'intégrabilité de la formule $x'dx + y'dy$, c'est-à-dire à l'équation

$$\frac{dx'}{dy} = \frac{dy'}{dx},$$

j'observe que ces valeurs doivent rendre identiques les équations d'où elles sont déduites; en différentiant chacune de ces équations successivement par rapport à x et par rapport à y, on aura donc

$$\frac{df}{dx} + \frac{df}{dx'}\frac{dx'}{dx} + \frac{df}{dy'}\frac{dy'}{y} = 0, \quad x'\frac{dx'}{dx} + y'\frac{dy'}{dx} = \frac{dU}{dx},$$
$$\frac{df}{dy} + \frac{df}{dx'}\frac{dx'}{dy} + \frac{df}{dy'}\frac{dy'}{dy} = 0, \quad x'\frac{dx'}{dy} + y'\frac{dy'}{dy} = \frac{dU}{dy};$$

(*) *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*; 18 juillet 1836.

par l'élimination de $\frac{dx'}{dx}$ et $\frac{dy'}{dy}$, entre ces quatre équations, il vient

$$\frac{df}{dx}x'+\frac{df}{dx'}\frac{dU}{dx}+\left(\frac{df}{dy'}x'-\frac{df}{dx'}y'\right)\frac{dy'}{dx}=0,$$
$$\frac{df}{dy}y'+\frac{df}{dy'}\frac{dU}{dy}+\left(\frac{df}{dx'}y'-\frac{df}{dy'}x'\right)\frac{dx'}{dy}=0,$$

et, par conséquent,

$$\frac{df}{dx}x'+\frac{df}{dy}y'+\frac{df}{dx'}\frac{dU}{dx}+\frac{df}{dy'}\frac{dU}{dy}+\left(\frac{df}{dy'}x'-\frac{df}{dx'}y'\right)\left(\frac{dy'}{dx}-\frac{dx'}{dy}\right)=0;$$

or, l'équation (g) étant une intégrale première des équations du mouvement, il faut qu'en la différentiant par rapport à t, ce qui fait disparaître la constante g, et substituant ensuite pour $\frac{dx'}{dt}$ et $\frac{dy'}{dt}$ leurs valeurs $\frac{dU}{dx}$ et $\frac{dU}{dy}$ données par ces équations, on ait identiquement

$$\frac{df}{dx}x'+\frac{df}{dy}y'+\frac{df}{dx'}\frac{dU}{dx}+\frac{df}{dy'}\frac{dU}{dy}=0.$$

au moyen de quoi l'équation qu'on vient d'écrire se réduit à

$$\left(\frac{df}{dy'}x'-\frac{df}{dx'}y'\right)\left(\frac{dy'}{dx}-\frac{dx'}{dy}\right)=0,$$

et comme le premier facteur de celle-ci n'est pas nul, puisqu'on a supposé que la fonction désignée par f n'est pas une fonction de $x'^2+y'^2$, il faut que le second facteur soit zéro; ce qu'il s'agissait de démontrer.

THÈSES

DE MÉCANIQUE ET D'ASTRONOMIE;

PAR M. LEBESGUE,

Professeur-suppléant à la Faculté des Sciences de Grenoble.

PREMIÈRE PARTIE.

Formules pour la transformation des fonctions homogènes du second degré à plusieurs inconnues.

I.

Le problème dont nous allons nous occuper conduit à certaines équations déterminées qui se présentent souvent dans les questions de Mécanique, d'Astronomie et de Physique, et que M. Jacobi a récemment étudiées (*). D'autres mémoires publiés antérieurement par divers géomètres se rattachent plus ou moins à notre sujet. On consultera par exemple les *Exercices mathématiques de M. Cauchy* (tome IV, page 140) et surtout le *Bulletin des Sciences mathématiques* de M. Férussac (tome XII page 314) où se trouve l'extrait d'un excellent mémoire de M. Sturm. Nous nous bornons ici à ces citations générales. Le lecteur jugera ce qu'il peut y avoir de neuf sinon dans nos formules, au moins dans la manière de les démontrer.

PROBLÈME. *Étant donnée une fonction homogène du second degré à plusieurs inconnues, il faut en faire disparaître les rectangles de ces inconnues, au moyen d'une substitution, qui laisse la fonction homogène et du second degré entre le même nombre de nouvelles inconnues.*

(*) Journal de M. Crelle, tome XII, p. 1.

Pour simplifier la solution, on fera usage de la notation suivante :

1°. Les inconnues seront $x_1, x_2 \ldots, x_n$ au nombre de n.

2°. Tout terme renfermant le rectangle $x_\alpha x_\beta$, ou le produit de deux inconnues différentes, aura pour coefficient $A_{\alpha,\beta}$, le premier indice étant celui du premier facteur du rectangle, et le second celui du second facteur. On supposera $A_{\alpha,\beta} = A_{\beta,\alpha}$, puisque l'on a $x_\alpha x_\beta = x_\beta x_\alpha$. Le coefficient d'un carré, tel que $x_\alpha^2 = x_\alpha x_\alpha$, sera par analogie $A_{\alpha,\alpha}$.

D'après ces conventions, on remplacera la fonction

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{l} A_{1,1}\, x_1^2 + 2A_{1,2}\, x_1 x_2 + 2A_{1,3}\, x_1 x_3 + \ldots + 2A_{1,n}\, x_1 x_n. \\ \qquad + A_{2,2}\, x_2^2 + 2A_{2,3}\, x_2 x_3 + \ldots + 2A_{2,n}\, x_2 x_n. \\ \qquad\qquad + A_{3,3}\, x_3^2 + \ldots + 2A_{3,n}\, x_3 x_n. \\ \qquad\qquad\qquad \vdots \\ \qquad\qquad\qquad + A_{n,n}\, x_n^2. \end{array}\right.$$

Par la suivante,

$$(2)\quad \left\{\begin{array}{l} x_1 (A_{1,1}\, x_1 + A_{1,2}\, x_2 + \ldots + A_{1,n}\, x_n). \\ + x_2 (A_{2,1}\, x_1 + A_{2,2}\, x_2 + \ldots + A_{n,2}\, x_n). \\ \vdots \\ + x_n (A_{n,1}\, x_1 + A_{n,2}\, x_2 + \ldots + A_{n,n}\, x_n). \end{array}\right.$$

Si l'on fait

$$(3)\quad \left\{\begin{array}{l} x_1 = a_{1,1}\, y_1 + a_{1,2}\, y_2 + \ldots + a_{1,n}\, y_n. \\ x_2 = a_{2,1}\, y_1 + a_{2,2}\, y_2 + \ldots + a_{2,n}\, y_n, \\ \vdots \\ x_n = a_{n,1}\, y_1 + a_{n,2}\, y_2 + \ldots + a_{n,n}\, y_n, \end{array}\right.$$

ces valeurs, substituées dans la fonction (2), la laisseront homogène et du second degré, en la réduisant à la forme

$$(4)\quad \left\{\begin{array}{l} y_1 (B_{1,1}\, y_1 + B_{1,2}\, y_2 + \ldots + B_{1,n}\, y_n). \\ + y_2 (B_{2,1}\, y_1 + B_{2,2}\, y_2 + \ldots + B_{2,n}\, y_n). \\ \vdots \\ + y_n (B_{n,1}\, y_1 + B_{n,2}\, y_2 + \ldots + B_{n,n}\, y_n). \end{array}\right.$$

Si l'on pose pour abréger

$$(5)\qquad C_{i,\alpha}=A_{i,1}\,a_{1,\alpha}+A_{i,2}\,a_{2,\alpha}+\ldots+A_{i,n}\,a_{n,\alpha},$$

où i et α peuvent prendre toutes les valeurs entières de 1 à n, on trouvera, en faisant la multiplication sans transpositions de facteurs, pour ne pas confondre les rectangles, tels que $x_\alpha x_\beta$ et $x_\beta x_\alpha$,

$$(6)\qquad \left\{\begin{array}{l} B_{\alpha,\alpha}=a_{1,\alpha}C_{1,\alpha}+a_{2,\alpha}C_{2,\alpha}+\ldots+a_{n,\alpha}C_{n,\alpha},\\ B_{\beta,\alpha}=a_{1,\beta}C_{1,\alpha}+a_{2,\beta}C_{2,\alpha}+\ldots+a_{n,\beta}C_{n,\alpha},\\ B_{\alpha,\beta}=a_{1,\alpha}C_{1,\beta}+a_{2,\alpha}C_{2,\beta}+\ldots+a_{n,\alpha}C_{n,\beta},\end{array}\right.$$

et l'on vérifiera très facilement que l'on a $B_{\alpha,\beta}=B_{\beta,\alpha}$ à cause de $A_{\alpha,\beta}=A_{\beta,\alpha}$.

Si l'on veut que la transformée en y soit de la forme

$$(7)\qquad U_1y_1^2+U_2y_2^2+U_3y_3^2+\ldots+U_ny_n^2,$$

il faudra poser

$$(8)\qquad \left\{\begin{array}{llll} B_{1,1}=U_1, & B_{1,2}=0, & B_{1,3}=0\ldots\ldots & B_{1,n}=0,\\ B_{2,1}=0, & B_{2,2}=U_2, & B_{2,3}=0\ldots\ldots & B_{2,n}=0,\\ \vdots & & & \\ B_{n,1}=0, & B_{n,2}=0, & B_{n,3}=0\ldots\ldots & B_{n,n}=U_n.\end{array}\right.$$

Ces équations, au nombre de n^2, se réduisent à $n+\frac{n.n-1}{2}=\frac{n^2+n}{2}$ équations distinctes, entre les n^2+n inconnues suivantes : 1°. les n^2 coefficients $a_{1,1}, a_{2,2},\ldots a_{n,n}$ de la substitution (3), et, 2°., les n coefficients $U_1, U_2\ldots, U_n$ de la fonction transformée (7). On doit donc encore se donner $\frac{n^2+n}{2}$ équations entre les inconnues, afin d'ôter au problème son indétermination. Il est bien des manières d'obtenir ces nouvelles relations; la plus simple paraît la suivante. On supposera que l'équation

$$(9)\qquad x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2=y_1^2+y_2^2+\ldots+y_n^2$$

soit satisfaite pour toutes les valeurs possibles données à $y_1, y_2\ldots, y_n$. Mettant dans cette équation les valeurs de $x_1, x_2\ldots, x_n$ données plus

haut (3), et rendant le résultat indépendant de $y_1, y_2 \ldots, y_n$, on trouvera n équations de la forme

$$(10) \qquad a^2_{1,\alpha} + a^2_{2,\alpha} + \ldots + a^2_{n,\alpha} = 1,$$

où α prendra successivement les valeurs $1, 2 \ldots, n$.

On trouvera en outre $\frac{n.n-1}{2}$ équations de la forme

$$(11) \qquad a_{1,\alpha}\, a_{1,\beta} + a_{2,\alpha}\, a_{2,\beta} + \ldots a_{n,\alpha}\, a_{n,\beta} = 0,$$

où α et β, essentiellement différents, peuvent d'ailleurs prendre toutes les valeurs $1, 2 \ldots, n$.

Les $n^2 + n$ équations du problème sont donc celles qui portent les numéros (8), (10) et (11).

Il est facile de les distribuer en n systèmes partiels de $n+1$ équations chacun, le premier contenant uniquement les $n+1$ inconnues

$$U_1,\ a_{1,1},\ a_{2,1},\ a_{3,1} \ldots,\ a_{n,1};$$

le second renfermant uniquement les $n+1$ inconnues

$$U_2,\ a_{1,2},\ a_{2,2},\ a_{3,2} \ldots,\ a_{n,2},$$

et ainsi des autres jusqu'au $n^{ième}$, contenant uniquement les $n+1$ dernières inconnues

$$U_n,\ a_{1,n},\ a_{2,n},\ a_{3,n} \ldots,\ a_{n,n}.$$

Pour faire ce partage, il faut remarquer que les équations (3) donnent, au moyen des équations (10) et (11),

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{l} y_1 = a_{1,1}\, x_1 + a_{2,1}\, x_2 + \ldots + a_{n,1}\, x_n, \\ y_2 = a_{1,2}\, x_1 + a_{2,2}\, x_2 + \ldots + a_{n,2}\, x_n, \\ \vdots \\ y_n = a_{1,n}\, x_1 + a_{2,n}\, x_2 + \ldots + a_{n,n}\, x_n, \end{array} \right.$$

et que celles-ci donnent à leur tour, en vertu de l'équation (9), les suivantes :

(13) $$a^2_{\alpha,1} + a^2_{\alpha,2} + \ldots\ldots + a^2_{\alpha,n} = 1,$$
(14) $$a_{\alpha,1}\, a_{\beta,1} + a_{\alpha,2}\, a_{\beta,2} + \ldots\ldots + a_{\alpha,n}\, a_{\beta,n} = 0,$$

qui ne diffèrent des équations (10) et (11) que par le renversement des indices.

Par exemple, si l'on veut obtenir le système qui donnera la valeur des $n+1$ inconnues

$$U_\alpha,\ a_{1,\alpha},\ a_{2,\alpha},\ a_{3,\alpha} \ldots\ldots a_{n,\alpha},$$

on prendra les équations

$$B_{1,\alpha} = 0,\ B_{2,\alpha} = 0 \ldots B_{\alpha,\alpha} = U_\alpha \ldots B_{n,\alpha} = 0,$$

auxquelles on joindra l'équation

$$a^2_{1,\alpha} + a^2_{2,\alpha} + \ldots + a^2_{n,\alpha} = 1.$$

Les n premières équations reviennent à

$$\begin{aligned}
&a_{1,1}\, C_{1,\alpha} + a_{2,1}\, C_{2,\alpha} + \ldots + a_{n,1}\, C_{n,\alpha} = 0,\\
&a_{1,2}\, C_{1,\alpha} + a_{2,2}\, C_{2,\alpha} + \ldots + a_{n,2}\, C_{n,\alpha} = 0,\\
&\vdots\\
&a_{1,\alpha}\, C_{1,\alpha} + a_{2,\alpha}\, C_{2,\alpha} + \ldots + a_{n,\alpha}\, C_{n,\alpha} = U_\alpha,\\
&\vdots\\
&a_{1,n}\, C_{1,\alpha} + a_{2,n}\, C_{2,\alpha} + \ldots + a_{n,n}\, C_{n,\alpha} = 0,
\end{aligned}$$

d'où l'on tire très facilement

$$C_{1,\alpha} = a_{1,\alpha}\, U_\alpha,\ C_{2,\alpha} = a_{2,\alpha}\, U_\alpha \ldots C_{n,\alpha} = a_{n,\alpha}\, U_\alpha;$$

la première $C_{1,\alpha} = a_{1,\alpha}\, U_\alpha$ s'obtient en multipliant les équations précédentes par $a_{1,1},\ a_{1,2} \ldots a_{1,n}$ (coefficients de $C_{1,\alpha}$) respectivement, et en faisant la somme des résultats. Les autres s'obtiennent d'une manière toute semblable.

Remplaçant $C_{1,\alpha},\ C_{2,\alpha} \ldots C_{n,\alpha}$ par leurs valeurs, on aura donc définitivement le système

$$(15)\quad\left\{\begin{array}{l}
(A_{1,1}-U_\alpha)a_{1,\alpha}+A_{1,2}a_{2,\alpha}+\ldots+A_{1,n}a_{n,\alpha}=0,\\
A_{2,1}\;a_{1,\alpha}+(A_{2,2}-U_\alpha)a_{2,\alpha}+\ldots+A_{2,n}a_{n,\alpha}=0,\\
A_{3,1}\;a_{1,\alpha}+A_{3,2}a_{2,\alpha}+\ldots\ldots+A_{3,n}a_{n,\alpha}=0,\\
\vdots\\
A_{n,\alpha}\;a_{1,\alpha}+A_{n,2}a_{2,\alpha}+\ldots\ldots+(A_{n,n}-U_\alpha)a_{n,\alpha}=0,\\
\qquad a^2_{1,\alpha}+a^2_{2,\alpha}+\ldots\ldots+a^2_{n,\alpha}=1,
\end{array}\right.$$

dont la solution n'offre d'autre difficulté que la simplification des résultats auxquels conduit l'élimination.

Les $n-1$ premières équations donnent, par exemple, les rapports $\frac{a_{1,\alpha}}{a_{n,\alpha}}$, $\frac{a_{2,\alpha}}{a_{n,\alpha}}$ ....., $\frac{a_{n-1,\alpha}}{a_{n,\alpha}}$ qui, substitués dans la $n^{ième}$, conduisent à une équation du $n^{ième}$ degré en U_α, ou tout simplement en u, dont les racines, toutes réelles, sont les valeurs des n coefficients $U_1, U_2 \ldots U_n$. Ces racines déterminées, les rapports $\frac{a_{1,\alpha}}{a_{n,\alpha}}$, $\frac{a_{2,\alpha}}{a_{n,\alpha}}$ ....., $\frac{a_{n-1,\alpha}}{a_{n,\alpha}}$ sont connus. La dernière équation, mise sous la forme

$$a^2_{n,\alpha}\left[\left(\frac{a_{1,\alpha}}{a_{n,\alpha}}\right)^2+\left(\frac{a_{2,\alpha}}{a_{n,\alpha}}\right)^2-\ldots+\left(\frac{a_{n-1,\alpha}}{a_{n,\alpha}}\right)^2+1\right]=1,$$

donne alors $a^2_{n,\alpha}$, et par suite, au moyen des rapports précédents, on trouve $a^2_{1,\alpha}$, $a^2_{2,\alpha} \ldots a^2_{n-1,\alpha}$. Les valeurs de ces coefficients se présentent sous la forme de fractions qui sont toutes susceptibles de réduction en vertu d'une propriété de l'équation du n^e degré en u. Cette équation s'obtient très facilement encore de la manière suivante : on résout les n premières équations (15) par rapport à $a_{1,\alpha}$, $a_{2,\alpha} \ldots a_{n,\alpha}$, précisément comme si les deuxièmes membres n'étaient pas nuls ; on égale à zéro le dénominateur commun des inconnues $a_{1,\alpha}$, $a_{1,\alpha} \ldots a_{n,\alpha}$, et le résultat n'est autre que l'équation en u qu'on peut noter $U=0$. Le premier membre de cette équation n'est donc qu'une de ces fonctions nommées déterminants, fonctions qui, comme le dit M. Cauchy (*Journal de l'École Polytechnique*, tome 10, page 51), s'offrent d'elles-mêmes dans un grand nombre de recherches analytiques. C'est donc dans les propriétés des déterminants que l'on va chercher le moyen de simplifier la solution qui vient d'être rapidement indiquée.

II.

De quelques propriétés des déterminants.

Définition. Si l'on considère le système d'équations

$$(16)\quad \left\{\begin{array}{l} A_{1,1}\,t_1 + A_{1,2}\,t_2 + \ldots\ldots + A_{1,n}\,t_n = m_1, \\ A_{2,1}\,t_1 + A_{2,2}\,t_2 + \ldots\ldots + A_{2,n}\,t_n = m_2, \\ \vdots \\ A_{n,1}\,t_1 + A_{n,2}\,t_2 + \ldots\ldots + A_{n,n}\,t_n = m_n, \end{array}\right.$$

le dénominateur commun des inconnues t_1, $t_2 \ldots t_n$ est ce que l'on nomme le déterminant du système des nombres

$$(17)\quad \left\{\begin{array}{l} A_{1,1}\ A_{1,2}\ldots\ldots A_{1,n}, \\ A_{2,1}\ A_{2,2}\ldots\ldots A_{2,n}, \\ \vdots \\ A_{n,1}\ A_{n,2}\ldots\ldots A_{n,n}. \end{array}\right.$$

Comme ce dénominateur peut changer de signe, selon le mode de solution qu'on emploiera, on conviendra de le prendre de sorte que le terme $A_{1,1}\,A_{2,2}\,A_{3,3}\ldots A_{n,n}$, qui en fait partie, soit positif.

On trouve dans les éléments d'algèbre une règle fort simple pour former ce déterminant, et l'on en peut voir d'autres dans le mémoire de M. Cauchy, cité plus haut. Voici quelques conséquences de ces règles.

Le déterminant du système (17) est aussi celui du système suivant.

$$(18)\quad \left\{\begin{array}{l} A_{1,1}\ A_{2,1}\ldots\ldots A_{n,1}, \\ A_{1,2}\ A_{2,2}\ldots\ldots A_{n,2}, \\ \vdots \\ A_{1,n}\ A_{2,n}\ldots\ldots A_{n,n}, \end{array}\right.$$

qui s'obtient en remplaçant la série horizontale supérieure du système

(17) par la première série verticale, puis la deuxième horizontale par la deuxième verticale, et ainsi de suite jusqu'à la deuxième horizontale qui sera remplacée par la n^e ou dernière verticale

Il est un cas où les systèmes (17) et (18) restent les mêmes, malgré ce changement; c'est celui pour lequel on aurait $A_{\alpha,\beta} = A_{\beta,\alpha}$. On peut dire alors que le système est symétrique, puisque les nombres qui le forment sont placés symétriquement par rapport aux nombres à indices égaux $A_{1,1}$ $A_{2,2} \ldots A_{n,n}$ qui forment la diagonale du système.

Une autre conséquence de la règle pour former le déterminant, c'est qu'il change de signe :

1°. Quand on change le signe de tous les nombres d'une même série horizontale ou verticale;

2°. Quand on change l'ordre de deux séries consécutives horizontales ou verticales, d'où il suit que si l'on avance ou recule une série de k rangs, le déterminant se trouve multiplié par $(-1)^k$.

Ceci rappelé, si l'on représente par D le déterminant du système (17), par $[g, i]$ le déterminant du système qui se tire du système (17) par la suppression de la série horizontale de rang g et de la série verticale de rang i, et semblablement par la notation $\begin{bmatrix} g,i \\ h,k \end{bmatrix}$ le déterminant du système qui résulte de l'omission des séries horizontales de rangs g et i et des séries verticales de rangs i et k dans le système (17), on pourra, au moyen des remarques précédentes, établir les proportions suivantes :

I. Dans tout déterminant symétrique on a

$$[g,i] = [i,g].$$

Cela résulte de ce qu'il est permis de changer (17) en (18), sans déplacer réellement les nombres du système.

II. Pour tout déterminant nul on a

$$[g,g]\ [i,i] = [i,g]\ [g,i],$$

et par conséquent pour un déterminant à la fois nul et symétrique

$$[g,g]\ [i,i] = [i,g]^2 = [g,i]^2.$$

En effet, si dans le système (16) on suppose $m_1 = m_2 \ldots = m_n = 0$,

et qu'on supprime l'équation de rang g, on trouvera

$$\frac{t_g}{t_i} = (-1)^{g+i} \frac{[g,g]}{[g,i]},$$

le facteur $(-1)^{g+i}$ provenant du déplacement de séries et du changement de signe, qui résultent de l'application de la règle pour déduire le numérateur $[g,g]$ du dénominateur $[g,i]$. L'exposant de -1 a été augmenté d'un nombre pair pour simplifier le résultat. Si, dans le même système (16), on supprime l'équation de rang i, on trouvera pareillement

$$\frac{t_g}{t_i} = (-1)^{i+g} \frac{[i,i]}{[i,g]}.$$

Multipliant la valeur de $\frac{t_g}{t_i}$ par celle de $\frac{t_i}{t_g}$, on a de suite le résultat de l'énoncé.

III. Dans tout déterminant non symétrique on a, quels que soient les indices du nombre $A_{i,g}$ égaux ou non,

$$\frac{dD}{dA_{i,g}} = (-1)^{g+i} [i,g].$$

Le coefficient différentiel de D est pris par rapport à $A_{i,g}$, supposé différent de tous les nombres $A_{\alpha,\beta}$; ce qui n'arrive pas pour un déterminant symétrique où l'on a $A_{i,g} = A_{g,i}$.

IV. Pour un déterminant symétrique on a toujours

$$(19)\quad \frac{dD}{dA_{g,g}} = [g,g] \quad (20)\quad \frac{dD}{dA_{i,g}} = (-1)^{g+i}\, 2[i,g].$$

Ces deux propositions se déduisent de la formule

$$D = A_{n,n}[n,n] - A_{n,n-1}[n,n-1] + A_{n,n-2}[n,n-2] - \ldots$$

qui se tire immédiatement des équations (16), où l'on a fait

$$m_1 = m_2 \ldots\ldots = m_n = 0.$$

Différentiant la valeur de D, en observant que le coefficient $A_{n,n}$ n'entre que dans le premier terme, sans entrer dans $[n,n]$, on trouve

$\frac{dD}{dA_{n,n}} = [n,n]$, et cela est vrai pour tout déterminant symétrique ou non symétrique. Par un déplacement de séries horizontales, et *d'un même nombre* de séries verticales, on trouve sans changement de signe $\frac{dD}{dA_{g,g}} = [g,g]$, en amenant le terme $A_{g,g}$ à la dernière place de la dernière horizontale.

Pour un déterminant non symétrique on trouve $\frac{dD}{dA_{n,n-1}} = -[n,n-1]$, et plus généralement $\frac{dD}{dA_{i,g}} = (-1)^{i+g}\,[i,g]$, au moyen de déplacements de séries qui amèneraient $A_{i,g}$ à la place qu'occupait $A_{n,n-1}$, c'est-à-dire à l'avant-dernière de la dernière horizontale.

Si le déterminant appartient à un système symétrique, comme on a $A_{n,n-1} = A_{n-1,n}$, en différentiant D, il faudra avoir égard au coefficient $A_{n-1,n}$ contenu dans les déterminants partiels $[n,n-1]$, $[n,n-2]$etc. Or, le même calcul, qui a fait tirer la valeur de D du système (17), fera tirer semblablement

$$[n,i] = A_{n-1,n}\left[\begin{smallmatrix} n & i \\ n-1, & n\end{smallmatrix}\right] + A_{n-2,n}\left[\begin{smallmatrix} n & i \\ n-2, & n\end{smallmatrix}\right] + A_{n-3,n}\left[\begin{smallmatrix} n & i \\ n-3, & n\end{smallmatrix}\right] - \ldots$$

du système (18).

On aura donc $\frac{dD}{dA_{n,n-1}} = \left[\begin{smallmatrix} n & i \\ n-1, & n\end{smallmatrix}\right]$, et par suite

$$\begin{aligned}\frac{dD}{dA_{n,n-1}} = \frac{dD}{dA_{n-1,n}} &= -[n,n-1] - A_{n,n-1}\left[\begin{smallmatrix} n, & n-1 \\ n-1, & n\end{smallmatrix}\right] + A_{n,n-3}\left[\begin{smallmatrix} n, & n-2 \\ n-1, & n\end{smallmatrix}\right] - A_{n,n-3}\left[\begin{smallmatrix} n, & n-3 \\ n-1, & n\end{smallmatrix}\right] + \ldots \\ &= -[n,n-1] - A_{n-1,n}\left[\begin{smallmatrix} n, & n-1 \\ n-1, & n\end{smallmatrix}\right] + A_{n-2,n}\left[\begin{smallmatrix} n, & n-1 \\ n-2, & n\end{smallmatrix}\right] - A_{n-3,n}\left[\begin{smallmatrix} n, & n-1 \\ n-3, & n\end{smallmatrix}\right] + \ldots \\ &= -[n,n-1] - [n,n-1] = -2[n,n-1],\end{aligned}$$

en remarquant que l'on a $A_{n,\alpha} = A_{\alpha,n}$ et $\left[\begin{smallmatrix} a, & c \\ b, & d\end{smallmatrix}\right] = \left[\begin{smallmatrix} d, & b \\ c, & a\end{smallmatrix}\right]$, puisque le système est symétrique.

Plus généralement, par un déplacement de séries horizontales et de séries verticales, on trouvera $\frac{dD}{dA} = (-1)^{i+g}[i,g]$, comme il est dit dans l'énoncé.

V. Dans tout déterminant nul, mais non symétrique, on a

$$\left(\frac{dD}{dA_{i,g}}\right)\left(\frac{dD}{dA_{g,i}}\right) = \frac{dD}{dA_{g,g}}\,\frac{dD}{dA_{i,i}};$$

et dans tout déterminant à la fois nul et symétrique, on trouve

$$(21) \qquad \left(\frac{dD}{dA_{i,g}}\right)^2 = 4\,\frac{dD}{dA_{g,g}}\,\frac{dD}{dA_{i,i}}.$$

Ces équations ne sont que la traduction de celles de la proposition II.

Les équations (19), (20) et (21) vont servir à simplifier la résolution des équations (15).

III.

Développement de la solution des équations (15).
Calcul de l'équation en **u**.

L'équation en u n'est autre que le déterminant du système

$$\begin{array}{lllll} A_{1,1}-u, & A_{1,2}, & A_{1,3}, & \ldots & A_{1,n}, \\ A_{1,2}, & A_{2,2}-u, & A_{2,3}, & \ldots & A_{2,n}, \\ \vdots & & & & \\ A_{1,n}, & A_{2,n}, & A_{3,n}, & \ldots & A_{n,n}-u. \end{array}$$

On la représentera donc par

$$(22) \qquad U = \text{dét.}[A_{1,1}-u,\ A_{2,2}-u \ldots A_{n,n}-u] = 0.$$

Ainsi, pour $n=2$, on aura

$$(23) \qquad U = (A_{1,1}-u)\,(A_{2,2}-u) - A_{1,2}^2.$$

Pour $n=3$, on aura

$$(24) \qquad \begin{aligned} U = {} & (A_{1,1}-u)\,(A_{2,2}-u)\,(A_{3,3}-u) \\ & - A_{2,3}^2(A_{1,1}-u) - A_{1,3}^2(A_{2,2}-u) - A_{1,2}^2(A_{3,3}-u) + 2A_{1,2}A_{1,3}A_{2,3} = 0. \end{aligned}$$

Pour $n=4$, on aura

$$(25) \qquad \left.\begin{aligned} U = {} & (A_{1,1}-u)\,(A_{2,2}-u)\,(A_{3,3}-u)\,(A_{4,4}-u) \\ & - A_{3,4}^2(A_{1,1}-u)(A_{2,2}-u) + 2A_{2,3}A_{2,4}A_{3,4}(A_{1,1}-u) \\ & - A_{2,4}^2(A_{1,1}-u)(A_{3,3}-u) + 2A_{1,3}A_{1,4}A_{3,4}(A_{2,2}-u) \\ & - A_{2,3}^2(A_{1,1}-u)(A_{4,4}-u) + 2A_{1,2}A_{2,4}A_{2,4}(A_{3,3}-u) \\ & - A_{1,4}^2(A_{2,2}-u)(A_{3,3}-u) + 2A_{1,2}A_{1,3}A_{2,3}(A_{4,4}-u) \\ & - A_{1,4}^2(A_{2,2}-u)(A_{4,4}-u) \\ & - A_{1,2}^2(A_{3,3}-u)(A_{4,4}-u) \\ & - 2A_{1,2}A_{3,4}A_{1,3}A_{2,4} + A_{1,4}^2A_{2,3}^2 \\ & - 2A_{1,2}A_{3,4}A_{1,4}A_{2,3} + A_{1,3}^2A_{2,4}^2 \\ & - 2A_{1,3}A_{2,4}A_{1,4}A_{2,3} + A_{1,2}^2A_{3,4}^2 \end{aligned}\right\} = 0.$$

A ces exemples particuliers qui suffiront pour les applications, on peut joindre les remarques générales qui suivent.

Première remarque. Quel que soit le nombre n des inconnues de la fonction à transformer, si les coefficients $A_{1,n}$, $A_{2,n} \ldots A_{n-1,n}$, et par conséquent $A_{n,1}$, $A_{n,2} \ldots$, $A_{n,n-1}$ sont nuls, le déterminant, pour le cas de n inconnues, se trouvera, en multipliant par $A_{n,n}-u$, le déterminant trouvé pour le cas de $n-1$. Cela suit de la valeur de D donnée plus haut.

Deuxième remarque. Le nombre n étant quelconque, si le déterminant ne renferme que des coefficients à indices égaux, ou dont un des indices soit n, tels sont $A_{\alpha,\alpha}$ et $A_{\alpha,n}$, l'équation en n sera

$$\begin{aligned}
(26)\qquad & (A_{1,1}-u)\,(A_{2,2}-u)\ldots(A_{n,n}-u) \\
& -A^2_{1,n}(A_{2,2}-u)\,(A_{3,3}-u)\ldots(A_{n-1,n-1}-u) \\
& -A^2_{2,n}(A_{1,4}-u)\,(A_{3,3}-u)\ldots(A_{n-1,n-1}-u) \\
& \vdots \\
& -A^2_{n-1,n}(A_{1,1}-u)\,(A_{2,2}-u)\ldots(A_{n-2,n-1}-u),
\end{aligned}$$

le premier terme contenant les n facteurs $A_{1,1}-u$, $A_{2,2}-u \ldots A_{n,n}-u$, et les autres, qui sont négatifs, ne contenant que $n-2$ de ces coefficients. Ainsi, par exemple, pour le terme où entre $A^2_{\alpha,n}$, les deux facteurs à omettre sont $A_{\alpha,\alpha}-u$; $A_{n,n}-u$ indiqués par les indices de $A_{\alpha,n}$.

Réalité des racines de l'équation en u.

I. L'équation $U=0$ a ses racines réelles pour $n=2$. En effet, on a dans ce cas

$$u=\frac{A_{1,1}+A_{2,2}}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{(A_{1,1}-A_{2,2})^2+4A^2_{1,2}},$$

valeurs réelles.

II. Quel que soit n, si les nombres ou coefficients $A_{\alpha,\beta}$ ont tous deux indices égaux, ou dont l'un soit n, l'équation en u aura toutes ses racines réelles.

En effet, dans ce cas, l'équation en n est celle notée (26). Si l'on suppose que $A_{1,1}$, $A_{2,2}\ldots$, $A_{n,n}$ soient rangés par ordre de grandeur, de sorte que l'on ait

$$\infty > A_{1,1} > A_{2,2} > \ldots > A_{n,n} > -\infty,$$

et que dans cette équation (26) on fasse successivement

	$u=\infty$,	$A_{1,1}$,	$A_{2,2}\ldots$	$A_{n-1,n-1}$,	$A_{n,n}$,	$-\infty$.
U prendra les signes	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$	$+$,
ou bien	$-$	$-$	$+$	$+$	$-$	$+$,

selon que n sera pair ou impair. Ainsi, dans tous les cas, les n racines sont réelles, puisqu'il y a n changements de signe.

Si plusieurs des nombres $A_{1,1}$, $A_{2,2}\ldots$, $A_{n,n}$ étaient égaux, si l'on avait, par exemple, $A_{1,1}=A_{2,2}$, l'équation (26) prendrait le facteur $A_{1,1}-u$, d'où la racine $u=A_{1,1}$. Ce facteur supprimé, on trouverait une équation semblable du $(n-1)^e$ degré, dont l'on prouverait de même que les $n-1$ racines sont toutes réelles.

Si les coefficients $A_{1,1}$, $A_{2,2}\ldots$, $A_{n,n}$ n'étaient pas rangés par ordre de grandeur, il suffirait d'un déplacement de termes pour retomber dans ce cas. Ainsi la démonstration est générale.

III. Quels que soient les coefficients $A_{\alpha,\beta}$, si l'équation en u a toutes ses racines réelles pour $n=m-1$, elle les aura aussi toutes réelles pour $n=m$. Ceci étant démontré, comme dans tous les cas les racines sont réelles pour $n=2$, elles le seront encore toutes pour $n=3$, $n=4$, et en général pour n quelconque.

En ne considérant que les $m-1$ inconnues x_1, $x_2\ldots$, x_{m-1} qui entrent dans la fonction homogène du second degré, qui, en outre, contient x_m, on pourra, d'après l'hypothèse, faire disparaître les rectangles des $m-1$ inconnues x_1, $x_2\ldots$, x_{m-1}, c'est-à-dire avoir une transformée où tous les coefficients seront nuls, à l'exception de ceux qui auraient des indices égaux, ou dont l'un des indices serait m. Or, d'après la proposition précédente, par une nouvelle transformation, celle-ci conduit à une équation en n, dont toutes les racines sont réelles. Il reste donc à montrer que les deux transformations pourraient être remplacées par une seule, qui conduirait par consé-

quent à une équation en u ayant toutes ses racines réelles. Or, si la première substitution est exprimée par les équations

$$x_1 = a_{1,1}y_1 + a_{1,2}y_2 + \ldots + a_{1,n}y_n,\ x_2 = a_{2,1}y_1 + \text{etc.},$$

et si la deuxième substitution est exprimée semblablement par les équations de même forme

$$y_1 = b_{1,1}z_1 + b_{1,2}z_2 + \ldots + b_{1,n}z_n,\ y_2 = b_{2,1}z_1 + \ldots \text{etc.},$$

l'élimination de $y_1, y_2 \ldots, y_n$ donnera

$$x_1 = c_{1,1}z_1 + c_{1,2}z_2 + \ldots + c_{1,n}z_n,\ x_2 = c_{2,1}z_1 + \ldots \text{etc.},$$

où l'on aura en général

$$c_{i,\varkappa} = a_{i,1}\, b_{1,\varkappa} + a_{i,2}\, b_{2,\varkappa} + \ldots + a_{i,n}\, b_{n,\varkappa}.$$

Or les coefficients ainsi formés satisfont, comme on le vérifie très facilement aux relations (10), (11), (13) et (14), ce qui d'ailleurs est une suite des deux équations

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2,\ y_1^2 + \ldots + y_n^2 = z_1^2 + z_2^2 + \ldots + z_n^2$$

qui entraînent la suivante

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = z_1^2 + z_2^2 + \ldots + z_n^2.$$

Ainsi les deux substitutions sont remplacées par une seule qui fait disparaître tous les rectangles et qui conduit à une équation du n^e degré en u, dont toutes les racines sont réelles. Cette démonstration n'est que le développement de celle que M. Poisson a donnée dans son mémoire sur le *Mouvement d'un Corps solide*, pour le cas de trois variables (*).

Racines égales.

Quand l'équation en u, $U = 0$, a des racines égales, ou satisfaisant à l'équation $\frac{dU}{du} = 0$, ces racines satisfont aussi à l'équation $\frac{dU}{dA_{\alpha,\beta}} = 0$, quels que soient les indices α et β égaux ou non.

En raison de la forme de l'équation en u, on a

(*) Voyez aussi le mémoire de M. Jacobi, déjà cité.

$$(27)\qquad -\frac{dU}{du}=\frac{dU}{dA_{1,1}}+\frac{dU}{dA_{2,2}}+\ldots+\frac{dU}{dA_{n,n}}.$$

Élevant au carré les deux membres de cette équation, les doublant et les simplifiant au moyen de l'équation (21), on aura

$$(28)\qquad 2\left(\frac{dU}{du}\right)^2=2\left(\frac{dU}{dA_{1,1}}\right)^2+2\left(\frac{dU}{dA_{2,2}}\right)^2+\ldots\ldots+2\left(\frac{dU}{dA_{n,n}}\right)^2$$
$$+\left(\frac{dU}{dA_{1,2}}\right)^2+2\left(\frac{dU}{dA_{1,3}}\right)^2+\ldots\ldots+\left(\frac{dU}{dA_{\alpha,\beta}}\right)^2+\ldots$$

Pour le cas des racines égales, le premier membre devenant nul, il en sera de même du second, et par conséquent de chaque terme en particulier, puisque les racines sont toutes réelles.

Calcul des coefficients $a_{1,1}$, $a_{1,2}\ldots$, $a_{n,n}$ *de la substitution* (3).

Pour trouver les coefficients de la substitution (3), il suffit de remarquer que l'on a, en employant les notations de l'article II,

$$(29)\qquad \frac{a_{k,\alpha}}{a_{n,\alpha}}=(-1)^{n+k}\frac{[n,k]}{[n,n]}.$$

Alors, au moyen de l'équation

$$a_{1,\alpha}^2+a_{2,\alpha}^2+\ldots\ldots+a_{n,\alpha}^2=1,$$

on trouvera, en mettant pour $[n,i]^2$ sa valeur $[n,n]\,[i,i]$,

$$(30)\qquad a_{n,\alpha}^2=\frac{[n,n]}{[1,1]+[2,2]+\ldots+[n,n]}:$$

il suffira pour cela de supprimer le facteur $[n,n]$ commun aux deux termes de la fonction. Par suite on aura

$$(31)\qquad a_{k,\alpha}^2=\frac{[k,k]}{[1,1]+[2,2]+\ldots\ldots+[n,n]}.$$

Enfin, au moyen des équations (19), (20) et (27), les équations (29) et (31) deviendront

$$(32)\qquad \frac{a_{k,\alpha}}{a_{n,\alpha}}=\frac{1}{2}\frac{dU}{dA_{k,n}}:\frac{dU}{dA_{n,n}},$$

$$(33) \qquad a_{k,\alpha}^{2} = -\frac{dU}{\delta A_{k,k}} : \frac{dU}{du},$$

où il faudra changer u en $U\alpha$.

La remarque faite sur les racines égales montre que $a_{k,\alpha}^{2}$ peut se présenter sous la forme $\frac{0}{0}$, mais non sous la forme $\frac{m}{0}$.

Dans la formule (33), quand on a mis dans $\frac{dU}{du}$, pour n sa valeur particulière U_α, on peut encore remplacer $\frac{dU}{du}$ par le produit

$$\pm(U_\alpha - U_1)(U_\alpha - U_2)\ldots(U_\alpha - U_{\alpha-1})(U_\alpha - U_{\alpha+1})\ldots(U_\alpha - U_n),$$

selon que n est pair ou impair, pourvu cependant que toutes les racines soient inégales. Cela suit de ce qu'en posant $U = (u - U_1)(u - U_2)\ldots(u - U_n)$, il en résulte

$$\frac{dU}{du} = \frac{U}{u - U_1} + \frac{U}{u - U_2} + \ldots + \frac{U}{u - U_n}.$$

Si dans cette équation l'on fait, par exemple, $u = U_1$, le premier terme se réduit à $(U_1 - U_2)(U_1 - U_3)\ldots(U_1 - U_n)$, et tous les autres disparaissent à cause du facteur nul $U_1 - U_1$. On en dira autant pour les autres substitutions $u = U_2$, $u = U_3 \ldots u = U_\alpha \ldots u = U_n$. Cette transformation pourra, dans certains cas, faciliter la discussion en déterminant le signe du dénominateur.

Résumé de la solution.

La transformation de la fonction (1) en la fonction (7), par le moyen de la substitution (3), est renfermée uniquement dans les formules (22), (32) et (33).

L'équation (22) fait connaître les coefficients U_1, $U_2 \ldots U_n$ de la transformée (7) par le moyen de la résolution d'une équation du n^e degré.

L'équation (33) fait connaître la valeur absolue des n^2 coefficients de la substitution (3), par l'extraction de la racine carrée du quotient de deux coefficients différentiels du premier membre U de l'équation (22).

Comme ces coefficients peuvent être pris soit avec le signe $+$, soit avec le signe $-$, l'équation (32) donne le moyen de combiner convenablement les signes en montrant que les termes de la série

$$a_{1,\alpha},\ a_{2,\alpha},\ a_{3,\alpha}\ldots\ldots a_{n,\alpha}$$

ont les mêmes signes que ceux de la série

$$\frac{dU}{dA_{1,\alpha}},\ \frac{dU}{dA_{2,\alpha}},\ \frac{dU}{dA_{3,\alpha}}\ldots\ldots,\ \frac{dU}{dA_{n,\alpha}},$$

où l'on doit faire $u = U\alpha$. On pourrait encore prendre tous les signes opposés. Cela tient au signe que l'on donne à $a_{n,\alpha}$.

IV.

Autre transformation de l'équation homogène du second degré à n inconnues.

La transformation précédente est fondée sur la relation...... $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2$, si l'on prend une autre équation de condition, la solution du problème aura besoin de modification. Il est une autre transformation aussi utile que la précédente, c'est celle fondée sur la relation

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{n-1}^2 - x_n^2 = y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_{n-1}^2 - y_n^2.$$

Il serait long et d'ailleurs inutile de recommencer le calcul, il suffira d'indiquer ici les changements à faire dans une partie des équations des articles I et III.

Les équations de (1) à (8) inclusivement n'éprouvent aucun changement.

Dans l'équation (9), il faut changer le signe du dernier terme de chaque membre, changement qui entraîne tous les suivants.

Dans les $n - 1$ premières équations (10) il faudra changer le signe du dernier terme du premier membre, et dans la n^e qui répond à $\alpha = n$, il faudra changer le signe du dernier terme du premier membre et de plus le signe du second membre.

Dans toutes les équations (11) le dernier terme changera de signe.

Dans les équations (12) les derniers termes des seconds membres changeront de signe, et il en sera de même du premier membre de la n^e.

Dans les équations (13) les signes des derniers termes des premiers membres changeront : de plus dans la n^e équation il faudra changer le signe du deuxième membre.

Dans les équations (14), les derniers termes changeront de signe.

Dans les équations (15) il faudra changer $A_{n,n} - U_\alpha$ en $A_{n,n} + U_\alpha$. De plus si $\alpha = n$, il faudra dans toutes changer U_n en $-U_n$. D'ailleurs dans la dernière équation (15) il faudra toujours changer le signe du dernier terme du premier membre, et changer celui du second membre, seulement pour $\alpha = n$.

Les équations de (16) à (21) ou de l'article II ne changent point.

Dans les équations de (22) à (26), il faut seulement changer $A_{n,n} - u$ en $A_{n,n} + u$, et d'ailleurs changer le signe de la racine U_n.

Dans l'équation (27) il faut changer le signe du dernier terme $\frac{dU}{dA_{n,n}}$.

Dans l'équation (28) il faudra dans le second membre prendre négativement les termes tels que $\left(\frac{dU}{dA_{\alpha,n}}\right)^2$.

Ce qui a été démontré pour la réalité des racines et sur leur égalité n'a plus lieu ici même pour le cas de deux inconnues.

Dans l'équation (29) il n'y a rien à changer dans l'équation (30), et dans la (31)' il faudra changer le signe de $[n, n]$ au dénominateur et aussi au numérateur pour $\alpha = n$.

Dans l'équation (32) il n'y a rien à changer : dans la (33)', il faudra pour le cas de $\alpha = n$, changer le signe du second membre, et de plus remplacer U_n par $-U_n$,

Enfin si l'on pose

$$x_1 = x_n \cos\theta_1, \quad x_2 = x_n \cos\theta_2, \ldots x_{n-1} = x_n \cos\theta_{n-1},$$
$$y_1 = y_n \cos\varphi_1, \quad y_2 = y_n \cos\varphi_2, \ldots y_{n-1} = y_n \cos\varphi_{n-1},$$

et d'ailleurs,

$$\cos^2\theta_1 + \cos^2\theta_2 + \ldots + \cos^2\theta_{n-1} = 1,$$

il en résultera

$$\cos^2\varphi_1 + \cos^2\varphi_2 + \ldots + \cos^2\varphi_{n-1} = 1\,;$$

et l'on transformera la fonction

$$\begin{array}{l} A_{1,1}\cos^2\theta_1 + 2A_{1,2}\cos\theta_1\cos\theta_2 + \ldots + 2A_{1,n-1}\cos\theta_1\cos\theta_{n-1} + 2A_{1,n}\cos\theta_1 \\ \qquad + A_{2,2}\cos^2\theta_2 + \ldots\ldots + 2A_{2,n-1}\cos\theta_2\cos\theta_{n-1} + 2A_{2,n}\cos\theta_2 \\ \qquad\qquad \vdots \\ \qquad\qquad + A_{n-1,n-1}\cos^2\theta_{n-1} + 2A_{n-1,n}\cos\theta_{n-1} \\ \qquad\qquad\qquad + A_{n,n}, \end{array}$$

en

$$U_1\cos^2\varphi_1 + U_2\cos^2\varphi_2 + \ldots + U_{n-1}\cos^2\varphi_{n-1} - U_n,$$

ou

$$(U_1 - U_n)\cos^2\varphi_1 + (U_2 - U_n)\cos^2\varphi_2 + \ldots + (U_{n-1} - U_n)\cos^2\varphi_{n-1}$$

au dénominateur près, par le moyen de la substitution

$$\cos\theta_i = \frac{a_{i,1}\cos\varphi_1 + a_{i,2}\cos\varphi_2 + \ldots + a_{i,n-1}\cos\varphi_{n-1} + a_{i,n}}{a_{n,1}\cos\varphi_1 + a_{n,2}\cos\varphi_2 + \ldots + a_{n,n-1}\cos\varphi_{n-1} + a_{n,n}}$$

où il faut donner à i toutes les valeurs $1, 2, 3\ldots n$.

Il serait inutile d'entrer dans de plus longs détails sur cette seconde transformation. L'application qui en sera faite plus loin, éclaircira ce qui peut rester d'obscur dans les indications précédentes.

SECONDE PARTIE.

APPLICATIONS.

I.

Exemple de la première transformation. Détermination des axes principaux de rotation.

Les équations du mouvement d'un corps solide contiennent les neuf intégrales définies suivantes : $\int xdm$, $\int ydm$, $\int zdm$; $\int xydm$, $\int xzdm$, $\int yzdm$; $\int x^2dm$, $\int y^2dm$, $\int z^2dm$ étendues à toute la masse du corps dont l'élément est dm, et qui est rapporté à trois axes de coordonnées rectangulaires x, y, z.

Il importerait donc de simplifier les équations différentielles du mouvement par un changement d'axes et d'origine qui fît disparaître un certain nombre de ces intégrales, quand bien même les nouveaux axes ne devraient pas jouir de propriétés mécaniques remarquables.

Les trois premières intégrales disparaissent quand on met l'origine au centre de gravité du corps. Les trois suivantes peuvent aussi disparaître, quelle que soit l'origine; il suffit pour cela de choisir convenablement la direction de trois nouveaux axes rectangulaires de même origine.

Pour démontrer cette proposition en faisant usage des formules de la première partie, on remplacera x, y, z, par x_1, x_2, x_3, et l'on supposera que pour les axes sur lesquels se comptent ces coordonnées, on ait trouvé

$$\int x_1^2dm = A_{1,1},\quad \int x_2^2dm = A_{2,2},\quad \int x_3^2dm = A_{3,3},$$
$$\int x_1x_2dm = A_{1,2},\quad \int x_1x_3dm = A_{1,3},\quad \int x_2x_3dm = A_{2,3}:$$

afin de trouver de nouveaux axes de coordonnées rectangulaires de même origine et pour lesquels on ait

$$\int y_1^2 dm = \mathrm{U}_1,\quad \int y_2^2 dm = \mathrm{U}_2,\quad \int y_3^2 dm = \mathrm{U}_3,$$
$$\int y_1 y_2 dm = 0,\quad \int y_1 y_3 dm = 0,\quad \int y_2 y_3 dm = 0,$$

on posera les équations

$$\begin{aligned} x_1 &= a_{1,1} y_1 + a_{1,2} y_2 + a_{1,3} y_3, \\ x_2 &= a_{2,1} y_1 + a_{2,2} y_2 + a_{2,3} y_3, \\ x_3 &= a_{3,1} y_1 + a_{3,2} y_2 + a_{3,3} y_3, \end{aligned}$$

qui, en supposant la relation

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2,$$

donneront les équations

$$\begin{aligned} y_1 &= a_{1,1} x_1 + a_{2,1} x_2 + a_{3,1} x_3, \\ y_2 &= a_{1,2} x_1 + a_{2,2} x_2 + a_{3,2} x_3, \\ y_3 &= a_{1,3} x_1 + a_{2,3} x_2 + a_{3,3} x_3. \end{aligned}$$

Les neuf coefficients $a_{1,1}, a_{1,2} \ldots a_{3,3}$ représentant les cosinus des angles que les axes des deux systèmes font entre eux. Ainsi $a_{2,3}$ est le cosinus de l'angle que l'axe des x_2 fait avec l'axe des y_3; le premier indice se rapportant aux x et le second aux y.

Si l'on calcule $\int y_1^2 dm$ et que l'on évite les transpositions de facteurs et par suite les réductions, on trouvera

$$\begin{aligned} \int y_1^2 dm = \mathrm{U}_1 = {} & a_{1,1}(\mathrm{A}_{1,1} a_{1,1} + \mathrm{A}_{1,2} a_{2,1} + \mathrm{A}_{1,3} a_{3,1}) \\ & + a_{2,1}(\mathrm{A}_{2,1} a_{1,1} + \mathrm{A}_{2,2} a_{2,1} + \mathrm{A}_{2,3} a_{3,1}) \\ & + a_{3,1}(\mathrm{A}_{3,1} a_{1,1} + \mathrm{A}_{3,2} a_{2,1} + \mathrm{A}_{3,3} a_{3,1}) \end{aligned}$$

ou $\mathrm{A}_{2,1}$ représente $\int x_2 x_1 dm$, comme $\mathrm{A}_{1,2}$ représente $\int x_1 x_2 dm$: ainsi $\mathrm{A}_{2,1} = \mathrm{A}_{1,2}$. Cette valeur de U_1 est précisément celle trouvée dans la première partie pour $\mathrm{B}_{1,1}$. On trouvera pareillement que U_2 et U_3 reviennent à $\mathrm{B}_{2,2}$ et $\mathrm{B}_{3,3}$.

Si l'on calcule $\int y_1 y_2 dm$ avec la même attention d'éviter les transpositions de facteurs, on obtiendra

$$\begin{aligned} \int y_1 y_2 dm = {} & a_{1,1}(\mathrm{A}_{1,1} a_{1,2} + \mathrm{A}_{1,2} a_{2,2} + \mathrm{A}_{1,3} a_{3,2}) \\ & + a_{2,1}(\mathrm{A}_{2,1} a_{1,2} + \mathrm{A}_{2,2} a_{2,2} + \mathrm{A}_{2,3} a_{3,2}) \\ & + a_{3,1}(\mathrm{A}_{3,1} a_{1,2} + \mathrm{A}_{3,2} a_{2,2} + \mathrm{A}_{3,3} a_{3,3}). \end{aligned}$$

De même encore, on aurait

$$\begin{aligned}\int y_2 y_1 dm = {} & a_{1,2}(A_{1,1}a_{1,1} + A_{1,2}a_{2,1} + A_{1,3}a_{3,1}) \\ & + a_{2,2}(A_{2,1}a_{1,1} + A_{2,2}a_{2,1} + A_{2,3}a_{3,1}) \\ & + a_{3,2}(A_{3,1}a_{1,1} + A_{3,2}a_{2,1} + A_{3,3}a_{3,1}).\end{aligned}$$

Ces deux quantités ne sont autres que celles représentées par $B_{1,2}$ et $B_{2,1}$ dans la première partie; on reconnaît facilement leur égalité. Le problème de déterminer les axes principaux, ou des axes pour lesquels on ait

$$\int y_1 y_2 dm = 0, \quad \int y_1 y_3 dm = 0, \quad \int y_2 y_3\, dm = 0,$$

dépendra donc des équations

$$\begin{array}{lll} B_{1,1} = U_1, & B_{1,2} = 0, & B_{1,3} = 0, \\ B_{2,1} = 0, & B_{2,2} = U_2, & B_{2,3} = 0, \\ B_{3,1} = 0, & B_{3,2} = 0, & B_{3,3} = U_3. \end{array}$$

Ce problème est donc analytiquement le même que celui de faire disparaître les rectangles de la fonction

$$\begin{aligned} A_{1,1}x_1^2 + 2A_{1,2}x_1x_2 &+ 2A_{1,3}x_1x_3 \\ + A_{2,2}x_2^2 &+ 2A_{2,3}x_2x_3 \\ &+ A_{3,3}x_3^2. \end{aligned}$$

L'équation qui détermine $U_1 = \int y_1^2 dm$, $U_2 = \int y_2 dm$, $U_3 = \int y_3 dm$ sera donc

$U = (A_{1,1} - u)(A_{2,2} - u)(A_{3,3} - u) - A_{2,3}^2(A_{1,1} - u) - A_{1,3}^2(A_{2,2} - u) - A_{1,2}^2(A_{3,3} - u) + 2A_{1,2}A_{1,3}A_{3,2} = 0$, et les neuf cosinus qui déterminent la position des axes principaux seront donnés, tant pour la valeur absolue que pour les signes, par les deux équations

$$a_{k,\alpha}^2 = -\frac{dU}{dA_{k,k}} : \frac{dU}{du}, \quad \frac{a_{k,\alpha}}{a_{3,\alpha}} = \frac{dU}{dA_{k,3}} : \frac{dU}{dA_{3,3}},$$

où il faudra faire $u = U_\alpha$; les nombres α et k prenant successivement les valeurs 1, 2 et 3.

Si l'on effectue les différentiations indiquées et, qu'en supposant les racines inégales on remplace $\frac{dU}{du}$ par un produit de différences des racines U_1, U_2, U_3, on aura

$$a^2_{1,1} = \frac{(A_{2,2} - U_1)(A_{3,3} - U_1) - A^2_{2,3}}{(U_1 - U_2)(U_1 - U_3)},$$
$$a^2_{2,1} = \frac{(A_{1,1} - U_1)(A_{3,3} - U_1) - A^2_{1,3}}{(U_1 - U_2)(U_1 - U_3)},$$
$$a^2_{3,1} = \frac{(A_{1,1} - U_1)(U_{2,2} - U_1) - A^2_{1,2}}{(U_1 - U_2)(U_1 - U_3)},$$

Pour avoir les valeurs de $a^2_{1,2}$, $a^2_{2,2}$, $a^2_{3,2}$, il faudra au numérateur changer U_1 en U_2 et prendre pour dénominateur le produit $(U_2 - U_1)$, $(U_2 - U_3)$.

Pour avoir les valeurs de $a^2_{1,3}$, $a^2_{2,3}$, $a^2_{3,3}$, il faudra au numérateur changer U_1 en U_3 et prendre le produit $(U_3 - U_1)(U_3 - U_2)$ pour dénominateur.

Quant aux signes, on prendra ceux des coefficients différentiels

$$\frac{dU}{dA_{1,3}}, \quad \frac{dU}{dA_{2,3}}, \quad \frac{dU}{dA_{3,3}},$$

où il faudra faire $u = U_1$ pour $a_{1,1}$, $a_{2,1}$, $a_{3,1}$; $u = U_2$ pour $a_{1,2}$, $a_{2,2}$, $a_{3,2}$; et $u = U_3$, pour $a_{1,3}$, $a_{2,3}$, $a_{3,3}$.

La discussion des formules précédentes ne présente aucune difficulté, elle a été trop souvent présentée pour qu'il soit nécessaire de la mettre ici. La conséquence qu'on en tire, c'est qu'en général il n'y a qu'un système d'axes principaux et qu'il y en a toujours un. Cependant pour le cas de deux racines égales (pour l'équation en u), il y a une infinité de systèmes ayant un axe commun, et enfin pour le cas des trois racines égales, tous les systèmes d'axes rectangulaires passant par l'origine donnée sont des axes principaux.

Il suffira d'ajouter ici que les formules précédentes ne diffèrent de celle du § II du mémoire de M. Poisson sur le mouvement d'un corps solide, que par un facteur supprimé aux deux termes des fractions qui représentent les neuf cosinus, qui fixent la position des axes principaux.

II.

Exemple de la seconde transformation.

Problème. *Trouver l'attraction qu'exercerait une planète sur un point matériel, si la masse de cette planète était distribuée sur les parties de son orbite, en raison du temps qu'elle met à les parcourir?*

Ce problème sera traité ici fort succinctement, mais il serait très facile de déduire de la solution les diverses formules que M. Gauss a exposées dans le mémoire où il s'occupe de la présente question. (*Determinatio attractionis*, etc......)

Solution. Soit a le grand axe de l'orbite, b le petit, et $a^2-b^2=a^2e^2$, de sorte que e soit l'excentricité, si l'on représente par θ l'anomalie excentrique, par T le temps de la révolution, et par $n=\frac{2\pi}{T}$ la vitesse moyenne angulaire de la planète, on aura $ndt=(1-e\cos\theta)d\theta$. La masse de la planète étant prise pour unité, la partie de cette masse qui serait distribuée sur le petit arc parcouru pendant l'instant dt sera

$$\frac{dt}{T}=\frac{ndt}{nT}=\frac{(1-e\cos\theta)\,d\theta}{2\pi}.$$

Si l'on prend le grand axe de l'ellipse pour axe des x, le petit axe pour celui des y, et la perpendiculaire menée par le centre au plan de l'orbite pour l'axe des z, les coordonnées d'un point de l'ellipse seront $x=a\cos\theta$, $y=b\sin\theta$. Par conséquent, si les coordonnées du point attiré sont A, B, C, la distance du point de l'ellipse dont les coordonnées sont $a\cos\theta$, $b\cos\theta$, o à ce point, sera donnée, en la représentant par r, par l'équation

$$r^2=(A-a\cos\theta)^2+(B-b\sin\theta)^2+C^2,$$

ou par

$$\begin{aligned} r^2 = a^2\cos^2\theta + 2\times o.\cos\theta\sin\theta &- 2Aa\cos\theta \\ + b^2\sin^2\theta &- 2Bb\sin\theta \\ &+ A^2+B^2+C^2. \end{aligned}$$

L'attraction de l'élément de l'orbite sur le point donné sera....

$\frac{(1-e\cos\theta)\,d\theta}{2\pi r^2}$ et ses composantes parallèlement aux trois axes seront

$$X = \frac{(A - a\cos\theta)\,(1 - e\cos\theta)d\theta}{2\pi r^3},$$
$$Y = \frac{(B - b\cos\theta)\,(1 - e\cos\theta)d\theta}{2\pi r^3},$$
$$Z = \frac{C(1 - e\cos\theta)\,d\theta}{2\pi r^3}.$$

Si l'on posait $V = \frac{(1 - e\cos\theta)\,d\theta}{2\pi r}$, il en résulterait $X = -\frac{dV}{dA}$, $Y = -\frac{dV}{dB}$, $Z = -\frac{dV}{dC}$, mais il vaut mieux traiter directement les quantités X, Y, Z.

Pour faciliter l'intégration il faut simplifier le radical, par conséquent en vertu de la valeur précédente de r^2, si l'on pose

$$\cos\theta = \cos\theta_1,\ \sin\theta = \cos\theta_2,\quad A_{1,1} = a^2,\ A_{1,2} = 0,\ A_{1,3} = A_{3,1} = -Aa$$
$$A_{2,2} = b^2,\ A_{2,3} = -A_{3,2},\ A_{3,3} = A^2 + B^2 + C^2.$$

on aura à simplifier l'expression

$$\begin{aligned} A_{1,1}\cos^2\theta_1 &+ 2A_{1,2}\cos\theta_1\cos\theta_2 + 2A_{1,3}\cos\theta_1 \\ &+ A_{2,2}\cos^2\theta_2 + 2A_{2,3}\cos\theta_2 \\ &+ A_{3,3}, \end{aligned}$$

par le moyen de la substitution

$$\cos\theta_1 = \frac{a_{1,1}\cos\varphi_1 + a_{1,2}\cos\varphi_2 + a_{1,3}}{a_{3,1}\cos\varphi_1 + a_{3,2}\cos\varphi_2 + a_{3,3}},$$
$$\cos\theta_2 = \frac{a_{2,1}\cos\varphi_1 + a_{2,2}\cos\varphi_2 + a_{2,3}}{a_{3,1}\cos\varphi_1 + a_{3,2}\cos\varphi_2 + a_{3,3}},$$

où l'on posera pour abréger,

$$\gamma = a_{3,1}\cos\varphi_1 + a_{3,2}\cos\varphi_2 + a_{3,3},$$

cette substitution réduira r^2 à la forme

$$[(U_1 - U_3)\cos^2\varphi_1 + (U_2 - U_3)\cos^2\varphi_2] : \gamma^2.$$

Les quantités U_1, U_2, U_3 étant les racines de l'équation

$$U=(A_{1,1}-u)(A_{2,2}-u)(A_{3,3}+u)-A_{2,3}^2(A_{1,1}-u)-A_{1,3}^2(A_{2,2}-u)$$
$$-A_{1,2}^2(A_{3,3}+u)+2A_{1,2}A_{1,3}A_{2,3}=0,$$

qui revient à

$$(a^2-u)(b^2-u)(A^2+B^2+C^2+u)-B^2b^2(a^2-u)-A^2a^2(b^2-u)=U=0.$$

ou bien encore à

$$u^3+(A^2+B^2+C^2-a^2-b^2)u^2+[a^2b^2-a^2(B^2+C^2)]u+a^2b^2C^2=0;$$

sous cette forme on reconnaît une équation qui se présente dans le calcul de l'attraction d'un ellipsoïde sur un point extérieur, au moyen du théorème de M. Ivory.

La première forme de l'équation en u, montre que les trois racines sont réelles; en effet si l'on pose

$u=$................	a^2,	b^2,	0,	$-\infty$,
U prendra les signes...	$+$,	$-$,	$+$,	$-$.

Il aura donc trois racines réelles et inégales, sauf certains cas, où quelques-uns des nombres a^2, b^2, 0 deviendraient racines. Il pourrait alors y avoir deux racines égales à b^2, ou deux racines égales à zéro. Le premier cas se présente pour $B=0$ et $A^2b^2-a^2e^2C^2=a^2b^2e^2$, c'est-à-dire pour une suite de points formant une hyperbole dont les sommets sont les foyers de l'ellipse et dont le second axe est égal au petit axe de l'ellipse. Pour ce cas $(U_1-U_3)\cos^2\varphi_1+(U_2-U_3)\cos^2\varphi_2=U_1-U_3$, l'irrationalité disparaît et l'intégration ne présente aucune difficulté. Le second cas ne peut se présenter que quand le point attiré est sur l'ellipse : il doit par conséquent être mis de côté.

Pour le cas général, ou des trois racines inégales, on prendra les deux racines positives pour U_1 et U_2, l'on supposera $U_1>U_2$, la racine négative sera représentée par U_3. Au moyen des formules (32) et (33) modifiées convenablement, on déterminera les neuf coefficients de la substitution. Cela étant fait, soit en posant

$$\cos\theta_1=\cos\theta,\quad \cos\theta_2=\sin\theta,\quad \cos\varphi_1=\cos\varphi,\quad \cos\varphi_2=\sin\varphi,$$
$$\gamma=a_{3,1}\cos\varphi+a_{3,2}\sin\varphi+a_{3,3},$$
$$\gamma\cos\theta=a_{1,1}\cos\varphi+a_{1,2}\sin\varphi+a_{1,3},$$
$$\gamma\sin\theta=a_{2,1}\cos\varphi+a_{2,2}\sin\varphi+a_{2,3}.$$

Différentiant les deux dernières et éliminant dv il vient

$$vd\theta = [\cos\theta(-a_{2,1}\sin\varphi + a_{2,2}\cos\varphi) - \sin\theta(-a_{1,1}\sin\varphi + a_{1,2}\cos\varphi)]d\varphi,$$

multipliant par v et réduisant, on a

$$v^2d\theta = [(a_{2,2}a_{1,3} - a_{2,3}a_{1,2})\cos\varphi + (a_{1,1}a_{2,3} - a_{1,3}a_{2,1})\sin\varphi + (a_{1,1}a_{2,2} - a_{2,1}a_{1,2})]d\varphi;$$

mais ici l'on a

$$\begin{aligned} y_1 &= a_{1,1}x_1 + a_{2,1}x_2 - a_{3,1}x_3, \\ y_2 &= a_{1,2}x_1 + a_{2,2}x_2 - a_{3,2}x_3, \\ -y_3 &= a_{1,3}x_1 + a_{2,3}x_2 - a_{3,3}x_3; \end{aligned}$$

tirant de là la valeur de x_3 et la comparant à

$$x_3 = a_{0,1}y_1 + a_{3,2}\,y_2 + a_{3,3}y_3,$$

on trouvera en écrivant, pour abréger,

$$E = -a_{3,1}(a_{2,2}a_{1,3} - a_{2,3}a_{1,2}) - a_{1,2}(a_{1,1}a_{2,3} - a_{2,1}a_{1,3}) + a_{3,3}(a_{1,1}a_{2,2} - a_{2,1}a_{2,1}),$$

l'équation

$$Ex_3 = (a_{2,2}a_{1,3} - a_{2,3}a_{1,2})y_1 + (a_{1,1}a_{2,3} - a_{1,3}a_{1,1})\,y_2 + (a_{1,1}a_{2,2} - a_{2,1}a_{1,2})y_3,$$

et par suite

$$Ea_{3,1} = (a_{2,2}a_{1,3} - a_{2,3}a_{1,2}),\ Ea_{3,2} = (a_{1,1}a_{2,3} - a_{1,3}a_{2,1}),\ Ea_{3,3} = (a_{1,1}a_{2,2} - a_{2,1}a_{1,2});$$

par conséquent,

$$v^2d\theta = E(a_{3,1}\cos\varphi + a_{3,2}\sin\varphi + a_{3,3})\,d\varphi, \quad \text{ou} \quad vd\theta = Ed\varphi.$$

Quant à E, on vérifiera très facilement que sa valeur est $+1$ ou -1, c'est-à-dire que l'on a $E^2 = 1$ en vertu des relations qui existent entre les coefficients de la substitution.

Les quantités $A - a\cos\theta$, $B - b\sin\theta$, $1 - e\cos\theta$, par la substitution des valeurs de $\cos\theta$ et $\sin\theta$ se réduisent à

$$(L\cos\varphi + M\sin\varphi + N) : v, (L\cos\varphi + M'\sin\varphi + N') : v(L''\cos\varphi + M''\sin\varphi + N'') : V;$$

d'où il résulte

$$X = E(L\cos\varphi + M\sin\varphi + N)(L''\cos\varphi + M''\sin\varphi + N'')d\varphi : 2\pi[(U_1 - U_3)\cos^2\varphi + (U_2 - U_3)\sin^2\varphi]^{\frac{3}{2}},$$
$$Y = E(L'\cos\varphi + M'\sin\varphi + N')(L''\cos\varphi + M''\sin\varphi + N'')d\varphi : \quad \textit{idem},$$
$$Z = CE(a_3\cos\varphi + a_{3,2}\sin\varphi + a_{3,3})(L''\cos\varphi + M''\sin\varphi + N'')d\varphi : \quad \textit{idem}.$$

Si l'on observe que les intégrales

$$\int \frac{\sin\varphi d\varphi}{2\pi[(U_1 - U_3)\cos^2\varphi + (U_2 - U_3)\sin^2\varphi]^{\frac{3}{2}}}, \quad \int \frac{\cos\varphi d\varphi}{\textit{idem}}, \quad \int \frac{\sin\varphi \cos\varphi d\varphi}{\textit{idem}}$$

sont nulles quand on les prend depuis $\varphi = 0$, jusqu'à $\varphi = 360°$, ce qu'il faut faire ici; il suffira dans les numérateurs de X, Y et Z de conserver les termes renfermant $\cos^2\varphi$, $\sin^2\varphi$ et ceux indépendants de φ. Si donc l'on pose

$$P = \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2\varphi d\varphi}{2\pi[(U_1 - U_3)\cos^2\varphi + (U_2 - U_3)\sin^2\varphi]^{\frac{3}{2}}},$$
$$Q = \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2\varphi d\varphi}{2\pi[(U_1 - U_3)\cos^2\varphi + (U_2 - U_3)\sin^2\varphi]^{\frac{3}{2}}},$$

on aura entre les mêmes limites

$$EX = (LL'' + NN'')P + (MM'' + NN'')Q,$$
$$EY = (L'L'' + N'N'')P + (M'M'' + N'N'')Q,$$
$$EZ = (a_{3,1}L'' + a_{3,3}N'')CP + (a_{3,2}M'' + a_{3,3}N'')CQ.$$

Quant aux intégrales P et Q, elles se ramènent, ainsi qu'il suit, aux fonctions elliptiques.

La quantité $(U_1 - U_3)\cos^2\varphi + (U_2 - U_3)\sin^2\varphi$ peut s'écrire.... $(U_1 - U_3) - (U_1 - U_2)\sin^2\varphi$; si l'on pose $U_1 - U_3 = m^2$, $\frac{U_1 - U_2}{U_1 - U_3} = c^2$, l'on aura

$$P = \frac{1}{2\pi m^3}\int \frac{\cos^2\varphi d\varphi}{(1 - c^2\sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}}, \quad Q = \frac{1}{2\pi m^3}\int \frac{\sin^2\varphi d\varphi}{(1 - c^2\sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}},$$

or l'intégration par parties donne

$$\int \frac{\sin^2\varphi d\varphi}{\sqrt{1 - c^2\sin^2\varphi}} = -\frac{\sin\varphi\cos^2\varphi}{\sqrt{1 - c^2\sin^2\varphi}} + \int \frac{\cos^2\varphi d\varphi}{(1 - c^2\sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}},$$
$$\int \frac{\cos^2\varphi d\varphi}{\sqrt{1 - c^2\sin^2\varphi}} = -\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\sqrt{1 - c^2\sin^2\varphi}} + (1 - c^2)\int \frac{\sin^2\varphi d\varphi}{(1 - c^2\sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}}.$$

Si l'on représente les premiers membres de ces équations par P_1 et Q_1, on trouvera d'abord

$$P_1 + Q_1 = \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-c^2\sin^2\varphi}} = F(c,\ \varphi),$$

puis

$$\int \frac{c^2\sin^2\varphi d\varphi}{\sqrt{1-c^2\sin^2\varphi}} = \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-c^2\sin^2\varphi}} - \int d\varphi\sqrt{1-c^2\sin^2\varphi} = F(c,\varphi) - E(c,\varphi);$$

de là résulte

$$P_1 = \int \frac{\sin^2\varphi d\varphi}{\sqrt{1-c^2\sin^2\varphi}} = \frac{1}{c^2}F(c,\ \varphi) - \frac{1}{c^2}E(c,\ \varphi),$$

$$Q_1 = \int \frac{\cos^2\varphi d\varphi}{\sqrt{1-c^2\sin^2\varphi}} = \frac{1}{c^2}E(c,\ \varphi) - \left(\frac{1-c^2}{c^2}\right)F(c,\ \varphi),$$

et par conséquent

$$2c^2\pi m^3 P = \int \frac{\cos^2\varphi d\varphi}{(1-c^2\sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}} = F(c,\ \varphi) - \frac{1}{p}E(c,\varphi) + \frac{c^2\sin\varphi\cos\varphi}{\sqrt{1-c^2\sin^2\varphi}},$$

$$2c^2\pi m^3 Q = \int \frac{\sin^2\varphi d\varphi}{(1-c^2\sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{1-c^2}E(c,\varphi) - F(c,\varphi) - \frac{c^2\sin\varphi\cos\varphi}{(1-c^2)\sqrt{1-c^2\sin^2\varphi}}.$$

on aura donc entre les limites o et 360°

$$c^2\pi m^3 P = 2[F(c) - E(c)],$$

$$c^2\pi m^3 Q = 2\left[\frac{1}{1-c^2}E(c) - F(c)\right],$$

conformément à la notation des fonctions elliptiques.

Recherches sur les moyens de reconnaître si un Problème de Géométrie peut se résoudre avec la règle et le compas;

PAR M. L. WANTZEL,

Élève-Ingénieur des Ponts-et-Chaussées.

I.

Supposons qu'un problème de Géométrie puisse être résolu par des intersections de lignes droites et de circonférences de cercle : si l'on joint les points ainsi obtenus avec les centres des cercles et avec les points qui déterminent les droites on formera un enchaînement de triangles rectilignes dont les éléments pourront être calculés par les formules de la Trigonométrie; d'ailleurs ces formules sont des équations algébriques qui ne renferment les côtés et les lignes trigonométriques des angles qu'au premier et au second degré; ainsi l'inconnue principale du problème s'obtiendra par la résolution d'une série d'équations du second degré dont les coefficients seront fonctions rationnelles des données de la question et des racines des équations précédentes. D'après cela, pour reconnaître si la construction d'un problème de Géométrie peut s'effectuer avec la règle et le compas, il faut chercher s'il est possible de faire dépendre les racines de l'équation à laquelle il conduit de celles d'un système d'équations du second degré composées comme on vient de l'indiquer. Nous traiterons seulement ici le cas où l'équation du problème est algébrique.

II.

Considérons la suite d'équations :

$$(\mathrm{A})\left\{\begin{array}{l} x_1^2+\mathrm{A}x_1+\mathrm{B}=0,\quad x_2^2+\mathrm{A}_1x_2+\mathrm{B}_1=0\ldots x_{n-1}^2+\mathrm{A}_{n-2}x_{n-1}+\mathrm{B}_{n-2}=0,\\ \qquad\qquad x_n^2+\mathrm{A}_{n-1}x_n+\mathrm{B}_{n-1}=0,\end{array}\right.$$

dans lesquelles A et B représentent des fonctions rationnelles des quantités données $p, q, r\ldots$; A_1 et B_1 des fonctions rationnelles de $x_1, p, q,\ldots$; et, en général, A_m et B_m des fonctions rationnelles de $x_m, x_{m-1}\ldots x_1, p, q\ldots$.

Toute fonction rationnelle de x_m telle que A_m ou B_m, prend la forme $\frac{\mathrm{C}_{m-1}x_m+\mathrm{D}_{m-1}}{\mathrm{E}_{m-1}x_m+\mathrm{F}_{m-1}}$ si l'on élimine les puissances de x_m supérieures à la pre-

mière au moyen de l'équation $x_m^2+a_{m-1}\,x_m+B_{m-1}=0$, en désignant par C_{m-1}, D_{m-1}, E_{m-1}, F_{m-1} des fonctions rationnelles de $x_{m-1},\ldots x_1$, p, $q\ldots$; elle se ramènera ensuite à la forme $A'_{m-1}x_m+B'_{m-1}$ en multipliant les deux termes de $\frac{C_{m-1}x_m+D_{m-1}}{E_{m-1}x_m+F_{m-1}}$ par $-E_{m-1}(A_{m-1}+D_m)+F_{m-1}$.

Multiplions l'une par l'autre les deux valeurs que prend le premier membre de la dernière des équations (A) lorsqu'on met successivement à la place de x_{n-1} dans A_{n-1} et B_{n-1} les deux racines de l'équation précédente : nous aurons un polynome du quatrième degré en x_n dont les coefficients s'exprimeront en fonction rationnelle de $x_{n-2}\ldots x_1$, p, $q,\ldots$; remplaçons de même successivement dans ce polynome x_{n-2} par les deux racines de l'équation correspondante, nous obtiendrons deux résultats dont le produit sera un polynome en x_n de degré 2^3, à coefficient rationnel par rapport à $x_{n-3}\ldots x_1$, p, $q\ldots$; et, en continuant de la même manière, nous arriverons à un polynome en x_n de degré 2^n dont les coefficients seront des fonctions rationnelles de p, q, $r\ldots$. Ce polynome égalé à zéro donnera l'équation finale $f(x_n)=0$ ou $f(x)=0$, qui renferme toutes les solutions de la question. On peut toujours supposer qu'avant de faire le calcul on a réduit les équations (A) au plus petit nombre possible. Alors une quelconque d'entre elles $x_{m+1}^2+A_m x_{m+1}+B_m=0$, ne peut pas être satisfaite par une fonction rationnelle des quantités données et des racines des équations précédentes. Car, s'il en était ainsi, le résultat de la substitution serait une fonction rationnelle de $x_m,\ldots x_1$, p, $q\ldots$ qu'on peut mettre sous la forme $A'_{m-1}x_m+B'_{m-1}$ et l'on aurait $A'_{m-1}x_m+B'_{m-1}=0$; on tirerait de cette relation une valeur rationnelle de x_m qui substituée dans l'équation du second degré en x_m conduirait à un résultat de la forme $A'_{m-2}x_{m-1}+B'_{m-2}=0$. En continuant ainsi, on arriverait à $A'x_1+B'=0$, c'est-à-dire que l'équation $x_1^2+Ax_1+B=0$ aurait pour racines des fonctions rationnelles de p, $q\ldots$; le système des équations (A) pourrait donc être remplacé par deux systèmes de $n-1$ équations du second degré, indépendants l'un de l'autre, ce qui est contre la supposition. Si l'une des relations intermédiaires $A'_{m-2}x_{m-1}+B'_{m-2}=0$, par exemple, était satisfaite identiquement, les deux racines de l'équation $x_{m-1}^2+A_{m-1}x_m+B_{m-2}=0$ seraient des fonctions rationnelles de $x_{m-1},\ldots x_1$, pour toutes les valeurs que peuvent prendre ces quantités, en sorte qu'on pourrait supprimer l'équation en x_m et remplacer la racine successivement par ses deux valeurs dans les équations sui-

vantes, ce qui ramènerait encore le système des équations (A) à deux systèmes de $n-1$ équations.

III.

Cela posé, l'*équation du degré* 2^n, $f(x)=0$, *qui donne toutes les solutions d'un problème susceptible d'être résolu au moyen de n équations du second degré, est nécessairement irréductible*, c'est-à-dire qu'elle ne peut avoir de racines communes avec une équation de degré moindre dont les coefficients soient des fonctions rationnelles des données $p, q \ldots.$

En effet, supposons qu'une équation $F(x)=0$, à coefficients rationnels soit satisfaite par une racine de l'équation $x_n^2+A_{n-1}x_n+B_{n-1}=0$, en attribuant certaines valeurs convenables aux quantités x_{n-1}, $x_{n-2} \ldots . x_1$. La fonction rationnelle $F(x_n)$ d'une racine de cette dernière équation peut se ramener à la forme $A'_{n-1}x_n+B'_{n-1}$, en désignant toujours par A'_{n-1} et B'_{n-1} des fonctions rationnelles de $x_{n-1} \ldots x_1$, p, $q \ldots$; de même A'_{n-1} et B'_{n-1} peuvent prendre l'un et l'autre la forme $A'_{n-2}x_{n-1}+B'_{n-1}$, et ainsi de suite; on arrivera ainsi à $A'_1x_2+B'_1$ où A'_1 et B'_1 peuvent être mis sous la forme $A'x_1+B'$ dans laquelle A' et B' représentent des fonctions rationnelles des données $p, q \ldots$. Puisque $F(x_n)=0$ pour une des valeurs de x_n, on aura $A'_{n-1}x_n+B'_{n-1}=0$, et il faudra que A'_{n-1} et B'_{n-1} soient nuls séparément, sans quoi l'équation $x_n^2+A_{n-1}x_n+B_{n-1}=0$ serait satisfaite pour la valeur $-\frac{B'_{n-1}}{A'_{n-1}}$ qui est une fonction rationnelle de.. $x_{n-1}, \ldots x_1, p, q \ldots$, ce qui est impossible; de même, A'_{n-1} et B'_{n-1} étant nuls, A'_{n-2} et B'_{n-2} le seront aussi et ainsi de suite jusqu'à A' et B' qui seront nuls identiquement, puisqu'ils ne renferment que des quantités données. Mais alors A'_1 et B'_1, qui prennent également la forme $A'x_1+B'$ quand on met pour x_1 chacune des racines de l'équation $x_1^2+Ax_1+B=0$, s'annuleront pour ces deux valeurs de x_1; pareillement, les coefficients A'_2 et B'_2 peuvent être mis sous la forme $A'_1x_2+B'_1$ en prenant pour x_2 l'une ou l'autre des racines de l'équation $x_2^2+A_1x_2+B_1=0$, correspondantes à chacune des valeurs de x_1, et par conséquent ils s'annulleront pour les quatre valeurs de x_2 et pour les deux valeurs de x_1 qui résultent de la combinaison des deux premières équations (A). On démontrera de même que A'_3 et B'_3 seront nuls en mettant pour x_3 les 2^3 valeurs tirées des trois premières équations (A) conjointement avec les valeurs correspondantes de x_2 et x_1;

et continuant de cette manière on conclura que $F(x_n)$ s'annulera pour les 2^n valeurs de x_n auxquelles conduit le système de toutes les équations (A) ou pour les 2^n racines de $f(x)=0$. Ainsi une équation $F(x)=0$ à coefficients rationnels ne peut admettre une racine de $f(x)=0$ sans les admettre toutes; donc l'équation $f(x)=0$ est irréductible.

IV.

Il résulte immédiatement du théorème précédent que tout problème qui conduit à une équation irréductible dont le degré n'est pas une puissance de 2, ne peut être résolu avec la ligne droite et le cercle. Ainsi *la duplication du cube*, qui dépend de l'équation $x^3-2a^3=0$ toujours irréductible, ne peut être obtenue par la Géométrie élémentaire. Le problème *des deux moyennes proportionnelles*, qui conduit à l'équation $x^3-a^2b=0$ est dans le même cas toutes les fois que le rapport de b à a n'est pas un cube. La *trisection de l'angle* dépend de l'équation $x^3-\frac{3}{4}x+\frac{1}{4}a=0$; cette équation est irréductible si elle n'a pas de racine qui soit une fonction rationnelle de a et c'est ce qui arrive tant que a reste algébrique; ainsi le problème ne peut être résolu en général avec la règle et le compas. Il nous semble qu'il n'avait pas encore été démontré rigoureusement que ces problèmes, si célèbres chez les anciens, ne fussent pas susceptibles d'une solution par les constructions géométriques auxquelles ils s'attachaient particulièrement.

La division de la circonférence en parties égales peut toujours se ramener à la résolution de l'équation $x^m-1=0$, dans laquelle m est un nombre premier ou une puissance d'un nombre premier. Lorsque m est premier, l'équation $\frac{x^m-1}{x-1}=0$ du degré $m-1$ est irréductible, comme M. Gauss l'a fait voir dans ses *Disquisitiones arithmeticæ*, section VII; ainsi la division ne peut être effectuée par des constructions géométriques que si $m-1=2^n$. Quand m est de la forme a^α, on peut prouver, en modifiant légèrement la démonstration de M. Gauss que l'équation de degré $(a-1)a^{\alpha-1}$, obtenue en égalant à zéro le quotient de $x^{a^\alpha}-1$ par $x^{a^{\alpha-1}}-1$, est irréductible; il faudrait donc que $(a-1)a^{\alpha-1}$ fût de la forme 2^n en même temps que $a-1$, ce qui est impossible à moins que $a=2$. Ainsi, *la division de la circonférence en* N *parties ne peut être effectuée avec la règle et le compas que si les facteurs premiers de* N *différents de 2 sont de la forme* 2^n+1 *et s'ils entrent seulement à la première puissance dans ce nombre.* Ce

principe est annoncé par M. Gauss à la fin de son ouvrage, mais il n'en a pas donné la démonstration.

Si l'on pose $x = k + A'\sqrt[m']{a'} + A''\sqrt[m'']{a''} +$ etc. $m', m''\ldots$ étant des puissances de 2, et k, A', $A''\ldots a', a''\ldots$ des nombres commensurables, la valeur de x se construira par la ligne droite et le cercle, en sorte que x ne peut être racine d'une équation irréductible d'un degré m qui ne soit pas une puissance de 2. Par exemple, on ne peut avoir, $x = A\sqrt[m]{a}$, si $(\sqrt[m]{a})^p$ est irrationnel pour $p < m$; on démontrerait facilement que x ne peut prendre cette valeur lors même que m serait une puissance de 2. Nous retrouvons ainsi plusieurs cas particuliers des théorèmes sur les nombres incommensurables que nous avons établis ailleurs (*).

V.

Supposons qu'un problème ait conduit à une équation de degré 2^n, $F(x) = o$ et qu'on se soit assuré que cette équation est irréductible; il s'agit de reconnaître si la solution peut s'obtenir au moyen d'une série d'équations du second degré.

Reprenons les équations (A) :

$$(A)\quad \begin{cases} x_1^2 + Ax_1 + B = o, \quad x_2^2 + A_1x_2 + B_1 = o\ldots, \\ x_{n-1}^2 + A_{n-2}x_{n-1} + B_{n-2} = o, \quad x_n^2 + A_{n-1}x_n + B_{n-1} = o. \end{cases}$$

Il faudra construire l'équation $f(x) = o$, à coefficients rationnels, qui donne toutes les valeurs de x_n et l'identifier avec l'équation donnée $F(x) = o$. Pour faire ce calcul on remarque que A_{n-1} et B_{n-1} se ramènent à la forme $a_{n-1}x_{n-1} + a'_{n-1}$ et $b_{n-1}x_{n-1} + b'_{n-1}$, en sorte que l'élimination de x_{n-1} entre les deux dernières équations (A) se fait immédiatement, ce qui donne une équation du quatrième degré en x_n; on y remplacera ensuite a_{n-1} par $a''_{n-1}x_{n-2} + a'''_{n-1}$, a'_{n-1} par $a^{\text{iv}}_{n-1}x_{n-2} + a^{\text{v}}$, b_{n-1} par $b''_{n-1}x_{n-2} + b'''_{n-1}$, b'_{n-1} par $b^{\text{iv}}_{n-1}x_{n-2} + b^{\text{v}}_{n-1}$ et A_{n-2}, B_{n-1} par $a_{n-2}x_{n-2} + a'_{n-2}$, $b_{n-2}x_{n-2} + b'_{n-2}$, puis on éliminera x_{n-2} entre l'équation du 4^e degré déjà obtenue et l'équation $x_{n-2}^2 + A_{n-3}x_{n-2} + B_{n-3} = o$; et ainsi de suite. Les derniers termes des séries $a_{n-1}, a'_{n-1}, a''_{n-1}\ldots\ldots$, $b_{n-1}, b'_{n-1}\ldots$, etc., doivent être des fonctions rationnelles des coefficients de $F(x) = o$; si l'on peut leur assigner des valeurs rationnelles qui satisfassent aux équations de condition obtenues en identifiant, on reproduira les équations (A) dont le système équivaut à l'équation

(*) *Journal de l'École Polytechnique*, Cahier XXVI.

$F(x)=0$; si les conditions ne peuvent être vérifiées en donnant des valeurs rationnelles aux indéterminées introduites, le problème ne peut être ramené au second degré.

On peut simplifier ce procédé, en supposant que les racines de chacune des équations (A) donnent le dernier terme de la suivante; ainsi, l'on peut prendre B_{n-1} pour l'inconnue de l'avant-dernière équation, puisque $B_{n-1}=b_{n-1}x_{n-1}+b'_{n-1}$ d'où $x_{n-1}=\frac{B_{n-1}-b'_{n-1}}{b_{n-1}}$; de cette manière les éliminations se font plus rapidement et l'on introduit quatre quantités indéterminées dans l'équation du quatrième degré qui résulte de la première élimination, huit dans l'équation du huitième degré, etc., en sorte que les conditions obtenues en identifiant, sont en même nombre que les quantités à déterminer. Mais on écarte aussi à l'avance le cas où l'une des quantités telle que b_{n-1} serait nulle, et il faut étudier ce cas séparément.

Soit, par exemple, l'équation $x^4+px^2+qx+r=0$. Prenons de suite les équations du second degré sous la forme $x_1^2+Ax_1+B=0$, et $x^2+(ax_1+a')x+x_1=0$; en éliminant x_1 et identifiant, on aura,

$$2a_1-Aa=0,\quad a'^2-Aaa'-A+a^2B=p,\quad 2aB-a'A=q,\quad B=r,$$

d'où

$$B=r,\quad a=\frac{2q}{4r-A^2},\quad a'=\frac{Aq}{4r-A^2},\quad A^3+pA^2-4rA+q^2-4rp=0.$$

Comme B, a et a' sont exprimés rationnellement au moyen de A, p, q, r, il faut et il suffit que l'équation du troisième degré en A ait pour racine une fonction rationnelle des données. La condition est toujours satisfaite quand $q=0$, quels que soient p et r, car $A=-p$ satisfait alors à la dernière équation.

En prenant x_1 pour dernier terme de la deuxième équation du second degré, on a exclu le cas où ce terme serait indépendant de la racine de la première équation; mais en le traitant directement, on ne trouve aucune solution de la question qui ne soit comprise dans les équations ci-dessus.

Ainsi, par un calcul plus ou moins long, on pourra toujours s'assurer si un problème donné est susceptible d'être résolu au moyen d'une série d'équations du second degré, pourvu qu'on sache reconnaître si une équation peut être satisfaite par une fonction rationnelle des données, et si elle est irréductible. Une équation de degré n sera irréductible lorsqu'en cherchant les diviseurs de son premier

membre de degrés $1, 2 \ldots \frac{n}{2}$, on n'en trouve aucun dont les coefficients soient fonctions rationnelles des quantités données.

La question peut donc toujours être ramenée à rechercher si une équation algébrique $F(x) = 0$ à une seule inconnue peut avoir pour racine une fonction de ce genre. Pour cela, il y a plusieurs cas à considérer. 1° Si les coefficients ne dépendent que de nombres donnés entiers ou fractionnaires, il suffira d'appliquer la méthode des racines commensurables. 2° Il peut arriver que les données représentées par les lettres p, q, r soient susceptibles de prendre une infinité de valeurs, sans que la condition cesse d'être remplie, comme quand elles désignent plusieurs lignes prises arbitrairement; alors, après avoir ramené l'équation $F(x)=0$ à une forme telle que ses coefficients soient des fractions entières de p, q, $r \ldots$, et que celui du premier terme soit l'unité, on remplacera x par $a_m p^m - a_{m-1} p^{m-1} + \ldots + a_0$, et l'on égalera à zéro les coefficients des différentes puissances dans le résultat; les équations obtenues en a^m, $a_{m-1}, \ldots$ seront traitées comme l'équation en x, c'est-à-dire qu'on y remplacera ces quantités par des fonctions entières de q, et ainsi de suite jusqu'à ce qu'ayant épuisé toutes les lettres on soit arrivé à des équations numériques qui rentreront dans le premier cas. 3° Lorsque les données sont des nombres irrationnels, ils doivent être racines d'équations algébriques qu'on peut supposer irréductibles; dans ce cas, si l'on remplace x par $a_m p^m + \ldots + a_0$ dans $F(x) = 0$, le premier membre de l'équation en p, ainsi obtenue, devra être divisible par celui de l'équation irréductible dont le nombre p est racine; en exprimant que cette division se fait exactement, on arrivera à des équations en a_m, $a_{m-1}, \ldots$, que l'on traitera comme l'équation $F(x) = 0$, jusqu'à ce que l'on parvienne à des équations numériques. On doit remarquer que m peut toujours être pris inférieur au degré de l'équation qui donne p.

Ces procédés sont d'une application pénible en général, mais on peut les simplifier et obtenir des résultats plus précis dans certains cas très étendus, que nous étudierons spécialement.

SOLUTION

D'un problème de Probabilité;

PAR M. POISSON.

Ayant été chargé, cette année, du cours de Calcul des Probabilités qui se fait à la Faculté des Sciences, j'ai donné, dans ce cours, les solutions de plusieurs problèmes, parmi lesquelles je citerai la suivante, à cause des résultats curieux, et que je ne crois pas connus, auxquels elle conduit.

Trois joueurs A, B, C, jouent, deux à deux, une suite de coups; chaque nouveau coup est joué par le joueur qui a gagné le coup précédent, avec celui qui n'y a pas joué : le sort désigne les deux joueurs qui jouent au premier coup. La partie est finie, quand un des trois joueurs a gagné consécutivement les deux autres, ou deux coups de suite; et c'est ce joueur qui a gagné la partie. On demande de déterminer, pour les trois joueurs, les probabilités de gagner la partie, d'après les chances qu'ils ont de gagner à chaque coup, et selon que le sort les a désignés pour jouer ou pour ne pas jouer au premier coup.

Lorsque A et B jouent l'un contre l'autre, je représente par γ la chance de A pour gagner le coup et, conséquemment, par $1-\gamma$ celle de B. Lorsque ce sont C et A qui jouent ensemble, je représente de même par $\mathcal{C}$ la chance de C et par $1-\mathcal{C}$ celle de A. Enfin, quand le coup se joue entre B et C, je désigne par α la chance de B et par $1-\alpha$ celle de C.

Je suppose que le premier coup soit joué entre A et B, et gagné par A. Il est facile de voir que, n étant un nombre entier quelconque, et tant que la partie ne sera pas finie, tous les coups dont le rang est

marqué par un nombre de la forme $3n-2$, seront joués entre A et B, et gagnés par A; tous ceux dont le rang est marqué par un nombre de la forme $3n-1$, seront joués entre C et A, et gagnés par C; et tous ceux dont le rang est marqué par un nombre de la forme $3n$, seront joués entre B et C, et gagnés par B.

J'appelle x_{3n-2} la probabilité que la partie ne sera pas encore terminée, au coup dont le rang est $3n-2$, et x'_{3n-2} la probabilité qu'elle se terminera précisément à ce coup. Je désigne de même par y_{3n-1} la probabilité que la partie ne se terminera pas dans les $3n-1$ premiers coups, et par y'_{3n-1} la probabilité qu'elle finira au dernier de ces coups. Enfin, soient z_{3n} la probabilité que la partie ne sera pas terminée dans les $3n$ premiers coups, et z'_{3n} la probabilité qu'elle finira seulement au coup dont le rang est $3n$.

Ces diverses notations, les rangs des coups auxquels elles répondent, les joueurs qui jouent à chacun de ces coups, et leurs chances de gagner, seront faciles à se représenter par ce tableau :

$3n-2$,	$3n-1$,	$3n$,
x_{3n-2},	y_{3n-1},	z_{3n},
x'_{3n-2},	y'_{3n-1},	z'_{3n},
A et B,	C et A,	B et C,
γ et $1-\gamma$.	β et $1-\beta$.	α et $1-\alpha$.

Les valeurs des quantités α, β, γ, sont données, et peuvent s'étendre depuis zéro jusqu'à l'unité. Elles seront toutes trois égales à $\frac{1}{2}$, lorsque les trois joueurs seront d'égale force. Elles pourront être toutes trois plus grandes que $\frac{1}{2}$: ce cas aura lieu, quand A jouant contre B sera le plus fort; que C jouant contre A sera aussi le plus fort; que B jouant contre C sera encore le plus fort, ce qui n'est point incompatible avec les deux premières suppositions. Concevons, par exemple, que l'on ait trois urnes A′, B′, C′, contenant des boules blanches et des boules noires, et dont chacune renferme plus de boules de la première couleur que de la seconde. Supposons aussi que le jeu entre A et B, consiste à tirer une boule de C′, et que A gagne, si cette

boule est blanche; qu'ensuite, le jeu entre C et A consiste à tirer une boule de B′, et que la chance favorable à C soit l'arrivée d'une boule blanche; et qu'enfin, le jeu entre B et C soit de tirer une boule de A′, qui fera gagner B, quand elle sera blanche : dans ce cas, on aura

$$\gamma > \tfrac{1}{2},\quad \beta > \tfrac{1}{2},\quad \alpha > \tfrac{1}{2}.$$

Il pourra arriver que l'unité ou zéro soit la valeur de l'une de ces quantités α, β, γ, de deux d'entre elles, ou de toutes trois : le cas de $\gamma = 1$, $\beta = 1$, $\alpha = 1$, par exemple, sera celui où A sera certain de gagner B, C de gagner A, et B de gagner C.

Cela posé, pour que la partie ne soit pas finie, au coup dont le rang est $3n+1$ ou $3(n+1)-2$, joué entre A et B, il faut, et il suffit 1°. qu'elle ne le soit pas au coup précédent, joué entre B et C, et gagné par B; 2°. que le coup dont le rang est $3n+1$ soit gagné par A. La probabilité x_{3n+1} de la partie non terminée à ce coup, sera donc le produit de la probabilité γ qu'il sera gagné par A, et de la probabilité z_{3n} que la partie ne sera pas finie au coup dont le rang est $3n$, de sorte que l'on aura

$$x_{3n+1} = \gamma z_{3n}.$$

On trouvera de même

$$x'_{3n+1} = (1-\gamma) z_{3n};$$

car pour que la partie finisse précisément au coup dont le rang est $3n+1$, il faudra et il suffira qu'elle ne soit pas terminée au coup précédent, et que le joueur B qui aura gagné celui-ci et dont $1-\gamma$ est la chance de gagner A au coup dont le rang est $3n+1$, gagne effectivement ce second coup. Par un raisonnement semblable, appliqué successivement aux coups dont les rangs sont $3n$ et $3n-1$, on obtiendra ces deux autres couples d'équations

$$z_{3n} = \alpha y_{3n-1},\quad z'_{3n} = (1-\alpha) y_{3n-1},$$
$$y_{3n-1} = \beta x_{3n-2},\quad y'_{3n-1} = (1-\beta) x_{3n-2},$$

qui se déduisent d'ailleurs du couple précédent, par de simples changements de lettres.

On tire de ces équations

$$x_{3n+1} z_{3n} y_{3n-1} = \alpha\beta\gamma z_{3n} y_{3n-1} x_{3n-2};$$

et en faisant, pour abréger,

$$\alpha\beta\gamma = k,$$

il en résulte

$$x_{3n+1} = k x_{3n-2};$$

équation aux différences finies, dont l'intégrale se trouve en y mettant successivement $1, 2, 3, \ldots n-1$, à la place de n, multipliant membre à membre les $n-1$ équations qui s'obtiendront de cette manière, et réduisant; ce qui donne

$$x_{3n-2} = k^{n-1} x_1.$$

Le facteur x_1 est la constante arbitraire; au premier coup, ou quand $n=1$, il est certain que la partie n'est pas terminée; on a donc $x_{3.1-2} = x_1 = 1$; et de là, et des équations précédentes, on conclut ces valeurs

$$x_{3n-2} = k^{n-1}, \quad y_{3n-1} = \beta k^{n-1}, \quad z_{3n} = \alpha\beta k^{n-1},$$
$$y'_{3n-1} = (1-\beta) k^{n-1}, \quad z'_{3n} = (1-\alpha)\beta k^{n-1}, \quad x'_{3n+1} = (1-\gamma)\beta\alpha k^{n-1}.$$

Ces résultats se vérifieront facilement dans les cas extrêmes où l'une des quantités α, β, γ, sera zéro ou l'unité. Si, par exemple, elles sont toutes trois l'unité, les trois probabilités y'_{3n-1}, z'_{3n}, x'_{3n+1}, seront nulles, et il sera certain que la partie ne finira jamais, ce qui est évident. Si l'une des fractions α, β, γ, est zéro, on aura aussi $k=0$; ces trois probabilités seront donc nulles, excepté pour $n=1$; par conséquent, la partie ne pourra finir qu'au second coup, ou au troisième, ou au quatrième; les probabilités respectives de ces trois événements, seront

$$y'_2 = 1 - \beta, \quad z'_3 = (1-\alpha)\beta, \quad x'_4 = (1-\gamma)\beta\alpha;$$

et comme leur somme est l'unité, à cause de $\alpha\beta\gamma = 0$, il s'ensuit que la partie finira certainement à l'un de ces trois coups.

Dans le cas de $\alpha=\frac{1}{2}$, $6=\frac{1}{2}$, $\gamma=\frac{1}{2}$, où les trois joueurs sont d'égale force, on a $k=\left(\frac{1}{2}\right)^3$. Quel que soit le nombre entier m, la probabilité que la partie ne sera pas terminée dans les m premiers coups, devient donc $\left(\frac{1}{2}\right)^{m-1}$, d'après les trois premières équations précédentes ; et la probabilité qu'elle finira précisément au $m^{ième}$ coup, devient aussi $\left(\frac{1}{2}\right)^{m-1}$, d'après les trois dernières.

Dans le cas général, où α, 6, γ, sont des fractions quelconques, si l'on représente par q_{3n-1}, la probabilité que la partie finira à l'un des n coups dont les rangs répondent aux nombres 2, 5, 8, 11,... $3n-1$; par r_{3n}, la probabilité qu'elle se terminera à l'un des n coups dont les rangs répondront à 3, 6, 9, 12,... $3n$; par p_{3n+1}, la probabilité qu'elle se terminera à l'un des n coups dont les nombres 4, 7, 10, 13,... $3n+1$, marquent les rangs, on aura

$$\begin{aligned}
q_{3n-1} &= y'_2 + y'_5 + y'_8 + y'_{11} + \ldots + y'_{3n-1},\\
r_{3n} &= z'_3 + z'_6 + z'_9 + z'_{12} + \ldots + z'_{3n},\\
p_{3n+1} &= x'_4 + x'_7 + x'_{10} + x'_{13} + \ldots + x'_{3n+1};
\end{aligned}$$

et d'après les formules précédentes, on en conclura

$$\begin{aligned}
q_{3n-1} &= \frac{(1-6)(1-k^n)}{1-k},\\
r_{3n} &= \frac{6(1-\alpha)(1-k^n)}{1-k},\\
p_{3n+1} &= \frac{\alpha 6(1-\gamma)(1-k^n)}{1-k}.
\end{aligned}$$

Si nous appelons s_n la probabilité que la partie finira dans les $3n$ premiers coups, à partir du second inclusivement, nous aurons

$$s_n = q_{3n-1} + r_{3n} + p_{3n+1};$$

et à cause de

$$1-6+6(1-\alpha)+\alpha 6(1-\gamma) = 1-\alpha 6\gamma = 1-k,$$

il en résultera

$$s_n = 1-k^n;$$

en sorte que cette probabilité sera la même, quels que soient les deux joueurs qui joueront le premier coup, et quel que soit aussi, le joueur qui le gagnera. Il n'en sera pas de même à l'égard des probabilités que la partie finira dans les $3n-1$ ou dans les $3n+1$ premiers coups, non compris le premier de tous; probabilités qui se déduiront de s_n, en en retranchant la valeur de x'_{3n+1}, ou en y ajoutant celle de y'_{3n+2}. Si l'on exclut le cas où les trois quantités α, $\mathcal{C}$, γ, sont l'unité, et où l'on a $k=1$, on voit que la probabilité que la partie ne se prolongera pas au-delà d'un nombre de coups donnés, approchera indéfiniment de l'unité à mesure que ce nombre deviendra plus grand, mais qu'elle ne se changerait dans la certitude que si ce nombre devenait infini. Dans le cas des joueurs d'égale force, en désignant par m un nombre entier quelconque et par t_m la probabilité que la partie finira dans les m premiers coups à partir du second inclusivement, on aura

$$t_m = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^m;$$

de sorte qu'il suffira, par exemple, qu'on ait $m=10$, pour que la probabilité $1-t_m$ de l'événement contraire, tombe au-dessous d'un millième.

Maintenant soient a, b, c, les probabilités que la partie prolongée à l'infini, s'il le faut, sera gagnée respectivement par A, B, C. Pour que A gagne il est nécessaire et il suffit que la partie se termine à un coup dont le rang est marqué par un nombre de la forme $3n-1$; la valeur de a se déduira donc de celle de q_{3n-1}, en y faisant $n=\infty$; ce qui donne

$$a = \frac{1-\mathcal{C}}{1-k},$$

en excluant le cas où l'on a $k=1$, et où la partie ne finit jamais. On verra de même que b et c sont les valeurs de p_{3n+1} et r_{3n} qui répondent à $n=\infty$; en sorte que l'on a

$$b = \frac{\alpha\mathcal{C}(1-\gamma)}{1-k}, \quad c = \frac{\mathcal{C}(1-\alpha)}{1-k}.$$

Comme il est certain que la partie sera gagnée par un des trois

joueurs, on devra avoir

$$a + b + c = 1;$$

ce qui a lieu effectivement.

Chacune de ces fractions a, b, c, multipliée par l'*enjeu*, ou la somme des trois *mises*, sera l'espérance mathématique de l'un des joueurs; lequel aura de l'avantage ou du désavantage, selon que ce produit sera plus grand ou plus petit que sa mise. A une époque quelconque du jeu, où la partie n'est pas finie, et où A vient de gagner B; si les joueurs conviennent de ne point achever, l'enjeu devra être partagé entre A, B, C, proportionnellement aux fractions a, b, c.

Il résulte de leurs expressions, que dans le cas même des joueurs d'égale force, la chance de gagner la partie est inégale pour les joueurs qui jouent les premiers, et pour celui qui n'entre au jeu qu'au second coup. En effet, en faisant

$$\alpha = \frac{1}{2}, \quad \beta = \frac{1}{2}, \quad \gamma = \frac{1}{2}, \quad k = \frac{1}{8},$$

on aura

$$a = \frac{4}{7}, \quad b = \frac{1}{7}, \quad c = \frac{2}{7}.$$

Après le premier coup, le joueur qui l'a gagné a donc droit à $\frac{4}{7}$ de l'enjeu, celui qui l'a perdu n'a droit qu'à $\frac{1}{7}$, et celui qui n'a pas joué a droit à $\frac{2}{7}$; mais avant que ce coup ne soit joué, les deux joueurs que le sort a désigné pour le jouer, ont une égale chance de le gagner; leur probabilité de gagner la partie est donc alors $\frac{1}{2}(a+b)$, ou $\frac{5}{14}$, c'est-à-dire qu'elle surpasse de $\frac{1}{14}$ la chance $\frac{2}{7}$, ou $\frac{4}{14}$ du joueur qui n'entre qu'au second coup. Si la mise de chaque joueur est représentée par μ, et que l'on convienne de ne pas jouer la partie, après que le sort a désigné les deux joueurs qui devaient la commencer, chacun de ceux-ci devra prendre $\frac{15}{14}$ de μ, sur l'enjeu égal à 3μ, et le troisième joueur $\frac{12}{14}$ de μ seulement; ou autrement dit, les trois joueurs

ayant retiré leurs mises, le troisième devra, en outre, donner $\frac{1}{14}$ de μ à chacun des deux premiers.

En général, avant que le sort ait désigné les deux joueurs qui doivent jouer le premier coup, les probabilités de gagner la partie seront différentes de a, b, c; pour les trois joueurs A, B, C, je les représenterai respectivement par f, g, h; chacune d'elles dépendra des trois chances données α, β, γ; et il suffira de déterminer la valeur de f en fonction de α, β, γ: les valeurs de g et h s'obtiendront de la même manière, ou se déduiront de f par de simples permutations.

Il pourra arriver que le premier coup soit joué par A et B, par C et A, par B et C. Ces trois combinaisons étant également probables, la probabilité de chacune d'elles sera égale à $\frac{1}{3}$; de plus, dans la première combinaison, la probabilité que le premier coup sera gagné par A aura γ pour valeur, et par B, elle sera $1-\gamma$; dans la seconde, la probabilité que C gagnera le premier coup sera β, et la probabilité qu'il sera gagné par A aura $1-\beta$ pour valeur; dans la dernière, il y aura la probabilité α que le premier coup sera gagné par B, et la probabilité $1-\alpha$ qu'il le sera par C : chacune de ces trois combinaisons donnant lieu à deux cas différents, il y aura donc six cas possibles, dont les probabilités respectives seront

$$\tfrac{1}{3}\gamma, \quad \tfrac{1}{3}(1-\gamma), \quad \tfrac{1}{3}\beta, \quad \tfrac{1}{3}(1-\beta), \quad \tfrac{1}{3}\alpha, \quad \tfrac{1}{3}(1-\alpha).$$

Or, il s'agira de déterminer successivement, dans chacun de ces six cas, la probabilité que A gagnera la partie; en multipliant ensuite chaque probabilité par celle du cas à laquelle elle répond, et faisant la somme des six produits, on aura la valeur complète de f.

Dans le premier cas, où le coup est joué par A et B, et gagné par A, la probabilité que A gagnera la partie sera la valeur précédente de a; le premier terme de la valeur de f sera donc $\frac{1}{3}\gamma a$, ou

$$\frac{\gamma(1-\beta)}{3(1-k)}.$$

Dans le second cas, où c'est A jouant contre B, qui perd le premier coup, la probabilité que A gagnera la partie sera la valeur précédente de b, dans laquelle on devra changer γ en $1-\gamma$, 6 en $1-\alpha$, α en $1-6$; en multipliant le résultat par $\frac{1}{3}(1-\gamma)$, on aura donc

$$\frac{k'\gamma}{3(1-k')},$$

pour le second terme de f, où l'on a fait, pour abréger,

$$(1-\alpha)(1-6)(1-\gamma)=k'.$$

Dans le troisième cas, où le premier coup sera joué par C et A, et gagné par C, la probabilité de A pour gagner la partie sera ce que devient l'expression de b, relative au joueur qui perd le premier coup, lorsqu'on y change γ en 6, 6 en α, α en γ; en multipliant ensuite par $\frac{1}{3}6$, il en résultera

$$\frac{k(1-6)}{3(1-k)},$$

pour le troisième terme de f.

Dans le quatrième cas, où le premier coup est gagné par A jouant contre C, la probabilité que A gagnera la partie sera l'expression de a, dans laquelle il faudra changer γ en $1-6$, 6 en $1-\gamma$, α en $1-\alpha$; en multipliant le résultat par $\frac{1}{3}(1-6)$, on aura ensuite

$$\frac{\gamma(1-6)}{3(1-k')},$$

pour le quatrième terme de f.

Dans le cinquième cas, où le premier coup est joué par B et C, et gagné par B, la probabilité que A gagnera la partie sera ce que devient l'expression de c, relative au joueur qui ne joue pas à ce premier coup, quand on y change γ en α, 6 en γ, α en 6; en multipliant le résultant par $\frac{1}{3}\alpha$, il vient

$$\frac{\alpha\gamma(1-6}{3(1-k)},$$

pour le cinquième terme de f.

Enfin, dans le sixième et dernier cas, où le premier coup est gagné par C jouant contre B, la probabilité que A gagnera la partie se déduira encore de l'expression de c, mais en changeant γ en $1-\alpha$, 6 en $1-6$, α en $1-\gamma$; ce qui, après avoir multiplié par $\frac{1}{3}(1-\alpha)$, donne

$$\frac{\gamma(1-\alpha)(1-6)}{3(1-k')},$$

pour le dernier terme de f.

Si l'on fait actuellement la somme de ces six valeurs partielles de f, on aura, pour sa valeur complète,

$$f=\frac{\gamma(1-6)(1+\alpha+\alpha 6)}{3(1-k)}+\frac{\gamma k'+\gamma(1-6)+\gamma(1-\alpha)(1-6)}{3(1-k')}.$$

La raison des diverses permutations des lettres α, 6, γ, que nous venons d'indiquer, est facile à saisir en jetant les yeux sur le tableau présenté plus haut. On verra de même que pour déduire de l'expression de f, celle de g, il suffira de changer γ en α, 6 en γ, α en 6, dans f; et pour obtenir ensuite la valeur de h, il faudra répéter encore cette permutation tournante dans la valeur de g, ou bien changer tout de suite γ en 6, 6 en α, α en γ, dans la valeur de f. De cette manière, nous aurons

$$g=\frac{\alpha(1-\gamma)(1+6+6\gamma)}{3(1-k)}+\frac{\alpha k'+\alpha(1-\gamma)+\alpha(1-6)(1-\gamma)}{3(1-k')},$$
$$h=\frac{6(1-\alpha)(1+\gamma+\gamma\alpha)}{3(1-k)}+\frac{6k'+6(1-\alpha)+6(1-\gamma)(1-\alpha)}{3(1-k')}.$$

Quand les joueurs sont d'égale force, ou qu'on a $\alpha=6=\gamma=\frac{1}{2}$, ces trois probabilités f, g, h, doivent être égales entre elles et à $\frac{1}{3}$; ce qu'on vérifie aisément. Quelles que soient les chances α, 6, γ, il faut qu'on ait

$$f+g+h=1,$$

puisqu'il est certain que la partie sera gagnée par l'un des trois joueurs, en excluant, toutefois, le cas où l'on aurait $k=1$, et où elle ne finirait pas. C'est aussi ce qu'il est aisé de vérifier, en ayant égard à ce que k et k' représentent.

Si les deux joueurs B et C sont d'égale force, soit lorsqu'ils jouent

l'un contre l'autre, soit quand ils jouent contre A, il faudra faire

$$\alpha = \frac{1}{2}, \quad \beta = 1 - \gamma;$$

la quantité γ pourra encore être une fraction quelconque; elle exprimera la chance de A, de gagner chacun des coups où il jouera; et A sera plus fort ou plus faible que chacun des deux autres joueurs, selon qu'on aura $\gamma > \frac{1}{2}$ ou $\gamma < \frac{1}{2}$. Pour ces valeurs de α et β, on aura, comme cela doit être,

$$g = h = \frac{1}{2}(1 - f);$$

et la valeur de f se réduira à

$$f = \frac{8\gamma^2 - 2\gamma^3}{3(2 - \gamma + \gamma^2)}.$$

Si la mise est la même pour chacun des trois joueurs, et qu'on la représente par μ, l'enjeu sera 3μ, et l'espérance mathématique de A aura $3\mu f$ pour valeur. Elle serait $2\mu\gamma$, si A jouait toujours à mise égale, mais en un seul coup, et contre un seul des deux autres joueurs; dans le cas des mises égales, le joueur A de force inégale, doit donc préférer de jouer au jeu que nous considérons, contre les joueurs B et C de forces égales, ou bien il doit choisir de jouer une partie simple, contre B ou C, selon que la différence $3\mu f - 2\mu\gamma$ est positive ou négative. Or, d'après la valeur précédente de f, on a

$$3\mu f - 2\mu\gamma = \frac{2\mu\gamma(2-\gamma)(2\gamma-1)}{2-\gamma+\gamma^2};$$

quantité positive ou négative, selon que γ surpasse $\frac{1}{2}$ ou est moindre. Il s'ensuit donc que le joueur A, s'il est le plus fort, ou si γ surpasse $\frac{1}{2}$, augmentera encore son avantage, en choisissant la première manière de jouer, et que s'il est le plus faible, ou si l'on a $\gamma < \frac{1}{2}$, il diminuera son désavantage, en choisissant la seconde.

Lorsque les joueurs, au lieu de mettre, une fois pour toutes, une

somme au jeu, conviennent d'y mettre une somme μ à chaque fois qu'ils y entrent, de sorte que l'enjeu croisse continuellement avec le nombre des coups, l'espérance mathématique de chacun d'eux ne sera plus la même que précédemment, et à force égale, par exemple, l'avantage qui était tout à l'heure pour les joueurs qui jouent le premier coup, sera maintenant pour celui qui n'entre qu'au second coup.

Afin de calculer commodément l'espérance mathématique de chaque joueur, il faudra la diviser en deux parties : l'une positive, et provenant des sommes que le joueur pourra recevoir aux différents coups qui seront joués ; l'autre négative, et provenant des sommes qu'il pourra payer. Pour le joueur A qui gagne le premier coup, je désignerai par a' la première partie, par $a_{,}$ la seconde, abstraction faite du signe, et par φ l'excès de celle-là sur celle-ci. Je représenterai les quantités analogues par b', $b_{,}$, ψ, pour le joueur B qui perd le premier coup, et par c', $c_{,}$, θ, pour le joueur C qui n'entre qu'au second coup. De cette manière, on aura

$$\varphi = a' - a_{,}, \quad \psi = b' - b_{,}, \quad \theta = c' - c_{,}.$$

Au $m^{ième}$ coup, si la partie n'est pas finie auparavant, l'enjeu sera égal à $(m+1)\mu$. Or, d'après ce qu'on a vu précédemment, les probabilités que la partie sera finie, et gagnée alors par A, au second coup, au cinquième, au huitième, au onzième, etc., seront

$$(1-\mathfrak{C}), \quad (1-\mathfrak{C})k, \quad (1-\mathfrak{C})k^2, \quad (1-\mathfrak{C})k^3, \quad \text{etc.};$$

les gains attachés aux arrivées de ces événements étant donc

$$3\mu, \quad 6\mu, \quad 9\mu, \quad 12\mu, \quad \text{etc.},$$

il suit de la règle de l'espérance mathématique, que la valeur complète de a' sera la somme de ces deux séries multipliées terme à terme et prolongées jusqu'à l'infini ; ce qui donne

$$a' = 3\mu(1-\mathfrak{C})\Sigma ik^{i-1};$$

la somme Σ s'étendant à toutes les valeurs du nombre entier i, depuis $i=1$ jusqu'à $i=\infty$. Mais on a

$$\Sigma k^i = \frac{k}{1-k};$$

et en différentiant par rapport à k, il vient

$$\Sigma i k^{i-1} = \frac{1}{(1-k)^2};$$

par conséquent, on aura

$$a' = \frac{3\mu(1-6)}{(1-k)^2}.$$

Pour A et B, il y a la certitude de jouer au premier coup, et pour C, au second. Pour A, les probabilités de rentrer ensuite au jeu, au quatrième coup, au septième, au dixième, au treizième, etc., ou, ce qui est la même chose, les probabilités que la partie ne sera pas terminée au troisième coup, au sixième, au neuvième, au douzième, etc., seront, comme on l'a trouvé plus haut,

$$\alpha6, \quad \alpha6k, \quad \alpha6k^2, \quad \alpha6k^3, \quad \text{etc.};$$

la valeur complète de $a_{,}$ sera donc la somme de cette série infinie de fractions, multipliée par μ, et augmentée de μ pour la première mise de A; en sorte que l'on aura

$$a_{,} = \mu + \frac{\mu\alpha6}{1-k}.$$

La probabilité que la partie se terminera au coup dont le rang est marqué par un nombre de la forme $3n+1$, auquel cas elle sera gagnée par B, étant

$$\alpha6(1-\gamma)k^{n-1},$$

et l'enjeu que B recevra alors, ayant $3n\mu + 2\mu$ pour valeur, on en conclut que la valeur complète de b', sera

$$b' = \mu\alpha6(1-\gamma)(3\Sigma nk^{n-1} + 2\Sigma k^{n-1});$$

les sommes Σ s'étendant depuis $n=1$ jusqu'à $n=\infty$. Donc, en ayant égard aux valeurs de ces deux sommes, nous aurons

$$b' = \frac{3\mu\alpha6(1-\gamma)}{(1-k)^2} + \frac{2\mu\alpha6(1-\gamma)}{1-k}.$$

Par un raisonnement semblable, on trouvera de même

$$c' = \frac{3\mu\beta(1-\alpha)}{(1-k)^2} + \frac{\mu\beta(1-\alpha)}{1-k}.$$

On obtiendra aussi, sans difficulté,

$$b_{\prime} = \mu + \frac{\mu\beta}{1-k}, \quad c_{\prime} = \mu + \frac{\mu\alpha\beta\gamma}{1-k};$$

et de ces diverses valeurs, il résultera finalement

$$\begin{aligned}
\varphi &= \frac{3\mu(1-\beta)}{(1-k)^2} - \mu - \frac{\mu\alpha\beta}{1-k}, \\
\psi &= \frac{3\mu\alpha\beta(1-\gamma)}{(1-k)^2} + \frac{2\mu\alpha\beta(1-\gamma)}{1-k} - \mu - \frac{\mu\beta}{1-k}, \\
\theta &= \frac{3\mu\beta(1-\alpha)}{(1-k)^2} + \frac{\mu\beta(1-\alpha)}{1-k} - \mu - \frac{\mu\alpha\beta\gamma}{1-k}.
\end{aligned}$$

Puisque tout l'argent mis successivement au jeu pendant la durée de la partie, est retiré par le joueur qui l'a gagnée, il s'ensuit que la somme des espérances mathématiques des trois joueurs doit être nulle; et en effet, d'après ce que k représente, on a identiquement

$$\varphi + \psi + \theta = 0.$$

En prenant $\frac{1}{2}$ pour chacune des fractions α, β, γ, et en faisant $k = \frac{1}{8}$, on a

$$\varphi = \frac{33\mu}{49}, \quad \psi = -\frac{39\mu}{49}, \quad \theta = \frac{6\mu}{49},$$

pour les espérances mathématiques des trois joueurs supposés d'égale force. Cela signifie, par exemple, qu'avant qu'ils aient rien mis au jeu, et après que le premier coup a été joué; si l'on convenait de ne pas continuer la partie, le joueur qui a perdu ce premier coup devrait payer $\frac{39}{49}$ de μ, savoir, $\frac{33}{49}$ à celui qui l'a gagné, et $\frac{6}{49}$ à celui qui n'a pas joué. Après que le sort a désigné les deux joueurs qui doivent jouer le premier coup, et avant que ce coup ne soit joué, chacun d'eux peut également le gagner; l'espérance mathématique de chacun de ces joueurs est donc $\frac{1}{2}.\frac{33\mu}{49} - \frac{1}{2}.\frac{39\mu}{49}$, ou $-\frac{3\mu}{49}$, c'est-à-dire, que si l'on

convenait de ne pas jouer la partie, chacun d'eux devrait donner $\frac{3}{49}$ de μ au troisième joueur, tandis que dans le cas que nous avons d'abord examiné, c'était ce premier joueur qui devait, au contraire, donner $\frac{1}{14}$ de μ à chacun des deux premiers joueurs. Si la partie n'est pas terminée au $m^{\text{ième}}$ coup, et que l'on convienne de ne pas la continuer, le joueur qui aura perdu ce coup devra, comme on vient de le dire, payer $\frac{33}{49}$ de μ à celui qui l'aura gagné, et $\frac{6}{49}$ au troisième joueur; et de plus, l'enjeu qui avait lieu au coup précédent, et qui s'élevait à $m\mu$, devra être partagé entre ces trois joueurs, proportionnellement à leurs chances $\frac{1}{7}$, $\frac{4}{7}$, $\frac{2}{7}$, d'achever de gagner la partie; en sorte qu'au $m^{\text{ième}}$ coup, si l'on représente par φ' l'espérance mathématique du joueur qui gagne ce coup, par ψ' celle du joueur qui le perd, par θ' celle du joueur qui n'y joue pas, on aura

$$\varphi' = \frac{(28m+33)\mu}{49}, \quad \psi' = \frac{(7m-39)\mu}{49}, \quad \theta' = \frac{(14m+6)\mu}{49}.$$

Lorsque m surpassera cinq, la valeur de ψ' sera positive, comme φ' et θ'; le joueur qui perdra le $m^{\text{ième}}$ coup n'aura rien à payer aux deux autres; seulement il aura droit à une moindre part dans l'enjeu qui avait lieu au coup précédent: si, par exemple, on a $m=6$, l'enjeu qui avait lieu au cinquième coup sera égal à 6μ; sur quoi le joueur qui gagne le sixième coup devra prendre $\frac{201\mu}{49}$, celui qui le perd n'aura droit qu'à $\frac{3\mu}{49}$, et le troisième joueur à $\frac{90\mu}{49}$.

MÉMOIRE

Sur diverses manières de généraliser les propriétés des diamètres conjugués dans les sections coniques. — Nouveaux théorèmes de Perspective, pour la transformation des relations métriques des figures. — Principes de Géométrie plane analogues à ceux de la Perspective. — Manière de démontrer dans le cône oblique les propriétés des foyers des sections coniques;

PAR M. CHASLES.

1. Les propriétés des sections coniques, et celles des surfaces du second degré, relatives aux diamètres conjugués, peuvent être généralisées sous plusieurs points de vue. Pour les surfaces, cette généralisation repose sur quelques principes de Géométrie qu'il nous faudrait exposer préalablement. Mais pour les coniques la question peut être traitée, en grande partie du moins, par les seules ressources de la Géométrie élémentaire. Nous allons donc nous occuper seulement, dans cet écrit, de la généralisation des propriétés des diamètres conjugués des coniques.

2. *Premier mode de généralisation.* Soient sa, sb deux demi-diamètres conjugués d'une conique c, on aura

$$\overline{sa}^2 + \overline{sb}^2 = \text{const.}$$

Concevons un cercle c' concentrique à la conique, et soient sa', sb' ses rayons dirigés suivant les demi-diamètres sa, sb; on aura

$$\frac{\overline{sa}^2}{\overline{sa'}^2} + \frac{\overline{sb}^2}{\overline{sb'}^2} = \text{const.}$$

Projetons, par des droites parallèles entre elles, la conique et le cercle, sur un même plan; on aura deux coniques C, C′ en projection. Soient SA, SB, et SA′, SB′, les demi-diamètres de ces deux courbes, correspondants respectivement aux demi-diamètres des deux premières; on aura

$$\frac{sa}{sa'} = \frac{\mathrm{SA}}{\mathrm{SA'}}, \quad \frac{sb}{sb'} = \frac{\mathrm{SB}}{\mathrm{SB'}},$$

et, conséquemment, l'équation

$$\frac{\overline{\mathrm{SA}}^2}{\overline{\mathrm{SA'}}^2} + \frac{\overline{\mathrm{SB}}^2}{\overline{\mathrm{SB'}}^2} = \text{const.}$$

Or sa et sb étant conjugués par rapport à la conique c, SA et SB sont conjugués par rapport à la conique C, parce que la tangente à la courbe c au point a est parallèle à sb, et que, par conséquent, la tangente à la courbe C, au point A, est parallèle à SB; ce qui est la condition pour que SA et SB soient conjugués. L'équation précédente exprime donc ce théorème :

Étant données deux coniques dans un plan, la somme des carrés de deux demi-diamètres conjugués de la première, divisés respectivement par les carrés des demi-diamètres de la seconde qui leur sont parallèles, est constante.

3. Si la première conique est un cercle, on conclut de ce théorème, le suivant :

La somme des valeurs inverses des carrés de deux demi-diamètres rectangulaires d'une conique est constante.

4. *Second mode de généralisation.* Que l'on ait une section conique c et plusieurs systèmes de ses diamètres conjugués; qu'on fasse la perspective de cette figure sur un plan; on aura une seconde section conique C, et plusieurs systèmes de deux droites passant toutes par un même point fixe. Tous ces systèmes de deux droites jouiront de propriétés analogues à celles des systèmes de deux diamètres conju-

gués; mais ces propriétés seront plus générales que celles des diamètres conjugués, et celles-ci s'en déduiront, comme cas particuliers, si l'on suppose que le point fixe devienne le centre de la conique C.

Soit I la droite qui correspond dans le plan de la conique C à la droite située à l'infini dans le plan de la conique c. Cette droite I est l'intersection du premier plan par un plan parallèle au second, mené par le point de l'œil. Soit s le centre de la conique c, et S le point correspondant dans la conique C, c'est-à-dire la perspective du point s. La propriété caractéristique du point s, c'est que, étant menées deux tangentes à la courbe c, parallèles entre elles, la droite qui joint les points de contact passe toujours par le point s. Pareillement, la propriété caractéristique du point S, c'est que, *étant menées, par un même point quelconque de la droite* I, *deux tangentes à la conique* C, *la droite qui joint les deux points de contact passe toujours par le point* S. Ce qui prouve que *le point* S *est le pôle de la droite* I, pris par rapport à la conique C (*).

La propriété caractéristique de deux diamètres conjugués de la courbe c, c'est que les tangentes à la courbe, menées aux extrémités d'un des deux diamètres, sont parallèles à l'autre diamètre. On en conclut que la propriété caractéristique de deux droites correspondantes, dans le plan de la conique C, à deux diamètres conjugués de la conique c, c'est que : *les tangentes à la courbe* C, *aux points où l'une des deux droites la rencontre, se croisent au point où l'autre droite rencontre l'axe* I. Ce point est précisément le *pôle* de la première droite. On peut donc dire que *les deux droites sont telles que chacune d'elles passe par le pôle de l'autre;* ce pôle étant pris par rapport à la conique C. Ces deux droites passent par le point fixe S; nous les appellerons *axes conjugués relatifs au point* S.

Ainsi, aux systèmes de deux diamètres conjugués d'une conique, correspondent, en perspective, des systèmes de deux *axes conjugués* d'une nouvelle conique, *relatifs* à *un point fixe.* Et la propriété ca-

(*) On appelle *pôle* d'une droite, par rapport à une conique, le point par où passent toutes les cordes de contact des angles circonscrits à la conique, qui ont leurs sommets sur la droite.

ractéristique des deux axes de chaque système, c'est que *le pôle de l'un, pris par rapport à la conique, est situé sur l'autre.*

Ce sont ces systèmes de deux *axes conjugués relatifs à un point* dont nous allons chercher les propriétés; elles seront la généralisation de celles des diamètres conjugués.

5. Nous nous servirons pour cela d'un principe général de la perspective, dont on n'a pas encore fait usage, et qui sera d'un très utile secours dans beaucoup d'autres questions. Sa démonstration ne peut offrir de difficulté; et nous nous bornerons ici à son énoncé :

Principe de perspective. *Quand deux figures planes sont la perspective l'une de l'autre, le rapport des distances d'un point quelconque de la première à deux droites fixes de cette figure, est au rapport des distances du point homologue de la seconde figure aux deux droites correspondantes à ces droites fixes, dans une raison constante.*

6. Une droite, dans chacune des deux figures, peut être prise à l'infini; de là résultent deux corollaires du principe, qui nous seront utiles; nous allons tout de suite les énoncer, pour ne plus revenir sur ces propositions préliminaires :

1er Corollaire. *Quand deux figures planes sont la perspective l'une de l'autre, la distance d'un point quelconque de la première, à une droite fixe prise dans le plan de cette figure, est dans une raison constante avec le rapport des distances du point homologue de la seconde figure à deux droites fixes, dont la première correspond à la droite prise dans le plan de la première figure, et la seconde est l'intersection du plan de la seconde figure par le plan mené par l'œil parallèlement au plan de la première figure.*

7. 2e Corollaire. *Quand deux figures planes sont la perspective l'une de l'autre, si l'on mène dans la première la droite correspondante à l'infini de la seconde* (c'est-à-dire la droite qui est l'intersection du plan de la première figure par le plan mené par l'œil parallèlement à celui de la seconde), *et dans le plan de la seconde figure la droite correspondante à l'infini de la première, les distances de deux points homologues quelconques des deux figures à ces deux droites respectivement, auront leur produit constant.*

8. Cela posé, reprenons nos deux coniques c, C, qui sont la pers-

pective l'une de l'autre, et considérons dans le plan de la seconde le point S qui correspond au centre s de la première. La conique C et le point S étant donnés, il y aura une infinité de coniques c, dans l'espace, qui auront pour perspective la courbe C, et dont les centres s correspondront au point S. Parmi cette infinité de courbes qu'on peut concevoir, choisissons-en une qui présente cette circonstance particulière, que deux diamètres quelconques de cette courbe fassent entre eux un angle égal à celui des deux droites qui leur correspondent dans le plan de la courbe C, lesquelles droites seront deux *axes conjugués relatifs au point* S. Cette relation particulière entre la courbe c et sa perspective C, peut s'obtenir facilement. Pour cela, que par la polaire du point S, prise par rapport à la courbe C, on mène un premier plan quelconque; puis un second qui divise en deux, également, l'angle que le premier fera avec le plan de la courbe S; et que par le point S on mène une droite perpendiculaire au second plan; elle rencontrera le premier en un point s qui sera pris pour le lieu de l'œil; un plan quelconque parallèle au premier, fera dans le cône qui aura le point s pour sommet et la courbe C pour base, une section qui sera la courbe c.

9. D'après cela, appliquons aux deux courbes c, C le principe exprimé par le premier corollaire, en regardant la courbe c comme la première figure, et la courbe C comme la seconde.

Menons par les points s, S, dans les plans des deux courbes, respectivement, deux droites correspondantes sq, SQ; soient a, A deux points correspondants quelconques des deux courbes; aq, AQ les perpendiculaires abaissées de ces points sur les deux droites sq, SQ; et AP la perpendiculaire abaissée du second sur la polaire du point S; on aura, d'après l'énoncé du premier corollaire,

$$aq = \lambda \frac{AQ}{AP},$$

λ étant une constante.

Or aq et AQ étant les perpendiculaires abaissées des deux points a, A sur les droites sq, SQ, on a

$$aq = as \cdot \sin asq,$$
$$AQ = AS \cdot \sin ASQ.$$

La droite sS, qui passe par le sommet du cône, étant, par hypothèse, perpendiculaire au plan qui divise en deux également l'angle des plans des deux courbes c, C; il s'ensuit que l'angle des deux droites sa, sq est égal à l'angle des deux droites SA, SQ; de sorte que les deux équations ci-dessus donnent

$$\frac{aq}{AQ}=\frac{as}{AS}.$$

L'équation précédente devient donc

$$sa=\lambda.\frac{SA}{AP}.$$

Cette équation résout la question que nous nous proposions; car elle sert à appliquer aux *axes* de la conique C, *relatifs au point* S, les propriétés des *diamètres* de la conique c.

Il est important de se rappeler que les angles que font entre eux ces axes, sont égaux aux angles que font entre eux les diamètres correspondants, comme nous l'avons dit ci-dessus des angles asq, ASQ. Cela servira pour transporter diverses propriétés des *diamètres* d'une conique, aux *axes relatifs à un point.*

Appliquons cette méthode.

10. Dans une conique, il existe un système de deux diamètres conjugués rectangulaires, et ces diamètres sont maximum et minimum parmi tous les autres; on en conclut que

Dans une conique, parmi les systèmes de deux axes conjugués SA, SA' *relatifs à un point* S, *il en existe un où ces axes sont à angle droit; pour ces deux axes les rapports* $\frac{SA}{AP}$, $\frac{SA'}{A'P'}$ *sont, respectivement, un maximum et un minimum.*

11. La somme des valeurs inverses des carrés de deux demi-diamètres rectangulaires est constante; donc

Pour deux axes SA, SA' *relatifs à un point, menés à angle droit, la somme des carrés des deux rapports* $\frac{AP}{SA}$, $\frac{A'P'}{SA'}$, *est constante.*

12. La somme des carrés de deux demi-diamètres conjugués est constante; donc

Pour deux axes conjugués SA, SA′ *relatifs à un point* S, *la somme des carrés des deux rapports* $\frac{SA}{AP}$, $\frac{SA'}{A'P'}$ *est constante.*

13. La somme des carrés des projections de deux diamètres conjugués, sur une droite, est constante; c'est-à-dire que la somme des carrés de deux demi-diamètres conjugués, multipliés respectivement par les carrés des cosinus des angles qu'ils font avec une droite fixe, et constante. On en conclut que, pour deux axes conjugués SA, SA′, les carrés des rapports $\frac{SA}{AP}$, $\frac{SA'}{A'P'}$ multipliés respectivement par les carrés des cosinus des angles que les deux axes SA, SA′ font avec une droite fixe, ont leur somme constante. Ce théorème peut s'exprimer ainsi :

La somme des carrés des perpendiculaires abaissées des extrémités de deux axes conjugués relatifs à un point, sur une droite menée par ce point, divisés respectivement par les carrés des distances de ces points à la polaire du point fixe, est constante.

14. Que la droite menée par le point fixe, soit parallèle à la polaire de ce point, le théorème prendra cet énoncé :

La somme des carrés de deux axes conjugués relatifs à un point, divisés respectivement par les carrés des segments compris sur ces axes entre leurs extrémités et la polaire du point, est constante.

15. La somme des carrés des perpendiculaires abaissées des quatre extrémités de deux diamètres conjugués sur une droite fixe menée arbitrairement, est constante; on conclut de là, par le principe exprimé dans le premier corollaire, que

Dans une conique, deux axes conjugués relatifs à un point rencontrent la courbe en quatre points qui sont tels que la somme des carrés de leurs distances à une droite fixe menée arbitrairement, divisés respectivement par les carrés des distances de ces points à la polaire du point fixe, est constante.

16. Si la droite fixe est prise à l'infini, on fera usage du second corollaire, et l'on aura ce théorème :

Dans une conique, deux axes conjugués quelconques relatifs à un point fixe rencontrent la courbe en quatre points qui jouissent de cette

propriété, que la somme des valeurs inverses des carrés de leurs distances à la polaire du point fixe, est constante.

17. On voit par ce qui précède, comment les propriétés des diamètres conjugués donnent lieu à des propriétés des systèmes de deux *axes conjugués relatifs à un point*, qui sont la généralisation des premières.

Manière de démontrer les propriétés des foyers dans les sections coniques.

18. La position que nous avons supposée aux deux courbes c, C dans l'espace (8), conduit naturellement à la découverte des *foyers* des coniques, et se prête aussi à la démonstration de leurs propriétés. Car si l'on suppose que la courbe c soit un cercle, on aura $sa =$ le rayon, et par conséquent, $\frac{\text{SA}}{\text{AP}} =$ constante; ce qui est une des propriétés caractéristiques des *foyers*.

Ainsi l'on est conduit naturellement à la considération de ces points qui jouent un si grand rôle dans la théorie des coniques. Les Anciens, bien qu'ils aient formé et étudié les coniques dans le cône, ou, comme ils disaient, *dans le solide*, n'ont traité des foyers que par des considérations de Géométrie plane, sans dire par quelle voie ils ont été conduits à la découverte de ces points. Les Modernes, en voulant rechercher l'origine de ces points dans le cône même, n'ont pris que le cône droit, ou de révolution; et l'on n'avait pas encore indiqué le moyen de découvrir ces points dans le cône oblique, ni d'y démontrer leurs propriétés.

19. Les considérations précédentes se prêtent avec une grande facilité à la démonstration de toutes les propriétés des foyers, en les déduisant de celles du cercle. Nous donnerons ici un seul exemple de cette méthode.

Qu'autour d'un point fixe o, pris dans le plan d'un cercle, on fasse tourner une transversale qui rencontre la circonférence en deux points a, a'; soient aq, $a'q'$, oq'' les perpendiculaires abaissées des trois points a, a', o sur la polaire du point fixe, on démontre facilement que l'on

à la relation

$$\frac{1}{aq} \pm \frac{1}{a'q'} = \frac{2}{oq^2};$$

c'est-à-dire que

$$\frac{1}{aq} \pm \frac{1}{a'q'} = \text{const.},$$

quelle que soit la transversale menée par le point o.

On doit prendre le signe $+$ quand ce point est dans l'intérieur du cercle, et le signe $-$ quand il est au dehors.

Dans la conique C, qui est la perspective du cercle, à la transversale oaa' corespondra une transversale OAA' menée par un point fixe O; au centre du cercle correspondra le foyer de la conique; à la droite située à l'infini dans le plan du cercle, correspondra la *directrice* relative à ce foyer. Soient AP, A'P' les perpendiculaires abaissées des points A, A' sur cette directrice et AQ, A'Q' les perpendiculaires abaissées des mêmes points sur la polaire du point O; on aura, d'après le premier corollaire,

$$aq = \lambda \frac{AQ}{AP}, \quad a'q' = \lambda \frac{A'Q'}{A'P'}.$$

L'équation ci-dessus devient donc

$$\frac{AP}{AQ} \pm \frac{A'P'}{A'Q'} = \text{const.}$$

Elle exprime cette propriété générale des coniques :

Si autour d'un point fixe, pris dans le plan d'une conique, on fait tourner une transversale qui rencontre la courbe en deux points, la somme ou la différence des distances de ces deux points à la directrice de la conique, divisées respectivement par leurs distances à la polaire du point fixe, sera constante.

Ce sera la *somme* si le point fixe est pris dans l'intérieur de la courbe, et la *différence* s'il est pris au dehors.

20. Maintenant, en observant que la distance d'un point de la courbe à la directrice est proportionnelle à la distance de ce point au foyer, on donnera au théorème cet autre énoncé :

Si autour d'un point fixe pris dans le plan d'une conique, on fait tourner une transversale qui la rencontre en deux points; la somme ou

la différence des distances de ces deux points au foyer de la courbe, divisées respectivement par leurs distances à la polaire du point fixe, sera constante.

Ce sera la *somme* si le point fixe est pris dans l'intérieur de la courbe, et la *différence* s'il est pris au dehors.

21. Si le point fixe est le centre de la courbe, sa polaire est à l'infini, et le théorème devient la propriété connue du foyer, savoir, que

La somme ou la différence des rayons vecteurs menés d'un foyer d'une conique aux extrémités d'un diamètre est constante.

C'est la *somme* dans l'ellipse, et la *différence* dans l'hyperbole.

22. Nous nous bornerons ici à ce seul exemple, qui suffit pour faire voir comment on démontrera dans le cône oblique les propriétés des foyers des sections coniques. On obtiendra de cette manière un assez grand nombre de propriétés nouvelles, que j'aurai occasion de démontrer ailleurs.

Principes de Géométrie plane analogues à ceux de la perspective.

23. Les principes et les considérations de perspective dont nous nous sommes servi peuvent se transformer aisément en considérations de Géométrie plane, et conduire à une autre méthode, différente dans la forme, quoique la même au fond, pour étudier les propriétés des sections coniques.

Reprenons les deux courbes c, C dans l'espace. Puisque deux droites quelconques sa, sb, menées par le point s, dans le plan de la première, font entre elles un angle égal à celui des deux droites correspondantes SA, SB dans le plan de la seconde courbe, on voit que si sur celles-ci on prend des lignes SA′, SB′,... égales aux lignes sa', sb',..., leurs extrémités seront sur une conique C′ ayant son centre en S, et qui sera égale à la courbe c. Ainsi l'on aura entre cette conique C′ et la conique C la relation

$$SA' = \lambda . \frac{SA}{AP}.$$

On conclut de là ce théorème de Géométrie plane :

Étant pris un point fixe S *dans le plan d'une conique, si de ce point on mène une droite à chaque point* A *de la courbe, et que,* AP *étant la distance de ce point à la polaire du point fixe, on prenne sur* SA *un segment* SA′ *proportionnel à* $\frac{SA}{AP}$, *le point* A′ *sera sur une section conique* C′ *qui aura son centre au point fixe.*

Si le point fixe est un foyer de la conique proposée, la nouvelle courbe sera un cercle.

24. La conique C′ peut être regardée comme la projection de la courbe *c* sur le plan de la courbe C, cette projection étant faite par des droites parallèles entre elles, et perpendiculaires au plan qui divise en deux également l'angle des plans des deux courbes *c*, C. Et quelle que soit la figure tracée dans le plan de la courbe *c*, cette projection produira une figure parfaitement égale, dans le plan de C. Il suit de là que toutes les relations *descriptives* et *métriques* entre la courbe *c* et la courbe C auront lieu entre les deux courbes C′ et C situées dans un même plan.

25. Les relations descriptives font voir que les deux courbes C′ et C sont *homologiques*, suivant l'expression de M. Poncelet, c'est-à-dire que *les points correspondants des deux figures concourent en un même point fixe* (appelé *centre d'homologie*) qui est le point S; *et les droites correspondantes concourent en des points situés tous sur une même droite* (appelée *axe d'homologie*), qui est ici la droite d'intersection des plans des deux courbes.

26. Mais, outre ces relations descriptives, il résulte encore de ce qui précède diverses relations métriques entre deux figures homologiques, qui n'ont point encore été données et qui doivent jouer un rôle important dans cette théorie et dans ses nombreuses applications. Nous nous bornerons, dans ce moment, à cette simple observation, parce que nous avons traité ailleurs de cette théorie avec tous les développements dont elle nous a paru susceptible, dans un travail où elle se présente comme cas particulier d'une méthode plus générale pour la transformation des figures, méthode propre à la *généralisation* et à la *démonstration* des vérités géométriques. Cette méthode s'applique aux figures à trois dimensions, et nous servira par conséquent à donner aux propriétés des diamètres des surfaces du second degré la même gé-

néralisation que nous venons de donner aux propriétés des diamètres des sections coniques. Nous avons voulu simplement montrer, dans le présent article, qu'avec le seul secours de la Géométrie la plus élémentaire, on pouvait, sans considérations bien savantes ni théories nouvelles, parvenir à la même généralisation, du moins pour les coniques.

Nous avons fait usage, pour cela, des seuls principes de la perspective, méthode facile, avec laquelle on est familiarisé, mais dont on n'a pas encore tiré, je crois, tous les avantages qu'elle peut procurer, parce qu'on n'y a considéré, généralement, que les relations *descriptives* des figures, et nullement les relations *métriques*. Celles-ci cependant sont plus importantes, plus utiles et plus fécondes, et conduisent à des résultats plus complets. J'aurai occasion de développer ailleurs cette idée, et d'en faire l'application à plusieurs résultats des travaux de Monge et de Carnot, que je regarde comme l'origine et le fondement des progrès que la Géométrie a faits depuis une trentaine d'années.

27. *Troisième mode de généralisation.* Ce troisième genre de généralisation consiste à substituer aux systèmes de deux demi-diamètres conjugués d'une conique, des systèmes d'un plus grand nombre de demi-diamètres, déterminés suivant des conditions communes, telles que les propriétés connues des systèmes de deux diamètres conjugués appartiennent aussi à ces systèmes d'un plus grand nombre de demi-diamètres.

En partant de cette idée de généralisation, nous sommes parvenu à l'expression commune des systèmes d'un nombre quelconque de demi-diamètres d'une conique, jouissant de toutes les propriétés des systèmes de deux demi-diamètres conjugués; ces propriétés mêmes pouvant être énoncées dans une plus grande généralité. Cette matière, pour être exposée complétement, exigerait un article assez étendu; nous y reviendrons ailleurs: nous allons simplement considérer ici les systèmes de trois demi-diamètres, parce que nous pouvons traiter ce cas par une méthode particulière, qui n'exige aucunes considérations préalables.

Nous supposerons que la conique soit une ellipse; et, au lieu de considérer trois demi-diamètres de cette courbe, nous considérerons les

trois points qui sont les extrémités de ces demi-diamètres. Cela est absolument la même chose; mais nous pourrons par là énoncer un plus grand nombre de théorèmes. Ainsi nous allons considérer plusieurs systèmes de trois points pris d'une certaine manière sur une ellipse.

28. Concevons une sphère, et trois de ses rayons rectangulaires : par leurs extrémités, menons un plan qui coupera la sphère suivant un cercle; concevons le diamètre qui passe par le pôle de ce cercle; si autour de ce diamètre on fait tourner le système des trois demi-rayons rectangulaires, il est évident que leurs extrémités se mouvront sur le cercle, ce qui prouve qu'il y aura une infinité de systèmes de trois rayons rectangulaires qui s'appuieront sur le cercle passant par les extrémités des trois premiers rayons.

Maintenant supposons que la sphère étant rapportée à trois axes coordonnés, à chacun de ses points ayant pour coordonnées x, y, z, corresponde dans l'espace un point qui ait pour coordonnées, suivant les mêmes axes respectivement, ces trois premières multipliées par trois constantes, c'est-à-dire λx, μy, νz. Ce nouveau point appartiendra à un ellipsoïde; et l'on reconnaît aisément que, à trois rayons rectangulaires de la sphère correspondront trois demi-diamètres conjugués de l'ellipsoïde; et qu'à une section plane de la sphère correspondra une section plane de l'ellipsoïde.

Il résulte de là, que

Le plan mené par les extrémités de trois demi-diamètres conjugués d'un ellipsoïde coupe cette surface suivant une ellipse E, *sur laquelle on peut prendre une infinité d'autres systèmes de trois points qui seront aussi les extrémités de trois demi-diamètres conjugués.*

29. Ce sont là les systèmes de trois points que nous allons considérer; mais il nous faut caractériser et définir les trois points par quelque propriété prise dans la nature seule de la courbe E, sans être obligé de faire usage d'une surface du second degré. Pour cela, soient A, B, C les trois points, considérés comme les extrémités de trois demi-diamètres OA, OB, OC d'un ellipsoïde; concevons le plan tangent à cette surface au point A; il sera parallèle au plan des deux demi-diamètres OB, OC : la trace de ce plan tangent sur celui de la conique E, c'est-à-dire la tangente à cette courbe, sera donc parallèle à la corde BC. Il

suit de là que le diamètre de la courbe qui aboutit au point A passe par le milieu de la corde BC. Pareillement les droites menées du centre de la courbe aux points B, C passent, respectivement, par les milieux des cordes AC, AB. On en conclut que *le centre de la courbe est le centre des moyennes distances des trois points* A, B, C.

Réciproquement, *trois points pris sur la conique, de manière que leur centre des moyennes distances soit le centre de la courbe, sont les extrémités de trois diamètres conjugués de l'ellipsoïde*. Car l'un de ces trois points étant pris arbitrairement, les deux autres sont parfaitement déterminés. Le point A, par exemple, étant donné, pour déterminer les deux autres points B, C, on mènera par le centre O′ de la conique E le demi-diamètre O′A qu'on prolongera d'une quantité O′*a* égale à la moitié de O′A, et par le point *a* on mènera une parallèle à la tangente à la courbe au point A; les intersections de la courbe par cette parallèle seront les points B, C.

Ainsi les systèmes de trois points pris sur la conique sont définis par la condition que *le centre des moyennes distances des trois points de chaque système est le centre de figure de la courbe*. Nous appellerons ces trois points, pour abréger, points *conjugués*.

Passons à la démonstration des propriétés des systèmes de trois points *conjugués*. Il nous suffira, le plus souvent, de rappeler une propriété de trois diamètres conjugués de l'ellipsoïde, pour en conclure immédiatement la propriété correspondante du système de trois points *conjugués*.

30. Le tétraèdre formé par trois demi-diamètres conjugués est constant; donc *l'aire du triangle formé par trois points conjugués est constante*.

31. Quand on a deux systèmes de demi-diamètres conjugués, le tétraèdre construit sur un demi-diamètre du premier système et deux demi-diamètres du second, a le même volume que le tétraèdre construit sur les trois autres demi-diamètres; donc

Étant pris deux systèmes de trois points conjugués, l'aire du triangle formé par un point du premier système et deux points du second, est égale à l'aire du triangle formé par les trois autres points.

32. La somme des carrés de trois diamètres conjugués de l'ellip-

soïde est constante ; or ici le centre de l'ellipsoïde est indéterminé ; on peut donc dire que :

La somme des carrés des rayons menés d'un point fixe de l'espace à trois points conjugués est constante.

Notre démonstration ne s'applique ici qu'à un point pris au dehors du plan de la courbe, puisqu'un point pris dans son plan ne peut pas être le centre d'un ellipsoïde ayant pour diamètres conjugués les droites menées de ce point aux trois points conjugués. Mais du cas général d'un point pris dans l'espace on conclut la démonstration pour le cas d'un point pris dans le plan de la courbe. Car soient A, B, C les trois points conjugués, et O un point de l'espace, on aura

$$\overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 + \overline{OC}^2 = \text{constante}.$$

Soit O′ la projection du point O sur le plan de la courbe, on aura

$$\overline{OA}^2 = \overline{OO''}^2 + \overline{O''A}^2, \quad \overline{OB}^2 = \overline{OO''}^2 + \overline{O''B}^2, \quad \overline{OC}^2 = \overline{OO''}^2 + \overline{O''C}^2.$$

Donc

$$3\overline{OO''}^2 + \overline{O''A}^2 + \overline{O''B}^2 + \overline{O''C}^2 = \text{constante};$$

d'où

$$\overline{O''A}^2 + \overline{O''B}^2 + \overline{O''C}^2 = \text{constante}.$$

Ainsi le théorème énoncé est général, quelle que soit la position du point O.

33. La somme des carrés des perpendiculaires abaissées des extrémités de trois demi-diamètres conjugués sur un plan diamétral, est constante; qu'on prenne le plan diamétral perpendiculaire au plan de la conique, on en conclut que

La somme des carrés des perpendiculaires abaissées de trois points conjugués d'une ellipse sur une droite fixe menée dans le plan de cette courbe, est constante.

34. La somme des carrés des trois faces au sommet du tétraèdre formée par trois demi-diamètres conjugués est constante ;

On conclut de là, que

Dans le tétraèdre qui a pour sommet un point fixe de l'espace et

pour base le triangle formé par trois points conjugués quelconques, la somme des carrés des trois faces au sommet est constante.

Et comme le triangle qui sert de base au tétraèdre a lui-même son aire constante, on peut dire que

La somme des carrés des quatre faces du tétraèdre est constante.

35. La somme des carrés des projections des trois faces au sommet du tétraèdre formé par trois demi-diamètres conjugués, sur un plan fixe, est constante; on conclut de là et du théorème (30) que

Le tétraèdre qui a pour sommet un point fixe de l'espace, et pour base le triangle formé par trois points conjugués, jouit de cette propriété que la somme des carrés des projections de ses faces sur un plan fixe est constante.

36. Si la projection est faite sur le plan de la figure, on en conclura, en ayant égard encore au théorème (30), que

Un point fixe pris dans le plan d'une conique étant le sommet commun à trois triangles ayant pour bases les trois côtés du triangle formé par trois points conjugués quelconques, la somme des carrés des aires de ces trois triangles sera constante.

37. Les plans tangents à une surface du second degré, aux extrémités de trois demi-diamètres conjugués, font sur une droite diamétrale fixe trois segments dont la somme des valeurs inverses des carrés est constante.

Supposons que les extrémités des trois demi-diamètres conjugués soient toujours sur une même section plane de la surface; les trois plans tangents passeront par un point fixe S, qui sera le sommet du cône circonscrit à la surface suivant cette courbe; ce point S, le centre O′ de la courbe et le centre O de la surface sont, comme on sait, en ligne droite. Supposons que la transversale OD, menée par le centre de la surface, soit parallèle au plan de la courbe; et par le centre O′ de cette courbe, menons dans son plan, une seconde transversale O′D′ parallèle à cette première; un plan tangent à la surface, en un des points de la courbe, rencontrera les deux transversales OD, O′D′ en deux points T, T′ qui seront en ligne droite avec le point S, puisque ce plan tangent passe par ce point; il s'ensuit que les deux segments OT, O′T′ sont entre eux dans le rapport $\frac{OS}{O'S}$; c'est-à-dire que le seg-

ment O'T' est au segment OT dans une raison constante, quel que soit le point de la courbe, par lequel on a mené le plan tangent; on conclut donc du théorème énoncé ci-dessus, que

Les tangentes à une conique, menées par trois points conjugués quelconques, font sur une droite fixe menée par le centre de la courbe, trois segments dont la somme des valeurs inverses des carrés est constante.

38. Concevons deux plans fixes menés par le centre d'une surface du second degré, et un système quelconque de trois demi-diamètres conjugués; que de l'extrémité de chaque demi-diamètre on abaisse des perpendiculaires sur les deux plans, et qu'on fasse leur produit; la somme des trois produits ainsi faits sera constante, quel que soit le système des trois demi-diamètres conjugués (*).

Supposons que les deux plans fixes soient perpendiculaires au plan de la courbe sur laquelle s'appuient les trois demi-diamètres conjugués; on en conclura ce théorème :

Étant menées dans le plan d'une conique deux droites fixes, et étant pris sur cette courbe trois points conjugués quelconques, si de chacun de ces points on abaisse sur les deux droites des perpendiculaires, et qu'on fasse leur produit, la somme des trois produits ainsi faits sera constante.

Si les deux droites fixes se confondent, on a le théorème (33).

Nous n'avons pas besoin de montrer l'analogie qu'il y a entre les diverses propriétés des systèmes de *trois* points conjugués d'une conique, que nous venons de démontrer, et les propriétés des systèmes de *deux* diamètres conjugués : ces analogies sont évidentes.

39. Les deux modes de généralisation que nous avons appliqués précédemment aux propriétés des diamètres conjugués, par voie de projection et de perspective, s'appliquent aussi aux propriétés des systèmes de trois points conjugués.

Ainsi, par exemple, le théorème (32) donnera le suivant :

Étant données deux coniques dans un plan, si sur la première on

(*) J'admets ce théorème comme connu, quoiqu'il n'ait pas encore été donné; je le démontrerai dans un autre moment, avec quelques autres propriétés nouvelles des diamètres conjugués.

prend trois points conjugués quelconques, et que du centre de la seconde on mène des rayons à ces trois points, la somme des carrés de ces trois rayons, divisés respectivement par les carrés des demi-diamètres de la seconde conique compris sur ces rayons, sera constante.

40. Si les deux coniques sont concentriques, et que la première soit un cercle, les trois points conjugués diviseront la circonférence en trois parties égales, et les trois rayons diviseront l'espace angulaire autour du centre en trois parties égales; on a donc ce théorème :

Si par le centre d'une conique on mène trois demi-diamètres divisant l'espace angulaire en trois parties égales, la somme des valeurs inverses des carrés de ces trois demi-diamètres sera constante.

Nous n'insisterons pas davantage sur la généralisation dont les propriétés des systèmes de trois points conjugués sont susceptibles, parce que nous reviendrons sur cet objet en traitant d'une manière générale des propriétés d'un système d'un nombre quelconque de points, pris d'une certaine manière sur une conique.

41. *Quatrième mode de généralisation.* Plusieurs des propriétés exprimées pour les carrés des distances conviennent aux cubes.

Ainsi, la somme des cubes des perpendiculaires abaissées des quatre extrémités de deux diamètres conjugués sur une droite fixe est constante.

Cette observation s'applique aussi à diverses propriétés des systèmes de trois points conjugués que nous venons de faire connaître.

Mais je reviendrai dans un autre moment sur cet objet en traitant, d'une manière générale, des propriétés de certains systèmes de points, en nombre quelconque, situés sur une section conique, où l'on aura à considérer non pas seulement les carrés et les cubes des lignes, mais aussi des puissances plus élevées.

42. Dans un autre article, nous appliquerons aux propriétés des sections coniques, relatives à leurs foyers, les quatre modes de généralisation que nous venons d'appliquer aux propriétés des diamètres conjugués : nous obtiendrons de cette manière plusieurs théorèmes nouveaux relatifs aux foyers des sections coniques.

NOTE

Sur la variation des constantes arbitraires dans les problèmes de Mécanique ;

Par M. Aug. CAUCHY (*).

1. Soient données, entre la variable t, n fonctions de t désignées par $x, y, z \ldots$, et n autres fonctions de t désignées par $u, v, w \ldots$, $2n$ équations différentielles du premier ordre et de la forme

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = \frac{dQ}{du}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{dQ}{dv}, \quad \frac{dz}{dt} = \frac{dQ}{dw} \ldots, \\ \frac{du}{dt} = -\frac{dQ}{dx}, \quad \frac{dv}{dt} = -\frac{dQ}{dy}, \quad \frac{dw}{dt} = -\frac{dQ}{dz} \ldots, \end{array} \right.$$

Q représentant une fonction de $x, y, z \ldots, u, v, w \ldots, t$. On pourra supposer les inconnues $x, y, z \ldots, u, v, w \ldots$, exprimées en fonction de t et de $2n$ constantes arbitraires $a, b, c \ldots$; et l'on aura, dans cette hypothèse,

$$\frac{dQ}{da} = \frac{dQ}{dx}\frac{dx}{da} + \frac{dQ}{dy}\frac{dy}{da} + \ldots + \frac{dQ}{du}\frac{du}{da} + \ldots;$$

(*) Cet article fait partie d'un très long mémoire sur la Mécanique céleste qui a été présenté à l'Académie de Turin le 11 octobre 1831 et dont on peut voir un extrait dans le *Bulletin universel des Sciences* de M. Férussac.

(J. Liouville.)

par conséquent

$$(2)\ \left\{\begin{array}{l}\dfrac{dQ}{da}=-\dfrac{du}{dt}\dfrac{dx}{da}-\dfrac{dv}{dt}\dfrac{dy}{da}-\ldots+\dfrac{dx}{dt}\dfrac{du}{da}+\ldots,\\ \text{on trouvera de même}\\ \dfrac{dQ}{db}=-\dfrac{du}{dt}\dfrac{dx}{db}-\dfrac{dv}{dt}\dfrac{dy}{db}-\ldots+\dfrac{dx}{dt}\dfrac{du}{db}+\ldots,\end{array}\right.$$

Si de la seconde des équations (2), différentiée par rapport à la quantité a, on retranche la première différentiée par rapport à b, on obtiendra la suivante,

$$(3)\qquad \frac{d[a,b]}{dt}=0,$$

la valeur de $[a, b]$ étant

$$(4)\qquad [a,b]=\frac{dx}{da}\frac{du}{db}-\frac{dx}{db}\frac{du}{da}+\frac{dy}{da}\frac{dv}{db}-\frac{dy}{db}\frac{dv}{da}+\ldots,$$

puis, en intégrant l'équation (3), on trouvera

$$(5)\qquad [a,b]=\text{constante}.$$

Donc, les quantités représentées par les symboles $[a, b]$, $[a, c]$,... $[b, c]$,... seront indépendantes de t. Observons d'ailleurs qu'en vertu de la formule (4), on aura généralement

$$[a,a]=0,\quad \text{et}\quad [a,b]=-[b,a].$$

Soient maintenant

$$A=a,\quad B=b,\quad C=c,\quad \text{etc.}\ldots$$

les intégrales générales des équations (1), A, B, C,... désignant des fonctions déterminées des seules variables $x, y, z,\ldots u, v, w,\ldots t$.

Faisons de plus

$$(7)\qquad (\mathrm{A},\,\mathrm{B}) = \frac{d\mathrm{A}}{dx}\frac{d\mathrm{B}}{du} - \frac{d\mathrm{A}}{du}\frac{d\mathrm{B}}{dx} + \frac{d\mathrm{A}}{dy}\frac{d\mathrm{B}}{dv} - \frac{d\mathrm{A}}{dv}\frac{d\mathrm{B}}{dy} + \ldots,$$

on aura encore

$$(\mathrm{A},\,\mathrm{A}) = 0,\qquad (\mathrm{A},\,\mathrm{B}) = -(\mathrm{B},\,\mathrm{A}).$$

D'ailleurs, si, dans l'équation qui détermine x en fonction de $a, b, c, \ldots t$, on substitue A, B, C,... au lieu de $a, b, c, \ldots$, on obtiendra une formule identique, qui, différentiée successivement par rapport à $x, y, z, \ldots u, \ldots$ donnera

$$(8)\qquad 1 = \frac{dx}{da}\frac{d\mathrm{A}}{dx} + \frac{dx}{db}\frac{d\mathrm{B}}{dx} + \ldots,\quad 0 = \frac{dx}{da}\frac{d\mathrm{A}}{dy} + \frac{dx}{db}\frac{d\mathrm{B}}{dy} + \ldots,\quad 0 = \text{etc}\ldots,$$

et, si l'on ajoute entre elles les valeurs de (A, A), (A, B), (A, C),... respectivement multipliées par $\frac{dx}{da}, \frac{dx}{db}, \frac{dx}{dc}, \ldots$ on trouvera, en ayant égard aux formules (8),

$$(9)\left\{\begin{array}{l}(\mathrm{A},\,\mathrm{A})\frac{dx}{da} + (\mathrm{A},\,\mathrm{B})\frac{dx}{db} + (\mathrm{A},\,\mathrm{C})\frac{dx}{dc} + \ldots = -\frac{d\mathrm{A}}{du};\\ \text{on trouvera de même,}\\ (\mathrm{A},\,\mathrm{A})\frac{dy}{da} + (\mathrm{A},\,\mathrm{B})\frac{dy}{db} + (\mathrm{A},\,\mathrm{C})\frac{dy}{dc} + \ldots = -\frac{d\mathrm{A}}{dv},\\ \quad\text{etc}\ldots\end{array}\right.$$

Pareillement, si l'on ajoute entre elles les valeurs de (A, A), (A, B), (A, C),... respectivement multipliées par $\frac{du}{da}, \frac{du}{db}, \frac{du}{dc}, \ldots\ldots$ on trouvera

$$(10)\left\{\begin{array}{l}(\mathrm{A},\,\mathrm{A})\frac{du}{da} + (\mathrm{A},\,\mathrm{B})\frac{du}{db} + (\mathrm{A},\,\mathrm{C})\frac{du}{dc} + \ldots = \frac{d\mathrm{A}}{dx};\\ \text{on aura de même}\\ (\mathrm{A},\,\mathrm{A})\frac{dv}{da} + (\mathrm{A},\,\mathrm{B})\frac{dv}{db} + (\mathrm{A},\,\mathrm{C})\frac{dv}{dc} + \ldots = \frac{d\mathrm{A}}{dy},\\ \quad\text{etc}\ldots\end{array}\right.$$

D'autre part, si l'on différentie successivement la première des formules (6) par rapport à chacune des quantités a, b, c,... en considérant x, y, z,...u, v, w,... comme des fonctions de a, b, c,...t, on en tirera

$$(11)\quad 1=\frac{dA}{dx}\frac{dx}{da}+\frac{dA}{dy}\frac{dy}{da}+\ldots+\frac{dA}{du}\frac{du}{da}+\ldots,\quad 0=\frac{dA}{dx}\frac{dx}{db}+\ldots,\quad 0=\frac{dA}{dx}\frac{dx}{dc}+\ldots,$$
etc.

Cela posé, si l'on combine par voie d'addition les formules (9) et (10), après avoir multiplié respectivement les formules (9) par $-\frac{du}{da}$, $-\frac{dv}{da}$, $-\frac{dw}{da}$,... et les formules (10) par $\frac{dx}{da}$, $\frac{dy}{da}$, $\frac{dz}{da}$,..., on trouvera, en ayant égard à la première des équations (11),

$$(12)\quad \begin{cases} (A,A)[a,a]+(A,B)[a,b]+(A,C)[a,c]+\ldots=1; \\ \text{on aura de même,} \\ (A,A)[b,a]+(A,B)[b,b]+(A,C)[b,c]+\ldots=0, \\ (A,A)[c,a]+(A,B)[c,b]+(A,C)[c,c]+\ldots=0, \\ \quad\text{etc.} \end{cases}$$

Les équations (12) suffisent pour déterminer les valeurs des quantités (A, B), (A, C), etc..., quand on connaît celles des quantités constantes $[a, b]$, $[a, c]$,..,$[b, c]$. Des équations semblables détermineront les valeurs de (B, A), (B, C),... etc... Donc les quantités (A, B), (A, C),...(B, C), etc... sont elles-mêmes constantes, et ne dépendent pas de la variable t.

Il est bon d'observer que, si, dans les équations (6) différentiées par rapport à t, on substitue les valeurs de $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$,... $\frac{du}{dt}$,... tirées des équations (1), les formules ainsi obtenues, savoir,

$$(13)\quad 0=\frac{dA}{dx}\frac{dQ}{du}+\frac{dA}{dy}\frac{dQ}{dv}+\ldots-\frac{dA}{du}\frac{dQ}{dx}-\ldots,\quad 0=\frac{dB}{dx}\frac{dQ}{du}+\ldots-\frac{dB}{du}\frac{dQ}{dx}-\ldots,$$

auront pour seconds membres des fonctions identiquement nulles de $x, y, z, u, v, w, \ldots t$. Car, s'il en était autrement, il existerait entre les valeurs générales de $x, y, z, \ldots u, v, w, \ldots, t$, et par conséquent aussi entre les valeurs initiales de $x, y, z, \ldots u, v, w, \ldots$ correspondantes à $t = 0$, des équations qui ne renfermeraient aucune constante arbitraire; ce qui est absurde, puisque ces valeurs initiales peuvent être choisies arbitrairement.

Supposons maintenant qu'il s'agisse d'intégrer non plus les équations (1), mais les suivantes :

$$(14)\quad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{dQ}{du} + \dfrac{dR}{du}, & \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{dQ}{dv} + \dfrac{dR}{dv}, \quad \dfrac{dz}{dt} = \dfrac{dQ}{dw} + \dfrac{dR}{dw}, \text{ etc.}\ldots, \\ \dfrac{du}{dt} = -\dfrac{dQ}{dx} - \dfrac{dR}{dx}, & \dfrac{dv}{dt} = -\dfrac{dQ}{dy} - \dfrac{dR}{dy}, \quad \dfrac{dw}{dt} = -\dfrac{dQ}{dz} - \dfrac{dR}{dz}, \text{ etc.}\ldots, \end{cases}$$

on pourra supposer encore les valeurs de $x, y, z, \ldots u, v, w, \ldots$ déterminées par les équations (6), pourvu que l'on y considère $a, b, c, \ldots$ comme devenant fonctions de t. Alors, si, dans la première des équations (6), différentiée par rapport à t, on substitue les valeurs de $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \ldots \frac{du}{dt}, \ldots$ tirées des équations (14), si d'ailleurs on a égard à la première des formules (13), qui subsiste, quelles que soient les valeurs de $x, y, z, \ldots u, v, w, \ldots t$, on trouvera

$$(15)\qquad \frac{da}{dt} = \frac{dA}{dx}\frac{dR}{du} + \frac{dA}{dy}\frac{dR}{dv} + \ldots - \frac{dA}{du}\frac{dR}{dx} - \ldots,$$

Enfin, si, après avoir exprimé R en fonction de $a, b, c, \ldots t$, on y substitue, au lieu de $a, b, c, \ldots$ les fonctions de $x, y, z, \ldots u, v, w, \ldots t$ représentées par A, B, C,..., on retrouvera identiquement la première valeur de R; et l'on aura, par suite,

$$(16)\quad \frac{dR}{dx} = \frac{dR}{da}\frac{dA}{dx} + \frac{dR}{db}\frac{dB}{dx} + \ldots, \quad \frac{dR}{dy} = \frac{dR}{da}\frac{dA}{dy} + \frac{dR}{db}\frac{dB}{dy} + \ldots, \text{ etc.}\ldots,$$
$$\frac{dR}{du} = \frac{dR}{da}\frac{dA}{du} + \ldots\ldots, \text{ etc.}$$

Cela posé, la formule (15) donnera

$$(17)\quad\begin{cases}\dfrac{da}{dt}=(\mathrm{A},\mathrm{B})\dfrac{d\mathrm{R}}{db}+(\mathrm{A},\mathrm{C})\dfrac{d\mathrm{R}}{dc}+\ldots;\ \text{on trouvera de même}\\ \dfrac{db}{dt}=(\mathrm{B},\mathrm{A})\dfrac{d\mathrm{R}}{da}+(\mathrm{B},\mathrm{C})\dfrac{d\mathrm{R}}{dc}+\ldots;\\ \text{etc.}\ldots\end{cases}$$

Telles sont les équations différentielles qui devront servir à déterminer a, b, c,... en fonction de t. Les coefficients de....... $\frac{d\mathrm{R}}{da}$, $\frac{d\mathrm{R}}{db}$, etc.,..... dans ces équations, seront, d'après les remarques précédemment faites, des fonctions des seules quantités a, b, c,...; et la variable t n'y entrera pas d'une manière explicite.

Application à la Mécanique céleste.

2. Soient $\mathfrak{M}$ la masse du Soleil, m, m', m''... les masses des planètes: prenons pour origine des coordonnées le centre du Soleil, et soient

$$x,\ y,\ z,\quad x',\ y',\ z',\ldots$$

les coordonnées des planètes dans leurs mouvements relatifs autour de cet astre. En choisissant convenablement l'unité de masse, désignant par u, v, w les vitesses de m mesurées parallèlement aux axes des x, y, z, et faisant pour abréger

$$\mathrm{M}=\mathfrak{M}+m,$$

$$r=(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}},\quad r'=(x'^2+y'^2+z'^2)^{\frac{1}{2}},\ \text{etc.},$$

$$\iota'=[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2]^{\frac{1}{2}},$$

$$\mathrm{R}=\frac{m'(xx'+yy'+zz')}{r'^3}+\ldots-\frac{m'}{\iota'}-\ldots,$$

on trouvera pour les équations différentielles du mouvement de m,

$$\frac{dx}{dt} = u, \qquad \frac{dy}{dt} = v, \qquad \frac{dz}{dt} = w,$$

$$\frac{du}{dt} = -\frac{Mx}{r^3} - \frac{dR}{dx}, \quad \frac{dv}{dt} = -\frac{My}{r^3} - \frac{dR}{dy}, \quad \frac{dw}{dt} = -\frac{Mz}{r^3} - \frac{dR}{dz}.$$

Pour déduire ces dernières formules des équations (14) du numéro précédent, il suffira de prendre

$$Q = \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} - \frac{M}{r}$$

et d'admettre que R est fonction seulement de $x, y, z, x', y', z', \ldots$ Ainsi la théorie générale exposée ci-dessus s'applique sans difficulté aux équations différentielles du mouvement des planètes.

Sur quelques Propriétés générales des Surfaces gauches ;

PAR M. CHASLES.

THÉORÈME. *Tout plan mené par une génératrice d'une surface gauche touche la surface en un point, et lui est normal en un autre point ;*

Ces deux points ont entre eux la relation suivante :

Le produit de leurs distances à un certain point fixe, situé sur la génératrice, est constant.

Tout plan mené par une génératrice coupe la surface suivant une courbe; et le point où cette courbe rencontre la génératrice est le *point de contact* du plan et de la surface. Pour déterminer le point où le plan est *normal* à la surface, il faut mener, par la même génératrice, un second plan qui soit perpendiculaire au premier, et prendre le point où ce second plan touchera la surface; ce sera le point où le premier plan lui sera normal. Nous aurions donc pu énoncer le théorème de cette manière :

Étant menés, par une même génératrice d'une surface gauche, deux plans rectangulaires, les points où ces deux plans touchent la surface auront entre eux cette relation, que, le produit de leurs distances à un certain point fixe, situé sur la génératrice, sera constant.

On peut mener d'une infinité de manières un hyperboloïde à une nappe tangent à une surface gauche suivant toute l'étendue d'une génératrice; tout plan mené par la génératrice touchera la surface et l'hyperboloïde au même point; il suffit donc de démontrer le théorème pour un hyperboloïde.

Concevons trois systèmes de deux plans rectangulaires menés par une génératrice D d'un hyperboloïde. Soient A, A′ les plans du premier système, B, B′ ceux du second, et C, C′ ceux du troisième,

Ces six plans donnent lieu à la relation d'*involution* entre les sinus de leurs inclinaisons mutuelles ; c'est-à-dire qu'on a

$$\frac{\sin C, A . \sin C, A'}{\sin C', A . \sin C', A'} = \frac{\sin C, B . \sin C, B'}{\sin C', B . \sin C', B'}.$$

Cette équation se vérifie aisément ; car les angles qui y entrent sont égaux, deux à deux. Ainsi, par exemple, l'angle $\widehat{C, A}$ est égal à l'angle $\widehat{C', A'}$, puisque les deux plans C', A' sont perpendiculaires, respectivement, aux deux plans C, A. Il s'ensuit que les facteurs des numérateurs sont égaux, un à un, aux facteurs des dénominateurs, et qu'ainsi l'équation est vérifiée.

Cette équation est une de celles qui subsistent quand on y remplace les sinus des inclinaisons des plans par les segments que ces plans font sur une transversale quelconque. Soit donc une transversale menée arbitrairement dans l'espace, et soient a, a', b, b', c, c' les points où les six plans A, A', B, B', C, C' la rencontrent ; on aura entre ces points la relation

$$\frac{ca . ca'}{c'a . c'a'} = \frac{cb . cb'}{c'b . c'b'}.$$

Supposons que la transversale soit une génératrices D' de l'hyperboloïde, et soient α, α', $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{C}'$, γ, γ' les points où les six plans sont tangents à l'hyperboloïde ; alors les six droites αa, $\alpha' a'$, $\mathfrak{C} b$, $\mathfrak{C}' b'$, γc, $\gamma' c'$ seront six génératrices du second mode de génération de l'hyperboloïde.

Considérons le quadrilatère formé par les quatre génératrices D, D', γc, $\gamma' c'$, dont les sommets, pris consécutivement, sont γ, c, c', γ'. On sait que pour une génératrice quelconque qui s'appuie en μ et m sur les deux côtés opposés $\gamma\gamma'$, cc', on a la relation constante

$$\frac{mc}{mc'} = k . \frac{\mu\gamma}{\mu\gamma'},$$

où k est une constante (*).

(*) J'ai démontré ce théorème dans le tome II de la *Correspondance sur l'École Polytechnique*, p. 446. Depuis il a été reproduit dans plusieurs traités de Géométrie descriptive.

Prenant successivement, pour la génératrice μm, les quatre droites αa, $\alpha' a'$, $\mathcal{C} b$, $\mathcal{C}' b'$, on aura

$$\frac{ac}{ac'} = k \cdot \frac{\alpha\gamma}{\alpha\gamma'}, \quad \frac{a'c}{a'c'} = k\,\frac{\alpha'\gamma}{\alpha'\gamma'},$$
$$\frac{bc}{bc'} = k \cdot \frac{\mathcal{C}\gamma}{\mathcal{C}\gamma'}, \quad \frac{b'c}{b'c'} = k\,\frac{\mathcal{C}'\gamma}{\mathcal{C}'\gamma'},$$

D'après ces relations, l'équation ci-dessus devient celle-ci :

$$\frac{\gamma\alpha \cdot \gamma\alpha'}{\gamma'\alpha \cdot \gamma'\alpha'} = \frac{\gamma\mathcal{C} \cdot \gamma\mathcal{C}'}{\gamma'\mathcal{C} \cdot \gamma'\mathcal{C}'}.$$

α, α', $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'$, γ, γ' sont les points de contact des six plans A, A', B, B', C, C' avec l'hyperboloïde, et par conséquent avec la surface gauche. Et si l'on ne considère que les trois plans A, B, C qui sont menés arbitrairement par la génératrice D, nous dirons que α, $\mathcal{C}$, γ sont les points où ils touchent la surface, et α', $\mathcal{C}'$, γ' les points où ils lui sont normaux. L'équation ci-dessus exprime donc une propriété générale de la surface, relative aux trois plans A, B, C. Cette équation est celle qu'on appelle *involution de six points ;* nous pouvons donc dire que

Si l'on mène trois plans quelconques par une génératrice d'une surface gauche, les trois points où ils seront tangents à la surface, et les trois points où ils lui seront normaux seront six points en involution.

Maintenant supposons que le plan C soit mené parallèlement à la génératrice de la surface qui est infiniment voisine de la génératrice D; alors le point de contact du plan C avec la surface sera à l'infini; ou, en d'autres termes, la courbe d'intersection de la surface par le plan C ne rencontrera la génératrice D qu'à l'infini, puisque ce plan rencontre la génératrice infiniment voisine à l'infini. Ainsi le point γ est à l'infini, et l'équation ci-dessus se réduit à

$$\gamma'\alpha \cdot \gamma'\alpha' = \gamma'\mathcal{C} \cdot \gamma'\mathcal{C}'.$$

Donc le produit des distances des deux points α, α' au point γ' est égal au produit des distances des deux points $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'$ au même point γ'.

Ce qui démontre le théorème énoncé.

Observations. Le point γ' est, comme on voit, celui où le plan mené par la génératrice D, parallèlement à la génératrice infiniment

voisine, est *normal* à la surface. Appelons O ce point, au lieu de y'. Ce point O jouit de quelques propriétés géométriques.

Pour déterminer ce point, il faut concevoir le plan mené par la génératrice D parallèlement à la génératrice infiniment voisine D′, et mener par la droite D un second plan perpendiculaire à ce premier; puis chercher le point où ce second plan touchera la surface : ce point de contact sera le point O. Or le second plan passera par la droite qui mesure la plus courte distance des deux génératrices D, D′. Cette droite, qui est infiniment petite, est située sur la surface; le point où elle s'appuie sur la génératrice D est donc le point de contact du second plan avec la surface. C'est donc le point O.

Ainsi, *le point* O *est le point où la droite qui mesure la plus courte distance entre la génératrice* D *et la génératrice infiniment voisine, s'appuie sur la première.*

Que par tous les points de la génératrice D on mène des plans perpendiculaires à cette droite, et des tangentes aux courbes d'intersection de la surface par ces plans; ces tangentes s'appuieront sur la génératrice infiniment voisine D′, et formeront un paraboloïde hyperbolique tangent à la surface suivant la génératrice D.

Le sommet de ce paraboloïde est le point O.

En effet, ce qui caractérise le sommet d'un paraboloïde, c'est que le plan tangent en ce point est perpendiculaire aux deux plans *directeurs* du paraboloïde (*). Or le premier plan directeur du paraboloïde est perpendiculaire à la génératrice D; le plan tangent en O lui est donc perpendiculaire. Le second plan directeur est parallèle aux deux génératrices D, D′; et, par conséquent, perpendiculaire à la droite qui mesure la plus courte distance de ces deux génératrices; donc le plan tangent en O, qui passe par cette droite, est perpendiculaire à ce second plan directeur. Donc *le point* O *est le sommet du paraboloïde.*

Maintenant supposons que le paraboloïde tourne autour de la génératrice D, et fasse un quart de conversion; ses génératrices qui étaient perpendiculaires à la droite D lui seront restées perpendiculaires et

(*) Les plans *directeurs* d'un paraboloïde sont les deux plans auxquels les génératrices des deux modes de génération du paraboloïde sont respectivement parallèles.

seront devenues normales à la surface, puisqu'elles étaient situées auparavant dans ses plans tangents. On conclut de là que

Les normales à une surface gauche, menées par les différents points d'une de ses génératrices, forment un paraboloïde qui a son sommet au point O *déterminé ci-dessus.*

De ces considérations résulte la construction suivante du point O :

Qu'on trois points de la génératrice D on mène les normales à la surface ; qu'on cherche une droite qui s'appuie sur ces trois normales, et qu'on mène la droite qui mesure la plus courte distance entre cette droite et la génératrice D; *le point où cette plus courte distance s'appuiera sur la génératrice* D *sera le point* O.

Enfin, l'équation

$$O\alpha . O\alpha' = O\mathcal{C} . O\mathcal{C}'$$

donne un autre moyen pour construire le point O; car les points α, α', $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'$ étant connus, cette équation fait connaître le point O.

Sur chaque génératrice d'une surface gauche il existe un pareil point O, qu'on peut définir aussi comme étant le sommet du paraboloïde normal à la surface suivant la génératrice. Tous ces points forment sur la surface une ligne courbe qui jouit de diverses propriétés que nous examinerons dans un autre article. Nous nous bornerons à dire ici que, sur un paraboloïde, cette courbe est l'ensemble de deux paraboles qui ont pour axe commun celui du paraboloïde.

TROISIÈME MÉMOIRE

Sur le développement des fonctions ou parties de fonctions en séries dont les divers termes sont assujétis à satisfaire à une même équation différentielle du second ordre, contenant un paramètre variable;

PAR J. LIOUVILLE (*).

(Présenté à l'Académie des Sciences. — Août 1837.)

I.

1. Dans ce troisième mémoire, comme dans les deux précédents, je considère les fonctions V qui satisfont à l'équation différentielle

$$(1) \qquad \frac{d\left(k\frac{dV}{dx}\right)}{dx} + (gr - l)V = 0,$$

et aux conditions définies

$$(2) \qquad \frac{dV}{dx} - hV = 0 \quad \text{pour } x = \mathrm{x},$$

$$(3) \qquad \frac{dV}{dx} + HV = 0 \quad \text{pour } x = \mathrm{X}:$$

x est une variable réelle qui peut croître depuis x jusqu'à X: h, H sont deux coefficients positifs, et g, k, l trois fonctions positives de x. Pour que les équations (1), (2), (3) aient lieu en même temps, il faut que le paramètre r soit choisi parmi les racines (réelles et positives) r_1, r_2, r_3,.... d'une certaine équation transcendante

(*) *Voyez* le tome I$^{\text{er}}$ de ce Journal, page 253 et le tome II, page 16.

$\varpi(r) = 0$. Cela posé, on veut démontrer la convergence et trouver la somme de la série

$$(4) \qquad \Sigma \left\{ \frac{V \int_x^X gV f(x) dx}{\int_x^X gV^2 dx} \right\},$$

dans laquelle le signe Σ s'applique aux valeurs de r dont il vient d'être question et où $f(x)$ représente une fonction réelle (*) de x. Cette fonction $f(x)$ est arbitraire : elle peut changer de forme ou d'expression analytique dans l'étendue des valeurs de la variable; mais nous supposerons en général que pour chaque valeur déterminée de x elle prend une valeur unique et déterminée, et que, de plus, elle croît infiniment peu lorsque la variable x elle-même subit un accroissement infiniment petit. J'ai démontré le premier la convergence de la série (4), dans un mémoire imprimé à la page 16 de ce volume; mais l'analyse dont j'ai fait usage alors, quoique simple et élégante, n'est pas encore assez générale. En effet, elle exige que les dérivées premières et secondes des fonctions g, k, $f(x)$ ne deviennent jamais infinies lorsque x croît de x à X, et que, de plus, $f(x)$ vérifie les deux conditions suivantes :

$$(5) \qquad \begin{cases} \dfrac{df(x)}{dx} - hf(x) = 0 & \text{pour } x = x, \\[2mm] \dfrac{df(x)}{dx} + Hf(x) = 0 & \text{pour } x = X. \end{cases}$$

Je me propose ici de faire disparaître, autant qu'il me sera possible, ces restrictions diverses, et surtout celles relatives à la fonction $f(x)$. Il me suffira, pour cela, de modifier un peu la méthode dont je me suis servi précédemment, ce qui, je dois l'avouer, en altérera l'élégance. Mais la démonstration nouvelle qui résultera de ce changement sera aussi rigoureuse que l'ancienne et beaucoup plus complète. En l'exposant j'admettrai, pour plus de simplicité, que des deux nombres h, H aucun n'est infini.

(*) Si la fonction $f(x)$ était imaginaire et de la forme $f_1(x) + \sqrt{-1} f_2(x)$, on décomposait la série (4) en deux autres séries semblables, relatives aux deux autres fonctions réelles $f_1(x)$, $f_2(x)$.

2. Il faut d'abord, comme dans mon second mémoire, changer de variable indépendante et remplacer la fonction V par une autre fonction U. Posons

$$z = \int_x^x \sqrt{\frac{g}{k}}.dx, \quad \theta = \frac{1}{\sqrt[4]{gk}}, \quad V = \theta U, \quad r = \rho^2 :$$

l'équation (1) deviendra

$$(6) \qquad \frac{d^2U}{dz^2} + \rho^2 U = \lambda U,$$

λ représentant la quantité

$$\frac{1}{\theta\sqrt{gk}}\left(l\sqrt{\frac{k}{g}}.\theta - \frac{d.\sqrt{gk}}{dz}.\frac{d\theta}{dz} - \sqrt{gk}.\frac{d^2\theta}{dz^2}\right).$$

Quant aux équations (3), (4), si on leur applique les mêmes transformations, elles prendront la forme

$$(7) \qquad \frac{dU}{dz} - h'U = 0 \quad \text{pour } z = 0,$$

$$(8) \qquad \frac{dU}{dz} + H'U = 0 \quad \text{pour } z = Z,$$

Z étant la valeur de z qui répond à $x = X$; h', H' désignent deux constantes différentes de h, H, et qui ne sont pas assujéties, comme ces dernières, à la condition d'être positives.

On aura en même temps, par un calcul très simple,

$$\int_x^X gV^2dx = \int_0^Z U^2dz,$$

En faisant

$$f(x)\sqrt[4]{gk} = \mathrm{f}(z),$$

on aura aussi

$$\int_x^X gVf(x)dx = \int_0^Z U\mathrm{f}(z)\,dz.$$

Représentons par θT le terme général de la série (4) : cette série sera

exprimée par $\theta\Sigma T$, et la valeur de T pourra se mettre sous la forme

$$(9) \qquad T = \frac{U\int_0^Z U f(z)\, dz}{\int_0^Z U^2 dz},$$

que nous lui attribuerons désormais exclusivement. Nous considérerons, dans les numéros qui suivent, les termes de la série ΣT qui répondent à des valeurs de ρ très grandes, et nous démontrerons la convergence de cette série, quelle que soit la fonction $f(x)$. Pour l'exactitude de nos raisonnements, il suffira que la valeur absolue $\sqrt{\lambda^2}$ de la fonction λ soit tellement composée en z que l'intégrale $\int_0^Z \sqrt{\lambda^2}.dz$ ait une valeur finie et puisse être regardée comme équivalente à la somme de ses éléments. Cette condition est remplie, dans certains cas, même par une fonction λ qui devient infinie pour une ou plusieurs valeurs de z comprises entre o et Z. Quand la convergence de la série (4) aura été ainsi démontrée, on pourra conclure de la méthode développée dans mon premier mémoire, que la somme de cette série est $f(x)$ depuis $x = \text{x}$ jusqu'à $x = \text{X}$. Pour l'exactitude de l'équation $f(x) = \theta\Sigma T$, il n'est pas du tout nécessaire que la fonction $f(x)$ satisfasse aux conditions (5) : ces conditions, que j'ai imposées mal à propos à la fonction $f(x)$ dans mes deux premiers mémoires, sont inutiles et doivent être absolument mises de côté.

II.

3. Désignons, comme dans mon second mémoire, par λ', U', ce que deviennent λ et U lorsqu'on y remplace z par z' : nous tirerons de l'équation (6) l'équation nouvelle

$$(10) \qquad U = \cos \rho z + \frac{h' \sin \rho z}{\rho} + \frac{1}{\rho}\int_0^z \lambda' U' \sin \rho (z - z') dz',$$

qui a été donnée déjà à la page 24 de ce volume. Cette valeur de U satisfait à la fois à l'équation indéfinie (6) et à la condition définie (7) : elle suppose que l'on ait pris pour unité la valeur arbitraire de U relative à $z = 0$. On peut s'en servir pour trouver une limite supérieure de la plus grande valeur abolue que U puisse

prendre lorsque z croît de o à Z. Soit en effet Q cette valeur *maxima*. Si la quantité $\sqrt{\lambda^2}$ est telle que l'intégrale $\int_0^Z \sqrt{\lambda^2}.dz$ puisse être regardée comme équivalente à la somme de ses éléments, il en sera de même *à fortiori* de l'intégrale

$$\int_0^z \lambda' \mathrm{U}' \sin \rho(z-z')dz' :$$

la valeur de cette dernière intégrale augmentera donc en remplaçant λ' par $\sqrt{\lambda'^2}$, U' par Q, $\sin \rho(z-z')$ par l'unité et z par Z : d'un autre côté, le maximum de $\cos \rho z + \frac{h' \sin \rho z}{\rho}$ est $\sqrt{1+\left(\frac{h'}{\rho}\right)^2}$: donc le second membre de l'équation (10) est constamment plus petit que

$$\sqrt{1+\left(\frac{h'}{\rho}\right)^2} + \frac{Q}{\rho}\int_0^Z \sqrt{\lambda^2}.dz,$$

et comme, d'un autre côté, il peut devenir égal à Q, cela exige que l'on ait

$$Q < \sqrt{1+\left(\frac{h'}{\rho}\right)^2} + \frac{Q}{\rho}\int_0^Z \sqrt{\lambda^2}.dz.$$

Ainsi, pour des valeurs de ρ supérieures à $\int_0^Z \sqrt{\lambda^2}.dz$, il vient

$$Q < \frac{\sqrt{1+\left(\frac{h'}{\rho}\right)^2}}{1-\frac{1}{\rho}\int_0^Z \sqrt{\lambda^2}.dz}.$$

On peut donc trouver une limite indépendante de ρ au-dessous de laquelle Q et U tomberont toujours, pour des valeurs de ρ de plus en plus grandes : afin de mieux préciser cette limite, nous dirons que l'on a par exemple $\mathrm{U} < 2$ lorsque le paramètre ρ est suffisamment grand. Ce théorème a été démontré, mais d'une manière moins générale, dans mon second mémoire.

III.

4. En différenciant l'équation (10) par rapport à z, on obtient

la valeur de $\frac{dU}{dz}$: il est aisé d'en déduire ensuite celle de $\frac{dU}{dz} + H'U$ relative $z = Z$, et par conséquent de former, d'après la condition (8), l'équation dont les valeurs de ρ dépendent. En posant, comme dans le mémoire déjà cité,

$$P = h' + H' + \int_0^Z \lambda' U' \left(\cos \rho z' - \frac{H' \sin \rho z'}{\rho}\right) dz',$$
$$P' = \frac{H'h'}{\rho} + \int_0^Z \lambda' U' \left(\frac{H' \cos \rho z'}{\rho} + \sin \rho z'\right) dz',$$

cette équation sera

$$\text{(11)} \qquad \operatorname{tang} \rho Z = \frac{P}{\rho - P'}.$$

D'après la composition des fonctions P et P', on voit que pour de grandes valeurs de ρ elles ne peuvent jamais dépasser un certain maximùm absolu indépendant de ce paramètre et facile à calculer : en se rappelant que l'on a $U < 2$, on trouve en effet

$$P < \sqrt{(h' + H')^2} + 2\sqrt{1 + \left(\frac{H'}{\rho}\right)^2} \cdot \int_0^Z \sqrt{\lambda^2} . dz,$$
$$P' < \sqrt{\frac{H'^2 h'^2}{\rho^2}} + 2\sqrt{1 + \left(\frac{H'}{\rho}\right)^2} \cdot \int_0^Z \sqrt{\lambda^2} . dz,$$

d'où résulte

$$P < \sqrt{(h' + H')^2} + 2\sqrt{2} . \int_0^Z \sqrt{\lambda^2} . dz,$$
$$P' < 1 + 2\sqrt{2} \int_0^Z \sqrt{\lambda^2} . dz,$$

dès que le paramètre ρ a une valeur numérique supérieure à celle des deux quantités H', $H'h'$: il est inutile d'avertir que dans ces inégalités les radicaux sont tous pris positivement.

On trouvera de même une limite indépendante de ρ pour les deux dérivées $\frac{dP}{d\rho}$, $\frac{dP'}{d\rho}$. On peut conclure de là que pour des va-

leurs de ρ très grandes, le second membre de l'équation (11) et sa dérivée prise par rapport à deviennent de très petits nombres.

5. Maintenant mettons l'équation (11) sous la forme

$$\tag{12} \operatorname{tang} \rho Z - \frac{P}{\varepsilon - P} = 0.$$

Désignons par n un nombre entier très grand et substituons au lieu de ρ les deux quantités

$$\frac{1}{Z}\left(n\pi - \frac{\pi}{4}\right), \quad \frac{1}{Z}\left(n\pi + \frac{\pi}{4}\right)$$

dans la fonction

$$\operatorname{tang} \rho Z - \frac{P}{\varepsilon - P}:$$

par ces substitutions, le terme $\operatorname{tang} \rho Z$ deviendra successivement -1, $+1$: le second terme au contraire sera très petit. Donc, la fonction dont il s'agit (fonction qui reste évidemment continue entre les limites citées) passera du négatif au positif, d'où l'on doit conclure que entre les limites

$$\frac{1}{Z}\left(n\pi - \frac{\pi}{4}\right), \quad \frac{1}{Z}\left(n\pi + \frac{\pi}{4}\right),$$

il existe une racine de l'équation (12) ou de l'équation (11). Je dis de plus qu'il n'y en a qu'une; car, dans le cas contraire, il faudrait que la dérivée prise par rapport à ρ de la fonction

$$\operatorname{tang} \rho Z - \frac{P}{\varepsilon - P}$$

pût devenir égale à zéro entre ces limites, ce qui n'est pas, puisque lorsque ρZ varie depuis $n\pi - \frac{\pi}{4}$ jusqu'à $n\pi + \frac{\pi}{4}$, la dérivée de $\operatorname{tang} \rho Z$ est toujours $> Z$, tandis que celle de $\frac{P}{\varepsilon - P}$ est très petite.

Il y a de même une seule racine entre

$$\frac{1}{Z}\left[(n+1)\pi - \frac{\pi}{4}\right] \text{ et } \frac{1}{Z}\left[(n+1)\pi + \frac{\pi}{4}\right],$$

entre

$$\frac{1}{Z}\left[(n+2)\pi-\frac{\pi}{4}\right] \quad \text{et} \quad \frac{1}{Z}\left[(n+2)\pi+\frac{\pi}{4}\right], \text{ etc.}$$

Mais il n'en existe aucune entre

$$\frac{1}{Z}\left(n\pi+\frac{\pi}{4}\right) \quad \text{et} \quad \frac{1}{Z}\left[(n+1)\pi-\frac{\pi}{4}\right],$$

entre

$$\frac{1}{Z}\left[(n+1)\pi+\frac{\pi}{4}\right] \quad \text{et} \quad \frac{1}{Z}\left[(n+2)-\frac{\pi}{4}\right], \text{ etc.},$$

comme on peut s'en assurer en observant que, pour les valeurs de ρ comprises dans chacun de ces intervalles, on a $\text{tang}^2 \rho Z > 1$.

6. La racine ρ comprise entre

$$\frac{1}{Z}\left(n\pi-\frac{\pi}{4}\right) \quad \text{et} \quad \frac{1}{Z}\left(n\pi+\frac{\pi}{4}\right)$$

s'obtient du reste sans difficulté puisque l'équation (11) résolue donne

$$\rho Z = n\pi + \text{arc tang}\, \frac{P}{\varrho - P}:$$

en remplaçant $\text{arc tang}\, \frac{P}{\varrho-P}$ par $\frac{P}{\varrho-P}$ ou par $\frac{P}{\varrho}$, et ensuite ρ par $\frac{n\pi}{Z}$ dans la fraction $\frac{P}{\varrho}$, on aura une expression de ρ très approchée. On voit par là que la valeur de ρ est de la forme

$$\rho = \frac{n\pi}{Z} + \frac{B_n}{n}, \tag{13}$$

B_n étant une fonction de n dont la valeur absolue restera toujours inférieure à une certaine limite, indépendante de n, que l'on pourrait assigner.

7. Les racines qui viennent après celles-là par ordre de grandeur s'en déduiront en augmentant successivement le nombre n d'une unité. En les élevant au carré, on obtiendra les valeurs correspondantes du paramètre r : on pourrait même démontrer que la $(n+1)^{\text{ième}}$

des racines $r_1, r_2,$ etc., est précisément exprimée par

$$\left(\frac{n\pi}{Z} + \frac{B_n}{n}\right)^2 :$$

c'est ce que j'ai fait voir à la page 30 de ce volume et ce sur quoi il est inutile d'insister ici. Il suffit d'observer que la partie principale des racines ρ fournies par la formule

$$\rho = \frac{n\pi}{Z} + \frac{B_n}{n}$$

croît proportionnellement au nombre n.

Dans la suite de ce mémoire, nous désignerons par la caractéristique Ψ (et aussi par $\Psi', \Psi'', \Psi''', \ldots$) toute fonction de n qui ne dépassera jamais un certain *maximum* absolu N : $\frac{\rho}{n}$ sera par exemple une de ces fonctions, d'où il est aisé de conclure que les séries ayant pour terme général $\frac{\Psi}{n\rho}$ ou $\frac{\Psi}{\rho^2}$ sont convergentes, puisqu'en remplaçant ρ par $n\left(\frac{\rho}{n}\right)$ elle se ramènent à la forme $\Sigma\left\{\frac{\Psi'}{n^2}\right\}$.

IV.

8. Considérons les deux intégrales

$$(14) \qquad \int_0^z f(z) \sin \rho z dz, \qquad \int_0^z f(z) \cos \rho z dz,$$

f(z) désignant la fonction de z qui se trouve au numérateur de la fraction (9) ou plus généralement une fonction déterminée de z qui ne devienne jamais infinie. Je dis que ces deux intégrales, considérées comme fonctions de ρ, sont de la forme $\frac{\Psi}{\rho}$. Pour établir ce théorème très utile et, je crois, déjà connu, il suffira de montrer que la valeur de chacune d'elles est inférieure à

$$\frac{2(p+q+1) \cdot f_1}{\rho},$$

f_1 étant le maximum absolu de f(z), p le nombre de fois où la fonction f(z) change de signe entre les limites o, z, et q le nombre de fois où (sans changer de signe) elle cesse d'être croissante ou

constante pour devenir décroissante, ou bien cesse au contraire d'être décroissante ou constante pour devenir croissante.

Or, soient z', z'',..., $z^{(p+q)}$ les valeurs pour lesquelles s'effectue ainsi un changement dans l'état de la fonction, en sorte que de l'une de ces valeurs à la suivante cette fonction ait un signe invariable et soit toujours croissante ou toujours décroissante, ces derniers mots n'excluant pas toutefois les cas où elle resterait constante. Chacune des intégrales (14) se partagera en $(p+q+1)$ autres intégrales prises, la première entre les limites 0, z', la seconde entre les limites z', z'',..., la dernière entre les limites $z^{(p+q)}$ et z. Désignons par a une quelconque des quantités 0, z', z''... et par b celle qui la suit immédiatement dans l'ordre des indices. Si je prouve que la valeur numérique de chaque intégrale partielle

$$\mathrm{M}=\int_a^b \mathrm{f}(z)\sin\rho z dz\,,\qquad \mathrm{M}'=\int_a^b \mathrm{f}(z)\cos\rho z dz$$

est inférieure à $\frac{2\mathrm{f}_1}{\rho}$, il sera prouvé *à fortiori* que les intégrales (14) sont toutes deux plus petites que $\frac{2(p+q+1).\mathrm{f}_1}{\rho}$, conformément au théorème énoncé.

Soit m' le nombre entier immédiatement supérieur à $\frac{\rho a}{\pi}$, et $(m+m')$ le nombre entier immédiatement inférieur à $\frac{\rho b}{\pi}$. Depuis $z=a$ jusqu'à $z=\frac{m'\pi}{\rho}$, $\mathrm{f}(z)\sin\rho z dz$ conservera toujours le même signe : pour fixer les idées, admettons que ce soit le signe $+$: entre les limites $z=\frac{m'\pi}{\rho}$, $z=\frac{(m'+1)\pi}{\rho}$, il est clair que la valeur de $\mathrm{f}(z)\sin\rho z dz$ sera au contraire négative, puis elle redeviendra positive depuis $z=\frac{(m'+1)\pi}{\rho}$ jusqu'à $z=\frac{(m'+2)\pi}{\rho}$ et ainsi de suite. Partageons l'intégrale M en un certain nombre d'autres intégrales prises, la première depuis $z=a$ jusqu'à $z=\frac{m'\pi}{\rho}$, la seconde depuis $z=\frac{m'\pi}{\rho}$ jusqu'à $z=\frac{(m'+1)\pi}{\rho}$,..., la dernière depuis $z=\frac{(m+m')\pi}{\rho}$ jusqu'à $z=b$. Ces diverses intégrales, dont

nous désignerons par $D_0, D_1, D_2, \ldots, D_m, D_{m+1}, D$, les valeurs absolues seront alternativement positives et négatives. De plus, si la valeur absolue de $f(z)$ est décroissante, il est aisé de voir qu'on aura

$$D_1 > D_2 \ldots > D_m > D_{m+1} > D,$$

tandis qu'il viendra au contraire

$$D_{m+1} > D_m \ldots > D_2 > D_1 > D_0,$$

si la valeur absolue de $f(z)$ est croissante. Dans le premier cas, l'intégrale M sera comprise entre D_0 et $D_0 - D_1$ et par conséquent sa valeur numérique sera inférieure au plus grand des deux nombres D_0, D_1 : dans le second cas, cette valeur numérique sera inférieure au plus grand des deux nombres D, D_{m+1}. Or, toutes les quantités D_0, $D_1 \ldots$, D_{m+1}, D grandissent lorsqu'on remplace $f(z)$ par son maximum f_1 : de plus D_0 et D peuvent grandir encore si, après ce changement, on remplace a par $\frac{(m'-1)\pi}{\varrho}$ et b par $\frac{(m+m'+1)\pi}{\varrho}$. Or, quand on a effectué ces diverses opérations, ces intégrales deviennent toutes égales entre elles et à $\frac{2f_1}{\varrho}$: donc à *fortiori* la valeur numérique de M est $< \frac{2f_1}{\varrho}$. Une démonstration semblable s'appliquera à l'intégrale M'.

V.

9. Il est aisé de trouver à quelle forme on peut réduire l'intégrale $\int_0^z Uf(z)dz$. Puisque l'on a

$$U = \cos\rho z + \frac{h'\sin\varrho z}{\varrho} + \frac{1}{\varrho}\int_0^z \lambda' U' \sin\rho(z - z')\,dz',$$

ou, ce qui est la même chose,

$$U = \cos\rho z - \frac{\cos\varrho z}{\varrho}\int_0^z \lambda U \sin\rho z dz$$
$$+ \frac{\sin\varrho z}{\varrho}\left(h' + \int_0^z \lambda U \cos\rho z dz\right),$$

l'intégrale en question est composée de trois parties distinctes; la pre-

mière, savoir $\int_0^s f(z)\cos\rho z dz$, est de la forme $\frac{\Psi}{\rho}$, d'après ce qu'on vient de démontrer. Je vais montrer que les autres sont de la forme $\frac{\Psi'}{\rho^2}$. En effet l'intégrale double

$$\int_0^s f(z)\cos\rho z dz \int_0^s \lambda U \sin\rho z dz,$$

à l'aide d'une intégration par parties et en posant

$$\int_0^s f(z)\cos\rho z dz = \frac{\Psi}{\rho},$$

devient

$$\frac{\Psi}{\rho}\int_0^s \lambda U \sin\rho z dz - \frac{1}{\rho}\int_0^s \lambda U \Psi \sin\rho z dz:$$

par suite elle prend la forme $\frac{\Psi'}{\rho^2}$ lorsqu'on la multiplie par $-\frac{1}{\rho}$. De même l'intégrale

$$\int_0^s f(z)\sin\rho z dz \left(h' + \int_0^s \lambda U \cos\rho z dz\right),$$

à l'aide d'une intégration par parties et en posant

$$\int_0^s f(z)\sin\rho z dz = \frac{\Psi}{\rho},$$

devient

$$\frac{\Psi}{\rho}\left(h' + \int_0^s \lambda U \cos\rho z dz\right) - \frac{1}{\rho}\int_0^s \lambda U \Psi \cos\rho z dz:$$

par suite elle prend la forme $\frac{\Psi'}{\rho^2}$ lorsqu'on la multiplie par $\frac{1}{\rho}$.

10. La propriété de l'intégrale $\int_0^s f(z) U dz$ que nous venons de démontrer subsiste encore lorsque sa limite supérieure devient égale à Z. On en conclut que le numérateur du terme général T de la série ΣT est de la forme

$$\frac{\Psi}{\rho} + \frac{\Psi'}{\rho^2},$$

la valeur de $\frac{\Psi}{\rho}$ étant précisément

$$\cos \rho z \int_0^Z f(z) \cos \rho z dz:$$

quant au dénominateur $\int_0^Z U^2 dz$, il est égal à

$$\int_0^Z \cos^2 \rho z dz + \frac{2}{\rho} \int_0^Z \cos \rho z . R dz + \frac{1}{\rho^2} \int_0^Z R^2 dz,$$

R représentant la quantité

$$h' \sin \rho z + \int_0^z \lambda U' \sin \rho (z - z') dz'.$$

Or,

$$\int_0^Z \cos^2 \rho z dz = \frac{Z}{2} + \frac{\sin 2\rho Z}{4\rho}:$$

on voit donc qu'abstraction faite des termes divisés par ρ la valeur de $\int_0^Z U^2 dz$ se réduit à $\frac{Z}{2}$. D'après cela on peut écrire

$$\int_0^Z U^2 dz = \frac{Z}{2}\left(1 + \frac{\psi'}{\rho}\right),$$

ce qui donne

$$T = \left(\frac{\psi}{\rho} + \frac{\psi'}{\rho^2}\right) \cdot \frac{2}{Z\left(1 + \frac{\psi''}{\rho}\right)}.$$

Mais cette valeur de T peut elle-même se mettre sous la forme

$$T = \frac{2\psi}{\rho Z} + \frac{\psi''}{\rho^2},$$

et la série $\Sigma \frac{\psi''}{\rho^2}$ est convergente. Donc, pour prouver la convergence de la série ΣT, il suffit d'établir celle de la série plus simple

$$\Sigma \frac{\psi}{\rho} \quad \text{ou} \quad \Sigma \cos \rho z \int_0^Z f(z) \cos \rho z dz$$

que nous désignerons par ΣY.

11. La formule

$$\rho = \frac{n\pi}{Z} + \frac{B_n}{n}$$

donne

$$\cos \rho z = \cos \frac{n\pi z}{Z} \cos \frac{zB_n}{n} - \sin \frac{n\pi z}{Z} \sin \frac{zB_n}{n}.$$

On a $\sin \frac{zB_n}{n} = 0$ aux quantités près de la forme $\frac{\psi}{n}$ ou $\frac{\psi}{\rho}$ et $\cos \frac{zB_n}{n} = 1$ aux quantités près de la forme $\frac{\psi}{\rho^2}$. Il est donc permis de poser

$$\cos \rho z = \cos \frac{n\pi z}{Z} + \frac{\psi'}{\rho}$$

et l'on pourrait écrire aussi

$$\cos \rho z = \cos \frac{n\pi z}{Z} - \frac{zB_n}{n} \sin \rho z + \frac{\psi''}{\rho^2}.$$

On a donc d'abord

$$Y = \left(\cos \frac{n\pi z}{Z} + \frac{\psi'}{\rho}\right) \int_0^Z f(z) \cos \rho z dz,$$

valeur qu'il est aisé de réduire à la forme

$$Y = \cos \frac{n\pi z}{Z} \int_0^Z f(z) \cos \rho z dz + \frac{\psi'''}{\rho^2},$$

en se rappelant que l'intégrale $\int_0^Z f(z) \cos \rho z dz$ est de la forme $\frac{\psi}{\rho}$. En remplaçant $\cos \rho z$ par $\cos \frac{n\pi z}{Z} - \frac{zB_n}{n} \sin \rho z + \frac{\psi''}{\rho^2}$, et observant que l'intégrale $\int_0^Z z f(z) \sin \rho z dz$ est aussi de la forme $\frac{\psi}{\rho}$, on a ensuite

$$Y = \cos \frac{\pi n z}{Z} \int_0^Z f(z) \cos \frac{n\pi z}{Z} dz + \frac{\psi^{\text{IV}}}{\rho^2}.$$

Or la série $\Sigma \frac{\psi^{\text{IV}}}{\rho^2}$ est convergente, et il en est de même de la série périodique

$$\Sigma \cos \frac{n\pi z}{Z} \int_0^Z f(z) \cos \frac{n\pi z}{Z} dz$$

dont les géomètres se sont beaucoup occupés (*). Donc la convergence de la série ΣY (et par conséquent de la série ΣT) est incontestable.

VI.

11. Nous avons dit que nous regardions en général la fonction $f(x)$ comme assujétie à prendre un accroissement infiniment petit lorsque x croît infiniment peu : cependant la démonstration précédente de la convergence de la série ΣT est indépendante de cette restriction : elle ne cesserait pas d'être exacte si, pour une ou plusieurs valeurs de x, la fonction $f(x)$ (qui ne devient jamais infinie) passait tout-à-coup d'une valeur A à une autre valeur très différente B. Mais pour prouver que la somme $F(x)$ de la série (4) est égale à $f(x)$ depuis $x = \mathrm{x}$ jusqu'à $x = \mathrm{X}$, il faut exclure le cas où les valeurs de $f(x)$ peuvent varier brusquement, ou du moins, si ce cas a lieu, il ne faut pas étendre l'équation $F(x) = f(x)$ aux abscisses x pour lesquelles l'ordonnée de la courbe représentée par l'équation $y = f(x)$ devient ainsi discontinue. Bornons-nous donc aux fonctions $f(x)$ jouissant des propriétés indiquées n° 1. Alors, comme nous l'avons déjà dit, l'équation $F(x) = f(x)$ se démontrera par la méthode indiquée dans mon premier Mémoire et subsistera même aux limites $x = \mathrm{x}$, $x = \mathrm{X}$. Toutefois cela suppose que des deux nombres h, H, aucun ne soit infini. Si l'on a par exemple $h = \infty$ l'équation (2) deviendra

$$V = 0 \quad \text{pour} \quad x = \mathrm{x}:$$

on aura donc aussi dans ce cas

$$F(x) = 0 \quad \text{pour} \quad x = \mathrm{x};$$

et l'équation $F(x) = f(x)$ ne pourra subsister à la limite $x = \mathrm{x}$ que si la fonction $f(x)$ vérifie la condition $f(\mathrm{x}) = 0$. De même si $H = \infty$, l'équation $F(x) = f(x)$ ne pourra subsister à la limite $x = \mathrm{X}$ que si

(*) Pour tout ce qui regarde la convergence des séries périodiques, *voyez* les ouvrages de M. Cauchy et surtout l'excellent Mémoire de M. Lejeune Dirichlet (*Journal de M. Crelle*, tome IV, 2e cahier).

l'on a $f(X)=0$. Au reste ces cas d'exception sont indiqués par notre démonstration même. En effet pour que l'intégrale

$$\int_{x}^{X} g[F(x) - f(x)]V_m(x)dx,$$

dont on fait usage à la page 263 de tome Ier de ce journal, soit égale à zéro quel que soit l'indice m, il est nécessaire que l'on ait en général $F(x)=f(x)$; mais cette nécessité disparaît pour les valeurs de x qui donnent $V_m(x)=0$ quel que soit m, puisque, pour ces valeurs, l'élément $g[F(x)-f(x)]V_m(x)dx$ est nul de lui-même indépendamment du facteur $F(x)-f(x)$.

VII.

12. En terminant ce troisième Mémoire, je ne puis m'empêcher de faire observer combien est directe et générale la méthode dont je me suis servi pour sommer la série (4). Cette méthode s'applique non-seulement aux fonctions V définies par une équation différentielle du second ordre, mais encore à une foule de fonctions données par des équations différentielles d'ordre supérieur. C'est ce que l'on peut voir par l'exemple simple que j'ai développé dans mon mémoire sur l'intégration de l'équation $\frac{du}{dt} = \frac{d^3u}{dx^3}$ (*).

Au reste, voici quelques théorèmes que je me contenterai d'énoncer et dont le lecteur trouvera aisément la démonstration. Ils serviront à bien montrer la généralité de mes principes quoi qu'ils soient fort loin d'embrasser tous les cas où ces principes sont applicables. Dans tout ce qui va suivre, x désignera une variable réelle comprise entre x et X : $f(x)$, $\varphi(x)$, $\Phi(x)$, $V_1, V_2 \ldots, V_n \ldots, U_1, U_2 \ldots, U_n \ldots$, seront des fonctions de x. Pour éviter tout embarras, je supposerai que ces fonctions ont, pour chaque valeur de x, une valeur réelle unique et déterminée, et qu'elles croissent infiniment peu lorsque x éprouve un accroissement infiniment petit : toutefois cette condition de continuité ne sera pas toujours indispensable. Cela posé,

(*) Voyez le dernier cahier du *Journal de l'École Polytechnique*.

1°. Si les fonctions V_1, $V_2,\ldots$, U_1. $U_2,\ldots$ sont telles que, pour deux indices m et n différents, on ait toujours

$$\int_x^X V_m U_n dx = 0$$

et si la série

$$\Sigma \left\{ \frac{V_n \int_x^X U_n f(x)\, dx}{\int_x^X U_n V_n\, dx} \right\}$$

est convergente, la somme $F(x)$ de cette série devra satisfaire à la condition

$$\int_x^X U_n [F(x) - f(x)] dx = 0,$$

l'indice n étant quelconque.

2°. Si donc on désigne par A_1, $A_2,\ldots$ des quantités choisies arbitrairement, mais indépendantes de x, et si l'on pose

$$P = A_1 U_1 + A_2 U_2 + \text{etc.}$$

on aura aussi

$$\int_x^X P [F(x) - f(x)]\, dx = 0.$$

3°. Si par une détermination convenable des quantités A_1, $A_2,\ldots$, on peut faire en sorte que P change de signe pour des valeurs quelconques de x, données d'avance et ne change de signe que pour celles-là, on aura $F(x) = f(x)$.

4°. Toutefois si les fonctions U_1, U_2, etc., s'évanouissent toutes pour une même valeur de x telle que $x = \alpha$, il pourra arriver que l'équation $F(x) = f(x)$ cesse d'avoir lieu pour $x = \alpha$. Dans le cas où l'équation $F(\alpha) = f(\alpha)$ sera ainsi inexacte, la dérivée $F'(\alpha)$ sera nécessairement infinie.

5°. Si la fonction P jouit de la propriété énoncée (3°.) et si l'équation

$$\int_x^X \varphi(x)\, U_n dx = 0$$

a lieu quel que soit l'indice n, on aura nécessairement $\varphi(x) = 0$.

6°. La propriété énoncée (5°.) appartient à la fonction P quand la fonction U_n est constamment égale à un polynome entier de degré $(n-1)$.

7°. Elle a lieu encore dans une foule d'autres cas, et spécialement quand l'équation

$$A_1U_1 + A_2U_2 + \ldots + A_nU_n = 0$$

a tout au plus $(in-1)$ racines tant égales qu'inégales, quel que soit l'indice n et quels que soient les coefficients $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

8°. Si la condition précédente est remplie et si l'équation

$$\int_{\text{x}}^{\text{X}} \varphi(x) U_n dx = 0$$

a lieu pour toutes les valeurs de n comprises dans la série $1, 2, \ldots, m$, la fonction $\varphi(x)$ changera de signe au moins m fois entre les limites $x = \text{x}$, $x = \text{X}$.

9°. Soit $\varpi(r) = 0$ une équation transcendante, et $r_1, r_2, r_3, \ldots$ des racines de cette équation. Admettons que la fonction $\Phi(x, r)$ ne devienne identiquement nulle pour aucune des racines r de $\varpi(r) = 0$, tant que x reste indéterminée. Si l'équation

$$\int_{\text{x}}^{\text{X}} \Phi(x, r) U_n dx = 0,$$

dans laquelle l'indice n est quelconque, a lieu pour la fonction particulière Φ toutes les fois que la racine r est différente de r_1, r_2, etc., et si de plus la fonction P jouit de la propriété énoncée (5°.), je dis que la racine réelle ou imaginaire dont il s'agit n'existera pas, c'est-à-dire que l'équation $\varpi(r) = 0$ ne pourra avoir aucune racine, réelle ou imaginaire, différente de r_1, r_2, etc.

13. Il serait aisé, je le répète, de généraliser encore beaucoup ces théorèmes. Mais nos énoncés deviendraient alors trop vagues. C'est dans les considérations exposées ci-dessus que rentrent les résultats obtenus dans les deux notes imprimées page 1 et page 107 de ce volume. Dans la première de ces notes, on se propose de prouver que l'équation

$$\int_{\text{x}}^{\text{X}} x^n \varphi(x)\, dx = 0$$

quand elle a lieu toutes les fois que n est zéro ou un nombre entier positif, entraîne la suivante $\varphi(x)=0$. Le moyen que j'ai employé pour atteindre ce but est, à mon sens, le plus élégant dont on puisse faire usage. Ici l'on a $U_n=x^{n-1}$: la fonction P est égale à $A_1+A_2x+A_3x^2+$ etc. et jouit évidemment de la propriété énoncée (3°.). On peut donc appliquer le théorème indiqué (5°), et c'est ce que j'ai fait. Mais il est bon d'observer que si l'on prenait $A_1=1$, $A_2=\frac{y}{1}$, $A_3=\frac{y^2}{1.2}$, etc., on aurait

$$P=1+\frac{yx}{1}+\frac{y^2x^2}{1.2}+\ldots=e^{yx}:$$

l'équation

$$\int_x^X P\varphi(x)dx=0,$$

donnerait donc

$$\int_x^X e^{yx}\varphi(x)dx=0,$$

et, à cause de l'indéterminée y, on en tirerait $\varphi(x)=0$, ce qu'il fallait démontrer. Ici se révèle un nouvel artifice qui consiste à introduire dans A_1, A_2, etc. une indéterminée y. On peut rattacher à cet artifice la méthode dont nous avons fait usage, M. Sturm et moi, dans un mémoire encore inédit dont l'extrait se trouve à la page 220 de ce volume.

NOTE

Sur une propriété des sections coniques;

PAR M. E. PAGÈS.

Si, par un point quelconque d'une section conique, on mène les deux rayons vecteurs et une normale terminée à l'axe des foyers, la projection de cette normale sur l'un quelconque des deux rayons vecteurs sera égale au paramètre. Considérons d'abord une ellipse : soient z et z' les deux rayons vecteurs, n la normale, p sa projection sur chacun des deux rayons vecteurs, h et k les distances du pied de cette normale aux deux foyers : soient de plus $2a$ le grand axe, $2b$ le petit axe et $2c$ la distance des foyers, de telle manière que $z+z'=2a$, $h+k=2c$, $a^2-c^2=b^2$. On aura, d'après les propriétés des triangles obliquangles,

$$\begin{aligned} h^2 &= z^2+n^2-2pz, \\ k^2 &= z'^2+n^2-2pz'; \end{aligned}$$

retranchant ces deux équations membre à membre, il vient

$$(h+k)(h-k)=(z-z')(z+z'-2p),$$

ou, ce qui est la même chose,

$$c(h-k)=(z-z')(a-p).$$

De cette équation on déduit

$$c:a-p::z-z':h-k. \qquad (1)$$

La propriété qu'a la normale de partager l'angle des rayons vecteurs

en deux parties égales, donne la proportion

$$z : z' :: h : k,$$

on en déduit

$$z + z' : h + k :: z - z' : h - k,$$

ou

$$a : c :: z - z' : h - k.$$

Cette proportion combinée avec la proportion (1) donne

$$c : a - p :: a : c,$$

d'où

$$p = \frac{a^2 - c^2}{a} = \frac{b^2}{a} = \text{paramètre}.$$

Le même mode de démonstration s'applique à l'hyperbole.

Dans le cas de la parabole, l'un des foyers se transportant à l'infini, le rayon vecteur correspondant devient parallèle à l'axe, et la projection sur ce rayon est égale à la projection sur l'axe; ce qui explique pourquoi dans cette courbe la sous-normale est constante.

En rapprochant le théorème que nous avons démontré de la propriété qu'a le rayon de courbure d'être proportionnel au cube de la normale, on trouve que le produit

$$r \cos^3 i = \text{paramètre},$$

r et i désignant le rayon de courbure et l'angle qu'il fait avec le rayon vecteur. De cette formule, on déduit une construction géométrique du rayon de courbure donnée par M. Abel Transon dans le tome premier de ce journal.

SOLUTION NOUVELLE

D'un Problème d'Analyse, relatif aux phénomènes thermo-mécaniques;

PAR JOSEPH LIOUVILLE.

(Présentée à l'Académie des Sciences le 23 octobre 1837.)

Ce problème qui consiste à intégrer l'équation

$$\frac{du}{dt} = \frac{d^2u}{dx^2} - b^2 x \int_0^1 x \frac{du}{dt}\, dx,$$

de telle manière que l'on ait

$$u = 0 \quad \text{pour} \quad x = 0,$$
$$\frac{du}{dx} + hu = 0 \quad \text{pour} \quad x = 1,$$
$$u = f(x) \quad \text{pour} \quad t = 0, \quad \text{depuis } x = 0 \text{ jusqu'à } x = 1,$$

a été traité déjà de deux manières différentes par M. Duhamel, dans son second mémoire sur les Phénomènes thermo-mécaniques (*). L'auteur a d'abord fait usage d'une méthode assez compliquée, mais très ingénieuse, que M. Poisson a donnée dans ses premières recherches sur la théorie de la chaleur. Reprenant ensuite la question d'une autre manière, il a, dans une seconde solution, suivi la méthode si connue qui consiste à représenter la valeur complète de u par la somme d'un nombre infini de termes dont chacun satisfait aux trois

(*) Voyez le *Journal de l'École Polytechnique.*

premières équations et renferme implicitement une constante arbitraire, ce qui permet de satisfaire aussi à la condition $u = f(x)$ pour $t = 0$. On est ainsi conduit à développer la fonction $f(x)$ en une série de la forme

$$f(x) = H_1 V_1 + H_2 V_2 + \ldots + H_n V_n + \ldots.$$

$H_1, H_2, \ldots H_n, \ldots$ étant des constantes, et $V_1, V_2, \ldots V_n, \ldots$ des fonctions connues de x. On détermine H_n en multipliant les deux membres de l'équation précédente par un facteur convenable et en intégrant ensuite entre les limites $x = 0$, $x = 1$, de manière à faire disparaître tous les coefficients $H_1, H_2, \ldots$ excepté H_n. M. Duhamel semble regarder cette détermination de H_n comme offrant la difficulté principale qu'il avait à vaincre pour résoudre le problème proposé. Mais il ne s'est occupé ni de démontrer la convergence de la série dans laquelle $f(x)$ se développe, ni même d'établir d'une manière incontestable que cette série supposée convergente a pour somme $f(x)$, du moins entre les limites $x = 0$, $x = 1$. J'ai donc cru pouvoir reprendre ici le problème en son entier, afin d'en donner une solution tout-à-fait rigoureuse. Cette solution du reste n'est fondée que sur des principes déjà développés dans d'autres mémoires que j'ai publiés seul ou en commun avec M. Sturm : elle servira, je l'espère, à faire reconnaître la supériorité de nos méthodes.

1. Soient b, h deux constantes, x une variable indépendante comprise entre zéro et l'unité, t une autre variable comprise entre 0 et ∞, et $f(x)$ une fonction de x qui ne devienne jamais infinie lorsque x croît depuis 0 jusqu'à 1 : par la nature physique du problème que nous voulons résoudre, la quantité $(h + 1)$ est essentiellement positive. On propose de trouver une fonction u des deux variables x, t, qui satisfasse à la fois à l'équation indéfinie

$$(1) \qquad \frac{du}{dt} = \frac{d^2u}{dx^2} - b^2 x \int_0^1 x \frac{du}{dt} dx$$

et aux conditions définies

$$(2) \qquad u = 0 \quad \text{pour} \quad x = 0,$$

$$(3)\qquad \frac{du}{dx} + hu = 0 \quad \text{pour} \quad x = 1,$$
$$(4)\qquad u = f(x) \quad \text{pour} \quad t = 0.$$

La fonction u qui vérifie les quatre équations précédentes est tout-à-fait déterminée, et il s'agit d'en trouver la valeur.

2. D'après la méthode ordinairement suivie par les géomètres pour l'intégration des équations différentielles partielles, nous chercherons d'abord une valeur de u qui satisfasse aux équations (1), (2), (3), mais non pas à l'équation (4). A cet effet nous poserons

$$u = Ve^{-rt},$$

r étant un paramètre inconnu, et V une fonction de x que l'on obtiendra en intégrant l'équation différentielle du second ordre

$$(5)\qquad \frac{d^2V}{dx^2} \qquad \left(V + b^2x\int_0^1 xVdx\right) = 0,$$

de manière à satisfaire aux conditions particulières

$$(6)\qquad V = 0 \quad \text{pour} \quad x = 0,$$
$$(7)\qquad \frac{dV}{dx} + hV = 0 \quad \text{pour} \quad x = 1.$$

L'intégrale $\int_0^1 xVdx$ étant une constante que l'on peut représenter par C, l'équation (5) s'écrira ainsi

$$\frac{d^2V}{dx^2} + r(V + b^2Cx) = 0;$$

et son intégrale complète sera

$$V = A\sin(x\sqrt{r}) + B\cos(x\sqrt{r}) - b^2Cx,$$

A et B désignant deux constantes arbitraires.

La constante B est nulle en vertu de l'équation (6). De plus on doit avoir

$$\int_0^1 xVdx = C:$$

or si l'on développe cette condition et si l'on fait

$$\alpha = \frac{3b^2}{b^2+3} \cdot \frac{\sin(\sqrt{r}) - \sqrt{r}\cos(\sqrt{r})}{r},$$

on trouve

$$C = \frac{A\alpha}{b^2}.$$

Quant à la constante A qui reste arbitraire, nous la prendrons égale à $\frac{1}{\sqrt{r}}$. Ayant donc

$$B = 0, \quad A = \frac{1}{\sqrt{r}}, \quad C = \frac{\alpha}{b^2\sqrt{r}},$$

nous en conclurons

$$(8) \qquad V = \frac{\sin(x\sqrt{r}) - \alpha x}{\sqrt{r}}.$$

Il importe d'observer que cette valeur de V ne devient identiquement nulle pour aucune valeur déterminée de r, tant que x reste indéterminée. En effet si le paramètre r est différent de zéro, il est impossible que la fonction transcendante $\sin(x\sqrt{r})$ soit égale à la fonction algébrique αx; et si ce paramètre est nul $\frac{\sin(x\sqrt{r})}{\sqrt{r}}$ se réduit à x, $\frac{\alpha}{\sqrt{r}}$ se réduit à $\frac{b^2}{b^2+3}$, et l'on a $V = \frac{3x}{b^2+3}$ quantité qui n'est pas identiquement nulle.

3. En différentiant la valeur de V il vient

$$\frac{dV}{dx} = \cos(x\sqrt{r}) - \frac{\alpha}{\sqrt{r}},$$

de sorte que, pour $x = 1$, on obtient

$$V = \frac{\sin(\sqrt{r}) - \alpha}{\sqrt{r}},$$

$$\frac{dV}{dx} = \cos(\sqrt{r}) - \frac{\alpha}{\sqrt{r}}.$$

En portant ces valeurs dans la formule (7), on aura l'équation à laquelle le paramètre r doit satisfaire. Cette équation sera

$$\cos(\sqrt{r}) - \frac{\alpha}{\sqrt{r}} + h \cdot \frac{\sin(\sqrt{r}) - \alpha}{\sqrt{r}} = 0,$$

ou

$$(9) \qquad \cos(\sqrt{r}) + \frac{h \sin(\sqrt{r})}{\sqrt{r}} - \frac{\alpha(h+1)}{\sqrt{r}} = 0.$$

Nous représenterons toujours par $\varpi(r)$ son premier membre, en sorte que l'on aura

$$\varpi(r) = \frac{dV}{dx} + hV \quad \text{pour} \quad x = 1.$$

L'équation (9) possède une infinité de racines, toutes réelles, positives et inégales entre elles. Soient r_1, $r_2, \ldots r_n, \ldots$ ces racines rangées par ordre de grandeur, r_1 étant la plus petite : en faisant dans la fonction V successivement $r = r_1$, $r = r_2, \ldots r = r_n, \ldots$ on aura une suite de fonctions V_1, $V_2, \ldots V_n, \ldots$ dont chacune fournira une intégrale particulière de l'équation (1). Avant de montrer comment, en réunissant ces intégrales particulières, on forme la valeur complète de u, nous allons démontrer les propriétés des racines de l'équation (9) dont nous venons de faire mention.

4. Je vais prouver d'abord que les racines réelles de l'équation (9) ne peuvent jamais être négatives. A cet effet je développe $\varpi(r)$ en série convergente. On a par les formules connues

$$\cos(\sqrt{r}) = 1 - \frac{r}{2} + \frac{r^2}{2.3.4} - \text{etc.},$$

$$\sin(\sqrt{r}) = \sqrt{r}\left(1 - \frac{r}{2.3} + \frac{r^2}{2.3.4.5} - \text{etc.}\right),$$

et par suite

$$\cos(\sqrt{r}) + \frac{h \sin(\sqrt{r})}{\sqrt{r}} = (1+h) - \frac{r}{2}\left(1 + \frac{h}{3}\right) + \frac{r^2}{2.3.4}\left(1 + \frac{h}{5}\right) - \text{etc.},$$

$$\frac{\alpha(h+1)}{\sqrt{r}} = \frac{3b^2(h+1)}{b^3+3}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \cdot \frac{r}{2.3} + \frac{1}{7} \cdot \frac{r^2}{2.3.4.5} - \text{etc.}\right).$$

Cela étant, il vient

$$\varpi(r) = (1 + h) - \frac{r}{2}\left(1 + \frac{h}{3}\right) + \frac{r^2}{2.3.4}\left(1 + \frac{h}{5}\right) - \ldots.$$
$$- \frac{3b^2(h+1)}{b^2+3}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\cdot\frac{r}{2.3} + \frac{1}{7}\cdot\frac{r^2}{2.3.4.5} - \ldots\right),$$

Si donc il y avait une racine réelle et négative $-$ R de l'équation (9), les deux séries

$$(1 + h) + \frac{R}{2}\left(1 + \frac{h}{3}\right) + \frac{R^2}{2.3.4}\left(1 + \frac{h}{5}\right) + \ldots,$$
$$\gamma(1 + h) + \frac{3\gamma R}{2.3}\left(\frac{1+h}{5}\right) + \frac{3\gamma R^2}{2.3.4.5}\left(\frac{1+h}{7}\right) + \ldots,$$

(dans lesquelles on a représenté par γ le rapport $\frac{b^2}{b^2+3}$ qui est < 1) seraient égales entre elles, et cela ne se peut puisqu'en les comparant terme à terme on trouve que chacun des termes de la seconde série est plus petit que le terme correspondant de la première, du moins quand le coefficient h est compris (comme on le suppose) entre -1 et $+\infty$.

5. Pour démontrer en second lieu que les racines de l'équation (9) sont toutes réelles et inégales, il faut s'appuyer sur une formule dont nous aurons souvent besoin dans la suite.

Désignons par V′ ce que devient la valeur (8) de V lorsqu'on y remplace r par une indéterminée r', La fonction V′ satisfera aux équations (5), (6), et l'on aura

$$\frac{d^2V'}{dx^2} + r'\left(V' + b^2x\int_0^1 xV'dx\right) = 0,$$
$$V' = 0 \quad \text{pour} \quad x = 0.$$

Mais l'équation (7) ne sera satisfaite par cette même fonction que dans le cas particulier où l'on prendra $r' =$ une des racines de l'équation (9), ce que l'on ne fera pas d'abord. Maintenant je multiplie par les facteurs respectifs V, V′ les deux équations

$$r'\left(V' + b^2 x\int_0^1 xV'dx\right) = -\frac{d^2V'}{dx^2},$$
$$r\left(V + b^2 x\int_0^1 xVdx\right) = -\frac{d^2V}{dx^2},$$

après quoi je les retranche et j'intègre entre les limites $x=0$, $x=1$: en divisant par $(r'-r)$ les deux membres de l'équation à laquelle ce calcul conduit, et nommant Q la valeur de $V'\frac{dV}{dx} - V\frac{dV'}{dx}$ pour $x=1$, j'obtiens

$$\int_0^1 VV'dx + b^2\int_0^1 xVdx\int_0^1 xV'dx = \frac{Q}{r'-r}.$$

Mais r étant racine de l'équation (9), on a, pour $x=1$, $\frac{dV}{dx} = -hV$: on a aussi $\frac{dV'}{dx} + hV' = \varpi(r')$ et par conséquent $\frac{dV'}{dx} = \varpi(r') - hV'$: la valeur de Q se réduit donc à $-V\varpi(r')$, ce qui donne

$$\frac{Q}{r'-r} = -\frac{V\varpi(r')}{r'-r} \quad \text{pour} \quad x=1.$$

Supposons actuellement que r' soit racine de l'équation (9), en sorte que l'on ait $\varpi(r')=0$: on trouvera

$$\frac{Q}{r'-r} = 0$$

si les racines r, r' sont inégales, et

$$Q = -V\frac{d\varpi(r)}{dr} \quad \text{pour} \quad x=1,$$

si elles sont égales entre elles. Dans le premier cas il viendra

$$(10) \qquad \int_0^1 VV'dx + b^2\int_0^1 xVdx\int_0^1 xV'dx = 0,$$

tandis que l'on aura dans le second

$$(11) \qquad \int_0^1 V^2 dx + b^2\left(\int_0^1 xVdx\right)^2 = -\frac{V(1)\,d\varpi(r)}{dr},$$

$V(1)$ désignant la valeur de V qui répond à $x=1$.

D'après un raisonnement connu, la formule (10) prouve que l'équation (9) n'a pas de racine de la forme $\lambda+\mu\sqrt{-1}$: en effet si cette racine existait, la racine conjuguée $\lambda-\mu\sqrt{-1}$ existerait aussi : on pourrait donc prendre $r=\lambda+\mu\sqrt{-1}$, $r'=\lambda-\mu\sqrt{-1}$: en posant $r=\lambda+\mu\sqrt{-1}$, V prendra la forme $M+N\sqrt{-1}$, M et N désignant deux quantités réelles qui ne peuvent être à la fois identiquement nulles (tant que x reste indéterminée) puisque la fonction V est en général différente de zéro : il est aisé de voir que l'on aura de même $V'=M-N\sqrt{-1}$: par suite la formule (10) nous donnera ce résultat absurde

$$\int_0^1 (M^2+N^2)dx + b^2\left(\int_0^1 xMdx\right)^2 + b^2\left(\int_0^1 xNdx\right)^2 = 0.$$

Donc il est impossible d'admettre que l'équation (9) ait une racine de la forme $\lambda+\mu\sqrt{-1}$.

Les racines réelles de cette équation sont d'ailleurs inégales en vertu de la formule (11), car si la racine r était multiple, la dérivée $\frac{d\varpi(r)}{dr}$ s'évanouirait en même temps que $\varpi(r)$ et le second membre de l'équation (11) se réduirait à zéro tandis que le premier est essentiellement positif.

6. Les racines de l'équation (9) sont donc réelles, positives et inégales entre elles. Pour se convaincre que le nombre de ces racines est infini, il suffit de mettre l'équation (9) sous la forme

$$\cos(\sqrt{r}) = -\frac{h\sin(\sqrt{r})}{\sqrt{r}} + \frac{\alpha(h+1)}{\sqrt{r}},$$

puis de regarder r comme une abscisse variable entre les limites 0, ∞, et de construire les deux courbes ayant pour équations respectives

$$y=\cos(\sqrt{r}), \quad y = -\frac{h\sin(\sqrt{r})}{\sqrt{r}} + \frac{\alpha(h+1)}{\sqrt{r}}:$$

ces deux courbes se coupent en un nombre infini de points dont les abscisses répondent aux racines de l'équation (9).

Pour démontrer analytiquement le même théorème, faisons $r=\rho^2$: l'équation proposée deviendra

$$(12) \qquad \cos\rho + \frac{h\sin\rho}{\rho} - \frac{a(h+1)}{\rho} = 0;$$

et il suffira de considérer les valeurs positives de ρ. Maintenant soit i un nombre entier et positif très grand. Si, dans le premier membre de l'équation (12), nous faisons $\rho=(2i+1)\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}$, puis $\rho=(2i+1)\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}$, le terme $\cos\rho$ prendra successivement deux valeurs égales et de signes contraires dont le carré sera $\frac{1}{2}$: les autres termes seront très petits. Donc le premier membre de l'équation (12) changera de signe en passant d'une de ces substitutions à l'autre, ce qui exige que l'équation proposée ait une racine comprise entre les deux limites $(2i+1)\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}$, $(2i+1)\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}$. Cette racine est du reste unique; car, dans le cas contraire, il faudrait que la dérivée prise par rapport à ρ de la fonction

$$\cos\rho + \frac{h\sin\rho}{\rho} - \frac{a(h+1)}{\rho}$$

devînt égale à zéro une ou plusieurs fois lorsque ρ croît depuis $(2i+1)\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}$ jusqu'à $(2i+1)\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}$; et cela ne se peut puisque, dans l'intervalle cité, tous les termes de cette dérivée sont très petits à l'exception du premier $-\sin\rho$ qui ne change pas de signe et conserve toujours une valeur numérique supérieure à $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

En augmentant i d'une unité, on verra qu'une seconde racine est comprise entre les limites $(2i+3)\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}$, $(2i+3)\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}$; une troisième racine existe de même entre les limites $(2i+5)\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}$, $(2i+5)\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}$, et ainsi de suite. Mais il n'en existe aucune entre

57..

$(2i+1)\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}$ et $(2i+3)\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}$, entre $(2i+3)\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}$ et... $(2i+5)\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}$, etc., comme on peut s'en convaincre en observant que, dans chacun de ces intervalles, le terme principal $\cos\rho$ du premier membre de l'équation (12) ne change jamais de signe et a toujours une valeur absolue supérieure à $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

7. La racine ρ comprise entre les limites $(2i+1)\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}$, .. $(2i+1)\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}$ s'obtient du reste sans difficulté puisque si l'on pose

$$\alpha(h+1)-h\sin\rho=\mathrm{f}(\rho),\quad \rho=(2i+1)\frac{\pi}{2}+\sigma$$

l'équation (12), savoir

$$\cos\rho=\frac{\mathrm{f}(\rho)}{\rho},$$

devient

$$\sin(2i+1)\frac{\pi}{2}\sin\sigma=-\frac{\mathrm{f}\left((2i+1)\frac{\pi}{2}+\sigma\right)}{(2i+1)\frac{\pi}{2}+\sigma};$$

d'où l'on tire à très peu près

$$(13)\qquad \sigma=\frac{h}{i\pi},$$

valeur d'autant plus approchée que i est plus grand. On pourrait pousser plus loin l'approximation; mais nous nous contenterons d'observer que, d'après nos calculs, les racines ρ très grandes sont de la forme

$$(14)\qquad \rho=(2i+1)\frac{\pi}{2}+\frac{\mathrm{B}_i}{i},$$

i désignant un nombre entier qui croît successivement d'une unité, et B_i une fonction de l'indice i dont la valeur absolue ne dépasse jamais un certain *maximum* que l'on assignerait facilement. La partie principale de ces racines croît proportionnellement au nombre i, d'où il est aisé de conclure que toutes les séries dont le terme général est

$\frac{\Psi}{\rho^2}$ ou $\frac{\Psi}{i\rho}$ sont convergentes, si Ψ désigne une fonction de ρ ou de i qui ne surpasse jamais un certain *maximum* absolu L, indépendant de l'indice i.

8. Chacune des intégrales particulières

$$V_1e^{-r_1t},\ldots\quad V_2e^{-r_2t},\quad V_ne^{-r_nt},\ldots$$

dans lesquelles V_n désigne ce que devient V lorsqu'on y pose $r=r_n$, satisfait à la fois aux équations (1), (2), (3). Si donc on désigne par H_1, H_2,...H_n... des constantes arbitraires et si l'on fait

$$u = H_1V_1e^{-r_1t} + H_2V_2e^{-r_2t}+\ldots+ H_nV_ne^{-r_nt}+\ldots,$$

cette valeur de u vérifiera aussi les équations (1), (2), (3). Mais pour qu'elle vérifie la condition (4), il faudra que l'on ait

$$f(x) = H_1V_1 + H_2V_2 +\ldots+ H_nV_n+\ldots.$$

Il s'agit maintenant de savoir si (la fonction $f(x)$ étant quelconque) on peut, par une détermination convenable des constantes H_1, H_2,... H_n.... rendre identique cette dernière équation, du moins pour des valeurs de x comprises entre o et 1.

D'abord, si l'on admet que la fonction $f(x)$ puisse se développer sous la forme

$$(15)\qquad f(x) = H_1V_1 + H_2V_2 +\ldots+ H_nV_n +\ldots,$$

il sera facile de former la valeur de H_n. On se servira pour cela de la formule (10) qui peut s'écrire ainsi

$$\int_0^1 V\left(V' + b^2x\int_0^1 xV'dx\right) dx = 0.$$

On a

$$V' + b^2x\int_0^1 xV'dx = -\frac{d^2V'}{dx^2} = \sqrt{r'}\sin(x\sqrt{r'}):$$

la formule en question devient donc

$$(16) \qquad \int_0^1 \mathrm{V} \sin(x\sqrt{r})dx = 0.$$

Maintenant multiplions par $\sin(x\sqrt{r_n})$ les deux membres de l'équation (15) et intégrons ensuite entre les limites $x=0$, $x=1$: il est aisé de voir qu'en vertu de la formule (16) tous les coefficients H_1, $\mathrm{H}_2, \ldots$ disparaîtront excepté celui qui porte l'indice n, de sorte qu'il restera simplement

$$\int_0^1 f(x)\sin(x\sqrt{r_n})dx = \mathrm{H}_n \int_0^1 \mathrm{V}_n \sin(x\sqrt{r_n})dx,$$

d'où l'on tire

$$\mathrm{H}_n = \frac{\int_0^1 f(x)\sin(x\sqrt{r_n})dx}{\int_0^1 \mathrm{V}_n \sin(x\sqrt{r_n})dx}.$$

En adoptant cette valeur de H_n, on aura

$$(17) \qquad f(x) = \Sigma\left\{\frac{\mathrm{V}_n \int_0^1 f(x)\sin(x\sqrt{r_n})dx}{\int_0^1 \mathrm{V}_n \sin(x\sqrt{r_n})dx}\right\},$$

et par conséquent,

$$(18) \qquad u = \Sigma\left\{\frac{\mathrm{V}_n e^{-r_n t}\int_0^1 f(x)\sin(x\sqrt{r_n})dx}{\int_0^1 \mathrm{V}_n \sin(x\sqrt{r_n})dx}\right\}.$$

La formule (18) renferme la solution complète du problème que nous voulions résoudre. Mais elle se déduit de la formule (17) dont l'exactitude jusqu'ici n'est pas suffisamment démontrée. Nous allons donc considérer en elle-même la série placée au second membre de la formule (17). Nous représenterons sa valeur par $\mathrm{F}(x)$ et nous prouverons 1°. que la série $\mathrm{F}(x)$ est convergente, 2°. que l'on a $\mathrm{F}(x) = f(x)$ pour toutes les valeurs de x comprises entre 0 et 1.

9. Représentons par T le terme général de la série $F(x)$, ou, autrement dit, posons

$$T = \frac{(\sin \rho x - \alpha x)\int_0^1 f(x) \sin \rho x dx}{\int_0^1 \sin \rho x(\sin \rho x - \alpha x)dx},$$

ρ^2 étant une quelconque des racines de l'équation (9), et contentons-nous de considérer les valeurs de ρ très grandes, les seules dont nous ayons besoin pour constater la convergence de la série ΣT : ces valeurs de ρ sont de la forme

$$\rho = (2i + 1)\frac{\pi}{2} + \frac{B_i}{i},$$

comme on l'a vu n° 7 : i désigne un nombre entier qui croît successivement d'une unité et B_i une fonction de l'indice i qui ne dépasse jamais un certain *maximum* absolu indépendant de i. Nous désignerons généralement par les lettres Ψ, Ψ', Ψ'',.... les fonctions qui jouissent comme B_i de la propriété dont nous venons de parler. Toute série dont le terme général sera de la forme $\frac{\Psi}{i^q}$, q étant un nombre > 1, sera convergente: il en résulte qu'on peut au numérateur de la fraction T et à son dénominateur (dont la valeur très approchée est $\frac{1}{2}$) négliger les termes de la forme $\frac{\Psi}{i}$, car ces termes ne produisent dans la série ΣT qu'une partie de la forme $\Sigma \frac{\Psi'}{i^2}$, et par conséquent ne peuvent en aucune manière nuire à sa convergence. D'après cela, on peut d'abord faire abstraction des termes multipliés par α, car en remplaçant $\sqrt{r}$ ou ρ par sa valeur, on trouve que α est de la forme $\frac{\Psi}{i^2}$. De plus l'intégrale $\int_0^1 \sin^2 \rho x dx$ étant égale à $\frac{1}{2} - \frac{\sin 2\rho}{4\rho}$ se réduit à $\frac{1}{2}$ quand, après avoir mis pour ρ sa valeur, on néglige les termes réductibles à la forme $\frac{\Psi}{i^2}$. Ainsi à ces termes près on a

$$\int_0^1 \sin \rho x (\sin \rho x - \alpha x)dx = \frac{1}{2}.$$

La valeur simplifiée de T est donc

$$T = 2 \sin \rho x \int_0^1 f(x) \sin \rho x dx.$$

On peut même la simplifier encore en se rappelant que, par un théorème dont j'ai donné ailleurs la démonstration (*), l'intégrale $\int_0^1 f(x) \sin \rho x dx$ est de la forme $\frac{\psi}{\rho}$ ou $\frac{\psi}{i}$: on peut donc négliger le produit de cette intégrale par la partie du facteur

$$\sin \rho x \left[\text{égal à } \sin \frac{(2i+1)\pi x}{2} \cos \frac{B_i x}{i} + \cos \frac{(2i+1)\pi x}{2} \sin \frac{B_i x}{i}\right]$$

qui est aussi de la forme $\frac{\psi}{i}$, ou, ce qui revient au même, on peut, hors du signe $\int$, réduire $\sin \rho x$ à sa partie principale $\sin \frac{(2i+1)\pi x}{2}$: de plus en négligeant sous le signe $\int$ des termes divisés par i^2, on a le droit de remplacer

$$\sin \rho x \text{ par } \sin \frac{(2i+1)\pi x}{2} + \frac{B_i x}{i} \cos \rho x.$$

Nous aurons ainsi

$$T = 2 \sin \frac{(2i+1)\pi x}{2} \int_0^1 f(x) \left(\sin \frac{(2i+1)\pi x}{2} + \frac{B_i x}{i} \cos \rho x\right) dx.$$

D'après cette valeur de T, la série ΣT se décompose en deux autres, savoir

$$2\Sigma \sin \frac{(2i+1)\pi x}{2} \int_0^1 f(x) \sin \frac{(2i+1)\pi x}{2} dx,$$

$$2x\Sigma \frac{B_i}{i} \sin \frac{(2i+1)\pi x}{2} \int_0^1 f(x) \cos \rho x \, dx.$$

La première de ces deux séries est convergente, comme les géomètres l'ont démontré depuis long-temps, et pour constater la convergence de

(*) *Voyez* mon *troisième mémoire sur le développement des fonctions ou parties de fonctions, etc.*, page 418 du présent volume.

la seconde dont tous les termes sont déjà divisés par i, il suffit d'observer que l'intégrale $\int_0^1 f(x)\cos \rho x dx$ est de la forme $\frac{\psi}{\rho}$ ou $\frac{\psi}{i}$, conformément à ce que j'ai fait voir dans le mémoire cité plus haut.

10. Pour prouver que l'on a $F(x) = f(x)$ entre les limites $x = 0$, $x = 1$, reprenons l'équation

$$F(x) = \Sigma \left\{ \frac{V_n \int_0^1 f(x) \sin(x\sqrt{r_n})\, dx}{\int_0^1 V_n \sin(x\sqrt{r_n}) dx} \right\}.$$

Multiplions par $\sin(x\sqrt{r_n})\,dx$ les deux membres de cette équation, et intégrons ensuite entre les limites $x = 0$, $x = 1$. En vertu de la formule (16) cette intégration fera disparaître tous les termes du second membre à l'exception d'un seul et donnera

$$\int_0^1 F(x)\sin(x\sqrt{r_n})\,dx = \int_0^1 f(x)\sin(x\sqrt{r_n})\,dx,$$

ou bien

$$\int_0^1 [F(x) - f(x)]\sin(x\sqrt{r_n})\,dx = 0.$$

Mais si l'on désigne par z une variable indépendante et si l'on considère la fraction $\frac{\sin(x\sqrt{z})}{\sqrt{z}\,\varpi(z)}$, qui est fonction de z, on s'assure aisément (tant que x reste comprise entre 0 et 1) que cette fraction est décomposable en une infinité de fractions simples : par la théorie connue et en représentant par $\varpi'(r_n)$ la dérivée $\frac{d\varpi(r_n)}{dr_n}$, on trouve

$$\frac{\sin(x\sqrt{z})}{\sqrt{z}\,\varpi(z)} = \Sigma \left\{ \frac{\sin(x\sqrt{r_n})}{(z - r_n)\sqrt{r_n}\,\varpi'(r_n)} \right\}.$$

Soit R le terme général de la série placée au second membre de l'équation que nous venons d'écrire. Nous aurons

$$R = \frac{\sin(x\sqrt{r})}{(z-r)\sqrt{r}\,\varpi'(r)},$$

r désignant une quelconque des racines de l'équation (9). Si l'on se borne aux racines r très grandes, on a, par la formule du n° 7,

$$\sqrt{r} = \frac{(2i+1)\pi}{2} + \frac{B_i}{i};$$

d'où l'on conclut sans difficulté que R est de la forme $\frac{\psi}{i^2}$ et que par conséquent la série ΣR est convergente. Maintenant il vient

$$\sin(x\sqrt{z}) = \sqrt{z}\,\varpi(z)\,\Sigma\left\{\frac{\sin(x\sqrt{r_n})}{(z-r_n)\sqrt{r_n}\,\varpi'(r_n)}\right\}.$$

L'intégrale

$$\int_0^1 [F(x-f(x)]\sin(x\sqrt{z})\,dx$$

est donc égale à

$$\sqrt{z}\,\varpi(z)\,\Sigma\left\{\frac{1}{(z-r_n)\sqrt{r_n}\,\varpi'(r_n)}\cdot\int_0^1 [F(x)-f(x)]\sin(x\sqrt{r_n})dx\right\},$$

et chacun des termes dont elle se compose est égal à zéro. Ainsi l'on est conduit à l'équation générale

$$\int_0^1 [F(x)-f(x)]\sin(x\sqrt{z})\,dx = 0;$$

et, à cause de l'indéterminée z, celle-ci ne peut subsister qu'autant que l'on a

$[F(x)-f(x)]\sin(x\sqrt{z})\,dx = 0$ depuis $x=0$ jusqu'à $x=1$,

ce qui donne généralement

(20) $F(x)=f(x)$ depuis $x=0$ jusqu'à $x=1$:

toutefois comme le facteur $\sin(x\sqrt{z})$ est nul pour $x=0$, il pourra arriver que l'on n'ait pas $F(0)=f(0)$: cette dernière équation dont le premier membre est toujours nul ne sera vérifiée que si la quantité $f(0)$ est égale à zéro, ce que nous admettons effectivement.

11. Pour bien voir comment l'équation (19) entraîne l'équation (20), il suffit de donner à $\sqrt{z}$ une valeur de la forme $Z\sqrt{-1}$, ce qui transforme le sinus de $x\sqrt{z}$ en exponentielles. On peut aussi remplacer $\sin(x\sqrt{z})$ par la série $x\sqrt{z} - \frac{x^3 z\sqrt{z}}{2.3} +$ etc., et en égalant à zéro le coefficient de chacune des puissances de l'indéterminée z dans l'équation (19), on a généralement

$$(21) \qquad \int_0^1 x[F(x) - f(x)]\, x^{2q} dx = 0,$$

q étant zéro ou un nombre entier positif. Or, si la fonction $x[F(x) - f(x)]$ n'est pas identiquement nulle depuis $x = 0$ jusqu'à $x = 1$, l'équation (21) ne peut pas subsister à moins que cette fonction ne change de signe un certain nombre m de fois : sans cela en effet les éléments de l'intégrale placée au premier membre seraient tous de même signe et ne pourraient avoir zéro pour somme. Soient donc $x_1, x_2, \ldots x_m$ les m valeurs de x pour lesquelles $F(x) - f(x)$ change de signe ; et représentons par

$$A + Bx^2 + Cx^4 + \ldots + x^{2m}$$

le développement du produit

$$(x^2 - x_1^2)(x^2 - x_2^2)\ldots(x^2 - x_m^2).$$

Si dans l'équation (21) on pose successivement $q = 0$, $q = 1, \ldots q = m$, et si l'on ajoute entre elles toutes les équations ainsi obtenues, après les avoir multipliées par les facteurs respectifs A, B, etc., on aura

$$\int_0^1 x[F(x) - f(x)]\,(x^2 - x_1^2)(x - x_2^2)\ldots(x^2 - x_m^2)\,dx = 0,$$

équation absurde, puisque la quantité placée sous le $\int$ ne change jamais de signe entre les limites de l'intégrale. On est donc obligé de reconnaître que l'équation (21) donne

$$x[F(x) - f(x)] = 0 \text{ depuis } x = 0 \text{ jusqu'à } x = 1.$$

12. Il nous reste enfin à montrer que la série placée au second

membre de l'équation (18) est convergente pour toute valeur positive de t. Adoptons les notations du n° 9 : le terme général de la série dont nous parlons sera $\mathrm{T}e^{-\rho^2 t}$: de plus pour établir la convergence de la série $\Sigma \mathrm{T}e^{-\rho^2 t}$, on pourra, comme on l'a vu ci-dessus dans un cas semblable, négliger les termes de la forme $\frac{\psi}{i^2}$ et prendre simplement

$$\mathrm{T} = 2 \sin \rho x \int_0^1 f(x) \sin \rho x dx.$$

La valeur numérique de T qui résulte de l'équation que je viens d'écrire est plus petite que $2f_1$, f_1 étant le *maximum* absolu de $f(x)$. Par conséquent celle de $\mathrm{T}e^{-\rho^2 t}$ est inférieure à $2f_1 e^{-\rho^2 t}$. Or la série qui a pour terme général $2f_1 e^{-\rho^2 t}$ est évidemment convergente : donc *à fortiori* la série $\Sigma \mathrm{T}e^{-\rho^2 t}$ est aussi convergente.

NOTE

Sur l'intégration d'un système d'équations différentielles du second ordre, entre un nombre quelconque de variables, analogues à celles du mouvement d'un point libre autour d'un centre fixe, sollicité par une force fonction de la distance au centre ;

PAR M. BINET,

Professeur au Collége de France.

[1] Les équations dont on va s'occuper ici sont de la forme

$$\frac{d^2u}{dt^2} = \frac{dR}{du}, \quad \frac{d^2v}{dt^2} = \frac{dR}{dv}, \quad \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dR}{dx}, \quad \text{etc.} :$$

u, v, x,... sont les variables principales à déterminer en fonction de t ; R est une fonction de la quantité $r = \sqrt{u^2+v^2+x^2+y^2+\text{ etc.}}$, en sorte que $\frac{dR}{du} = \frac{dR}{dr}\frac{u}{r}$, $\frac{dR}{dv} = \frac{dR}{dr}\frac{v}{r}$, etc.

Lorsque leur nombre ne surpasse pas trois, ces équations se rapportent au mouvement d'un point attiré vers un centre fixe, par une force dont l'expression est $\frac{dR}{dr}$, et l'intégration présente peu de difficultés, ainsi qu'on peut le voir dans plusieurs traités de mécanique et dans un mémoire récent de M. Poisson, pages 331 et 332 du second volume de ce recueil. Je citerai encore, pour son élégance, la solution donnée par M. Gabrio Piola, dans un mémoire sur la Mécanique analytique couronné en 1824 par l'Académie de Turin. Pour le cas de trois variables, afin d'achever l'intégration, on a recours ordinaire-

ment à des considérations géométriques. Je suis loin de blâmer l'emploi de ces considérations dans des questions de Mécanique, qui ne sont en grande partie que des problèmes de Géométrie : les résultats obtenus y trouvent souvent une interprétation naturelle et simple, et l'analyse y puise, par fois, des ressources précieuses. Mais dès que le nombre des variables principales est au-dessus de trois, l'analyste ne peut plus guère compter sur les secours de la Géométrie proprement dite. Il convient alors qu'il se crée une marche purement algébrique. Celle que nous allons suivre pour intégrer les équations dont il s'agit conduit à ce résultat remarquable que, quelque soit le nombre des variables, leurs expressions ne dépendent que d'une seule fonction différentielle de la variable r à intégrer, pour chaque forme assignée à la fonction R. D'autres voies peuvent fournir le même résultat; mais elles m'ont paru présenter une assez grande complication, lorsque le nombre des variables est supérieur à trois.

[2]. Considérons donc les n équations différentielles du second ordre de la forme

$$(1)\qquad \frac{d^2u}{dt^2} = \frac{dR}{dr}\frac{u}{r}, \quad \frac{d^2v}{dt^2} = \frac{dR}{dr}\frac{v}{r}, \text{ etc.},$$

entre les n quantités u, v, x, y, etc. et la variable t.

En les combinant deux à deux, on formera, par l'élimination de $\frac{dR}{dr}$, des équations telles que

$$\frac{vd^2u - ud^2v}{dt^2} = 0, \quad \frac{xd^2u - ud^2x}{dt^2} = 0, \text{ etc.}$$

d'où l'on tire les intégrales premières, en nombre $n.\frac{n-1}{2}$,

$$\begin{aligned} &vu' - uv' = \text{constante},\\ &xu' - ux' = \text{const.},\\ &xv' - vx' = \text{const.},\\ &\text{etc. :}\end{aligned}$$

selon la notation ordinaire, nous avons désigné, pour abréger,

dans ces formules, par u', v', x', etc. les quantités différentielles $\frac{du}{dt}$, $\frac{dv}{dt}$, etc.

La somme des carrés de ces équations donnera

$$(2) \quad (vu'-uv')^2+(xu'-ux')^2+\text{etc.}+(xv'-vx')^2+\text{etc.}=A^2,$$

A^2 représentant une constante positive. En vertu d'un théorème d'algèbre, on sait que cette somme de carrés peut être mise sous la forme

$$(u^2+v^2+x^2+\text{etc.})(u'^2+v'^2+x'^2+\text{etc.})-(uu'+vv'+xx'+\text{etc.})^2=A^2.$$

En multipliant respectivement par du, dv, dx..., les équations proposées et les ajoutant, le premier membre $\frac{du\,d^2u+dv\,d^2v+\text{etc.}}{dt^2}$ sera la différentielle de $\frac{u'^2+v'^2+x'^2+y'^2+\text{etc.}}{2}$, et le second membre sera aussi la différentielle $\frac{dR}{dr}dr=dR$; on aura donc en intégrant, et prenant B pour une constante arbitraire,

$$u'^2+v'^2+x'^2+y'^2+\text{etc.}=2(R+B).$$

Substituant dans le premier membre de l'équation (2), cette valeur, et pour $u^2+v^2+\text{etc.}$ la quantité r^2, on en déduira

$$(uu'+vv'+xx'+\text{etc.})^2=2r^2(R+B)-A^2;$$

mais
$$uu'+vv'+\text{etc.}=rr'=\frac{rdr}{dt};$$

partant
$$\frac{r^2dr^2}{dt^2}=2r^2(R+B)-A^2;$$

d'où l'on tire

$$(3) \qquad dt=\frac{rdr}{\sqrt{2r^2(R+B)-A^2}}.$$

De la même équation l'on déduit encore

$$\frac{dr^2}{dt^2}=2R+2B-\frac{A^2}{r^2};$$

étant différentiée, et divisée par $2dr$, elle devient

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{dR}{dr} + \frac{A^2}{r^3}.$$

On peut à l'aide de cette formule éliminer $\frac{dR}{dr}$ de la première des équations (1); elle donnera, après avoir été multipliée par r,

$$\frac{rd^2u}{dt^2} - \frac{ud^2r}{dt^2} + \frac{A^2}{r^4}\cdot\frac{u}{r} = 0;$$

mais

$$rd^2u - ud^2r = d[rdu - udr] = d\left[r^2d\left(\frac{u}{r}\right)\right].$$

Cette équation pourra donc être mise sous la forme

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{r^2d}{dt}\left(\frac{u}{r}\right)\right] + \frac{A^2}{r^2}\frac{u}{r} = 0;$$

ou bien, en la multipliant par $\frac{r^2}{A^2}$,

$$\frac{r^2d}{Adt}\left[\frac{r^2d}{Adt}\left(\frac{u}{r}\right)\right] + \frac{u}{r} = 0.$$

Elle deviendra plus simple en y employant une variable auxiliaire φ, telle que

$$(4) \qquad d\varphi = \frac{Adt}{r^2} = \frac{Adr}{r\sqrt{2r^2(R+B) - A^2}};$$

car elle se change en celle-ci :

$$\frac{d\,d(u:r)}{d\varphi\,d\varphi} + \frac{u}{r} = 0,$$

dans laquelle $\frac{u}{r}$ peut être considéré comme une variable principale à déterminer en fonction de φ. On aura de la même manière

$$\frac{d^2(v:r)}{d\varphi^2} + \frac{v}{r} = 0, \quad \frac{d^2(x:r)}{d\varphi^2} + \frac{x}{r} = 0, \text{ etc.}$$

[3]. Ces équations s'intègrent séparément, et en désignant par g, h, $g_{\prime}$, $h_{\prime}$, $g_{\prime\prime}$, $h_{\prime\prime}$,... des constantes arbitraires en nombre $2n$, on aura

$$(5)\quad \begin{cases} \frac{u}{r} = g\cos\varphi + h\sin\varphi, \\ \frac{v}{r} = g_{\prime}\cos\varphi + h_{\prime}\sin\varphi, \\ \frac{x}{r} = g_{\prime\prime}\cos\varphi + h_{\prime\prime}\sin\varphi, \\ \text{etc.} \end{cases}$$

De l'équation (3), on tire par l'intégration

$$(6)\qquad t + \alpha = \int \frac{rdr}{\sqrt{2r^2(R+B) - A^2}}.$$

Le second membre étant une fonction de r, on aura par cette équation la valeur de r en fonction de $t + \alpha$. L'intégration de la formule (4) donnera

$$(7)\qquad \varphi + 6 = \int \frac{Adr}{r\sqrt{2r^2(R+B) - A^2}},$$

au moyen de laquelle on obtiendra φ en fonction de r, et par suite en fonction de $t + \alpha$. Ayant ainsi r et φ en fonctions de $t + \alpha$, les équations (5) donneront les valeurs des n variables u, v, x, y,.... en fonctions de $t + \alpha$, de 6, de A, B, et des $2n$ constantes, g, $g_{\prime}$, $g_{\prime\prime}$,... h, $h_{\prime}$, $h_{\prime\prime}$....; c'est-à-dire que dans ces expressions il entrera $2n + 4$ arbitraires. On doit en conclure qu'il existe entre ces quantités plusieurs relations, car le problème n'admet que $2n$ arbitraires.

[4]. En premier lieu, on voit que la constante 6 ne fera que modifier les arbitraires g, h, $g_{\prime}$, $h_{\prime}$, etc., et que par suite on peut n'y avoir aucun égard en la traitant comme déjà comprise dans ces arbitraires. Ainsi le nombre des constantes ne doit plus compter que pour $2n + 3$. De l'équation $r^2 = u^2 + v^2 + x^2 + y^2 +$ etc., on tire $1 = \frac{u^2}{r^2} + \frac{v^2}{r^2} + \frac{x^2}{r^2} +$ etc.; substituant les valeurs du $\frac{u}{r}$, $\frac{v}{r}$, etc., données par les équations (5), et représentant $g^2 + g_{\prime}^2 + g_{\prime\prime}^2 +$ etc.

par Σg^2, $gh + g_i h_i +$ etc., par Σgh, etc., on aura

$$1 = \cos^2\varphi\, \Sigma g^2 + \sin^2\varphi\, \Sigma h^2 + 2 \sin\varphi \cos\varphi\, \Sigma gh.$$

Cette équation devant avoir lieu pour toute valeur de φ, elle entraîne les trois suivantes :

$$(8) \qquad 1 = \Sigma g^2, \quad 1 = \Sigma h^2, \quad 0 = \Sigma gh.$$

Ces égalités limitent les $2n + 3$ arbitraires qui entrent dans les expressions de u, v, x, y... en fonctions de la variable t, à $2n$ constantes indépendantes.

Pour satisfaire à ces conditions, on pourra donner aux arbitraires g, g_i, g_{ii}, etc., h, h_i, h_{ii} etc., une forme particulière que nous allons indiquer pour le cas de quatre variables u, v, x, y : cet exemple suffira pour faire comprendre un mode de composition qui s'étend à un nombre quelconque de quantités g, h, etc., etc. Nous poserons donc

$$g = \cos\gamma, \quad g_i = \sin\gamma \cos\gamma_i, \quad g_{ii} = \sin\gamma \sin\gamma_i \cos\gamma_{ii},$$
$$g_{iii} = \sin\gamma \sin\gamma_i \sin\gamma_{ii}:$$

quels que soient les angles γ, γ_i, γ_{ii} qui, sont en nombre $4 - 1 = 3$, on a manifestement

$$g^2 + g_i^2 + g_{ii}^2 + g_{iii}^2 = 1.$$

On posera aussi

$$h = \cos\eta, \quad h_i = \sin\eta \cos\eta_i, \quad h_{ii} = \sin\eta \sin\eta_i \cos\eta_{ii},$$
$$h_{iii} = \sin\eta \sin\eta_i \sin\eta_{ii},$$

et les trois nouvelles arbitraires η, η_i, η_{ii} donneront identiquement aussi $\Sigma h^2 = 1$; il ne restera plus qu'à satisfaire à l'égalité $\Sigma gh = 0$, ou bien à l'équation,

$$0 = \cos\gamma \cos\eta + \sin\gamma \sin\eta \cos\gamma_i \cos\eta_i + \sin\gamma \sin\eta \sin\gamma_i \sin\eta_i \cos\gamma_{ii} \cos\eta_{ii}$$
$$+ \sin\gamma \sin\eta \sin\gamma_i \sin\eta_i \sin\gamma_{ii} \sin\eta_{ii},$$

laquelle déterminera un des angles, par exemple γ, au moyen des cinq autres γ_i, γ_{ii}, η, η_i, η_{ii}.

Si le nombre des constantes $g, g_{\prime}, \ldots$ eût été cinq, on les eût composées ainsi avec quatre arbitraires $\gamma, \gamma_{\prime}, \gamma_{\prime\prime}, \gamma_{\prime\prime\prime}$:

$$g=\cos\gamma,\ g_{\prime}=\sin\gamma\cos\gamma_{\prime},\ g_{\prime\prime}=\sin\gamma\sin\gamma_{\prime}\cos\gamma_{\prime\prime},\ g_{\prime\prime\prime}=\sin\gamma\sin\gamma_{\prime}\sin\gamma_{\prime\prime}\cos\gamma_{\prime\prime\prime},$$
$$g_{\text{iv}}=\sin\gamma\sin\gamma_{\prime}\sin\gamma_{\prime\prime}\sin\gamma_{\prime\prime\prime},$$

et de même pour $h, h_{\prime}$, etc. Cette manière de satisfaire à une équation de la forme $\Sigma g^2 = 1$ a quelque analogie avec la formule que M. Poisson a donnée dans sa *Théorie de la Chaleur*, page 38. Les $2n$ quantités $g, g_{\prime}, \ldots h, h_{\prime}, \ldots$ seront donc exprimées au moyen de $2n-2$ arbitraires, liées entre elles par une équation, qui réduit le nombre des constantes indépendantes à $2n-3$: les constantes α, A, B complètent le nombre $2n$.

[5]. Nous avons fait voir que l'intégration des équations proposées entre les variables $u, v, x, \ldots$ dépend des deux intégrales

$$(6)\qquad t+\alpha=\int\frac{rdr}{\sqrt{2r^2(R+B)-A^2}},$$

$$(7)\qquad \varphi+6=\int\frac{Adr}{r\sqrt{2r^2(R+B)-A^2}}.$$

Ces deux fonctions, qui semblent indépendantes, peuvent néanmoins être ramenées à une origine commune. En effet, soit S une fonction de r telle que

$$S=\int\frac{dr}{r}\sqrt{2r^2(R+B)-A^2},$$

il est évident que l'on aura par des différentiations partielles :

$$(9)\qquad t+\alpha=\frac{dS}{dB},\qquad \varphi+6=-\frac{dS}{dA}.$$

[6]. Les formules que nous venons d'exposer montrent que les variables $u, v, x\ldots$ fournies par des équations de la forme

$$\frac{d^2u}{dt^2}=\frac{dR}{dr}\,\frac{u}{r},\quad \frac{d^2v}{dt^2}=\frac{dR}{dr}\,\frac{v}{r},\quad \text{etc.},$$

ne dépendent que de la détermination de la seule intégrale S, et de

ses deux différentielles relatives à A et à B. Ces différentiations, le plus communément, s'effectueront sans difficultés et sans introduire de transcendantes supérieures à celles dont S sera composé : nous disons *le plus communément*, car il y a des cas où cet énoncé ne sera pas exact, et où le calcul de la différentielle d'une fonction introduira des fonctions d'un ordre de difficulté ou de complication autre que celui des fonctions différentiées.

Des recherches sur la théorie de la variation des arbitraires dans les questions de Mécanique, appliquées au problème d'un point attiré vers un centre fixe par une force $\frac{dR}{dr}$, m'avaient conduit aux équations (9) pour le cas de trois variables u, v, x seulement. Mais il me fut facile d'y reconnaître un corollaire d'une proposition générale énoncée par M. Jacobi, et relative à l'intégration des deux équations du mouvement d'un point qui doit demeurer dans un plan. Ce résultat reçoit ici une extension de généralité notable, en ce qu'il s'applique à un nombre quelconque d'équations différentielles du second ordre de la forme particulière dont nous nous occupons.

[7]. Nous avons trouvé ci-dessus que l'équation $\frac{d^2u}{dt^2} = \frac{dR}{dr} \cdot \frac{u}{r}$ se transforme en $\frac{r^2}{A} \frac{d}{dt}\left[\frac{r^2 d(u:r)}{Adt}\right] + \frac{u}{r} = 0$, par cela seul qu'il existe entre r et t la relation $t + \alpha = \int \frac{rdr}{\sqrt{2r^2(R+B) - A^2}}$, c'est-à-dire que r est une fonction de $t + \alpha$ déterminée par cette équation (6) ; et qu'en employant la variable auxiliaire φ de la formule (7), la même équation devient

$$\frac{d^2(u:r)}{d\varphi^2} + \frac{u}{r} = 0,$$

dont l'intégrale est

$$u = r[g \cos\varphi + h \sin\varphi].$$

Il en résulte que cette dernière équation doit être considérée comme l'intégrale générale de l'équation $\frac{d^2u}{dt^2} = \frac{dR}{dr} \frac{u}{r}$ dans laquelle la quantité $\frac{dR}{rdr}$ sera une fonction donnée de $t + \alpha$, A et B. Alors g et h seront

les deux constantes arbitraires exigées, par l'ordre de l'équation.

Afin de donner un exemple, nous supposerons $R=\frac{m}{r}$ et l'équation à intégrer sera $\frac{d^2u}{dt^2}+\frac{mu}{r^3}=0$, r étant donnée en fonction de t par l'équation $t+\alpha=\int\frac{rdr}{\sqrt{2r^2\left(\frac{m}{r}+B\right)-A^2}}$. Pour rentrer dans des formules usuelles, nous écrirons $B=-\frac{m}{a}$, et $A^2=ma(1-e^2)$; l'équation d'où dépend r sera alors $t+\alpha=\int\frac{rdr}{\sqrt{\frac{m}{a}[a^2e^2-(a-r)^2]}}$. On posera ici, à l'ordinaire,

$$a-r=ea\cos\psi,\quad \text{ou}\quad r=a(1-e\cos\psi),$$

ψ étant une nouvelle quantité auxiliaire, connue des géomètres sous le nom d'*anomalie excentrique*, dans la théorie du mouvement elliptique; de là il suit que

$$t+\alpha=\int\frac{a^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{m}}d\psi(1-e\cos\psi),\ \text{ou}\ \psi-e\sin\psi=(t+\alpha)\sqrt{\frac{m}{a^3}};$$

équation dont on devra tirer la valeur de ψ pour la substituer dans celles de r, et de φ exprimée en r. Mais

$$d\varphi=\frac{A}{r^2}.dt=\frac{\sqrt{ma(1-e^2)}\,a^{\frac{3}{2}}d\psi(1-e\cos\psi)}{\sqrt{m}.a^2(1-e\cos\psi)^2}=\frac{\sqrt{1-e^2}.d\psi}{1-e\cos\psi};$$

il s'ensuit que $\tang\frac{\varphi}{2}=\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}.\tang\frac{\psi}{2}$, en négligeant la constante que l'intégration aurait pu introduire. D'après cette formule, on aura

$$\cos\varphi=\frac{\cos\psi-e}{1-e\cos\psi}=\frac{a(\cos\psi-e)}{r},$$

$$\sin\varphi=\frac{\sin\psi\sqrt{1-e^2}}{1-e\cos\psi}=\frac{a\sin\psi\sqrt{1-e^2}}{r}.$$

L'intégrale de l'équation proposée étant

$$u = r(g\cos\varphi + h\sin\varphi),$$

pourra encore être écrite ainsi :

$$u = ag(\cos\psi - e) + ah\sin\psi\sqrt{1 - e^2};$$

où l'on n'a plus qu'à remplacer ψ par sa valeur en t. Cette substitution exigerait la résolution de l'équation

$$\psi - e\sin\psi = (t + \alpha)\sqrt{\frac{m}{a^3}},$$

que l'on ne peut obtenir que par la voie des séries et sous de certaines conditions limitatives de la grandeur de e. Néanmoins on obtiendra l'intégrale ou la relation cherchée entre t et la fonction u, de la manière suivante. Remplaçons d'abord les constantes g et h par deux nouvelles arbitraires γ, $\varkappa$ telles que $ag = \gamma\cos\varkappa$, $ah\sqrt{1 - e^2} = \gamma\sin\varkappa$; et par suite, nous pourrons écrire ainsi l'équation entre ψ et u,

$$\cos(\psi - \varkappa) = e\cos\varkappa + \frac{u}{\gamma}.$$

De celle-ci on tire

$$\psi = \varkappa + \operatorname{arc}\left(\cos = \frac{u}{\gamma} + e\cos\varkappa\right).$$

Cette valeur de ψ mise dans l'équation en ψ et t lui donne cette autre forme

$$(t + \alpha)\sqrt{\frac{m}{a^3}} = \varkappa + \operatorname{arc}\left(\cos = \frac{u}{\gamma} + e\cos\varkappa\right) - e\sin\varkappa\left(\frac{u}{\gamma} + e\cos\varkappa\right)$$
$$- e\cos\varkappa\sqrt{1 - \left(\frac{u}{\gamma} + e\cos\varkappa\right)^2}.$$

De cette égalité il sera facile de faire disparaître la fonction..... $\operatorname{arc}\left(\cos = \frac{u}{\gamma} + e\cos\varkappa\right)$ en l'isolant dans un seul membre, puis en prenant les cosinus des deux membres : ce résultat sera l'intégrale gé-

nérale de l'équation différentielle du second ordre $\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{mu}{r^3} = 0$, r étant une fonction de t donnée par les formules

$$r = a(1 - e\cos\psi),\quad \psi - e\sin\psi = (t+\alpha)\sqrt{\frac{m}{a^3}},$$

dont on doit éliminer la quantité auxiliaire ψ : les constantes γ et η seront les deux arbitraires de l'intégration.

[8]. Nous venons de trouver l'intégrale de l'équation linéaire du second ordre $\frac{d^2u}{dt^2} = \frac{dR}{dr}\cdot\frac{u}{r}$, où r représente une fonction de t dépendante de la résolution de l'équation

$$(6)\qquad t + \alpha = \int \frac{rdr}{\sqrt{2r^2(R+B) - A^2}}:$$

dans cette dernière formule la quantité A^2 semble devoir être essentiellement positive pour que φ ne soit pas imaginaire. L'équation différentielle s'intègre néanmoins, mais avec quelques modifications dans la forme des résultats, lorsque la formule (6) est remplacée par la suivante où l'on supprime B qui peut être compris dans R,

$$(6')\qquad t + \alpha = \int \frac{rdr}{\sqrt{2r^2 R + A^2}}.$$

En effet, de celle-ci, on tire

$$\frac{dr^2}{dt^2} = 2R + \frac{A^2}{r^2};$$

par la différentiation, et après avoir divisé par $2dr$, on aura

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{dR}{dr} - \frac{A^2}{r^3}.$$

En éliminant $\frac{dR}{dr}$ de l'équation proposée, à l'aide de la précédente, elle deviendra

$$r\frac{d^2u}{dt^2} - u\frac{d^2r}{dt^2} - \frac{A^2}{r^2}\cdot\frac{u}{r} = 0,$$

à laquelle on donnera, comme ci-dessus (:), la forme

$$\frac{r^2}{A^2}\cdot\frac{d}{dt}\left[\frac{r^2 d}{dt}\left(\frac{u}{r}\right)\right] - \frac{u}{r} = 0\,;$$

ou bien, en posant encore $d\varphi_1 = \frac{Adt}{r^2} = \frac{Adr}{r\sqrt{2r^2 R + A^2}}$;

l'équation se change en $\frac{dd(u:r)}{d\varphi_1^2} - \frac{u}{r} = 0$;

alors elle a pour intégrale

$$\frac{u}{r} = ge^{\varphi_1} + he^{-\varphi_1},$$

g et h étant deux arbitraires, e la base hyperbolique; et la quantité auxiliaire φ_1 étant donnée par l'égalité

$$\varphi_1 = \int\frac{Adr}{r\sqrt{2r^2 R + A^2}}.$$

On serait arrivé au même résultat en passant du réel à l'imaginaire dans les formules du cas que nous avons traité en premier lieu, et où A^2 avait le signe — sous le radical: il aurait fallu pour cela remplacer, dans les formules, r par $r\sqrt[4]{-1}$, R par $R\sqrt{-1}$, φ par $\varphi\sqrt{-1}$, et enfin changer sin $(\varphi\sqrt{-1})$ et cos $(\varphi\sqrt{-1})$ en exponentielles réelles.

On ne connaît qu'un petit nombre d'équations différentielles du second ordre intégrables. J'ai cru devoir appeler l'attention des géomètres sur l'équation linéaire $\frac{d^2u}{dt^2} = \frac{dR}{rdr}u$, où r dépend de t selon la formule $t = \int\frac{rdr}{\sqrt{2r^2R + A^2}}$, parce que cette classe est fort étendue, R étant une fonction indéterminée de r: elle comprend l'équation linéaire à coefficient constant.

SOLUTION

D'un Problème de Probabilité, relatif au Jeu de rencontre;

Par E. CATALAN,

Ancien élève de l'École Polytechnique.

---

1. *Une urne contient m boules marquées a, b, c, d,..., que l'on tire toutes successivement, pour les remettre ensuite. Quelle est la probabilité que, dans deux tirages consécutifs, n boules sortiront dans le même ordre ?*

Supposons que l'on fasse le premier tirage, et qu'à mesure que les boules sortent de l'urne, on écrive leurs noms sur une même ligne; supposons aussi que la même chose ait lieu pour le second tirage, et que la seconde ligne soit écrite au-dessous de la première. On obtiendra de la sorte, deux suites composées chacune de m lettres, et qui seront par exemple :

$$
\begin{array}{llr}
1^{\text{er}}\ \text{tirage}\ldots\ldots\ldots & g,\ a,\ h,\ l,\ i,\ c,\ e,\ d,\ldots. & (1)\\
2^{\text{e}}\ \text{tirage}\ldots\ldots\ldots & i,\ l,\ h,\ g,\ b,\ d,\ e,\ f,\ldots.. & (2)
\end{array}
$$

J'appellerai *correspondance* la rencontre, au même rang, de deux lettres semblables : ainsi, les lettres h, e forment deux correspondances.

La question revient alors à celle-ci :

Quelle est la probabilité qu'en écrivant au hasard les suites (1) *et* (2), *composées des mêmes lettres, on obtiendra n correspondances ?*

Écrivons arbitrairement la première ligne; puis, pour former la seconde, commençons par faire correspondre n lettres; nous devrons ensuite écrire les autres $m-n$ lettres, de manière qu'elles ne présentent

aucune correspondance : je désigne pour un instant par X_{m-n} le nombre de solutions dont cette question est susceptible.

Nous aurons alors, pour n correspondances *désignées*, X_{m-n} systèmes. Et comme les n lettres, au lieu d'êtres désignées, sont quelconques, le nombre X_{m-n} doit être multiplié par le nombre des combinaisons de m lettres, prises n à n; quantité que je désignerai par $C_{m,n}$.

Ainsi, pour un arrangement quelconque des lettres de la première ligne, il y en a $C_{m,n} \times X_{m-n}$ des lettres de la seconde, pour lesquels n lettres correspondent. De plus, les lettres de la première ligne pouvant être disposées d'autant de manières que l'indique le nombre des permutations de m lettres, prises toutes ensemble, il s'ensuit que le nombre des chances favorables à l'événement demandé, est

$$P_m . C_{m,n} . X_{m-n}. \tag{3}$$

Le nombre total des chances est évidemment $(P_m)^2$: donc la probabilité cherchée a pour expression

$$p = \frac{C_{m,n} . X_{m-n}}{P_m}; \tag{4}$$

ou bien, en mettant pour $C_{m,n}$ et P_m leurs valeurs connues,

$$p = \frac{X_{m-n}}{1.2.3\ldots n.1.2.3\ldots(m-n)}. \tag{5}$$

2. Déterminons X_{m-n}.

En remplaçant $m-n$ par μ, la question peut être posée de cette manière :

Les μ lettres $a, b, c, d, \ldots h$, i étant écrites sur une même ligne, trouver de combien de manières l'on peut former une seconde ligne de ces mêmes lettres, avec la condition qu'aucune d'elles n'occupe le même rang dans ces deux lignes.

Cette quantité sera désignée par X_μ.

Supposons cette opération déjà effectuée pour les $\mu - 1$ lettres $a, b, c, \ldots h$; et considérons l'un quelconque de ces systèmes :

$$\left.\begin{array}{ll} 1^{re} \text{ ligne} \ldots\ldots\ldots & a, b, c, \ldots h, \\ 2^{e} \text{ ligne} \ldots\ldots\ldots & g, d, a, \ldots c. \end{array}\right\} \quad (6)$$

Apportons la μ^e lettre i à la fin de chaque ligne ; puis, dans la seconde, changeons successivement chacune des $\mu - 1$ lettres qui y entrent, en i, et réciproquement.

Il est visible que nous obtiendrons de la sorte, $\mu - 1$ systèmes, qui feront partie des X_μ systèmes demandés.

Considérons encore deux lignes de $\mu - 1$ lettres, parmi lesquelles il y ait 1 correspondance ; par exemple :

$$\left.\begin{array}{ll} 1^{re} \text{ ligne} \ldots\ldots\ldots & a,\ b,\ c,\ d,\ldots h, \\ 2^{e} \text{ ligne} \ldots\ldots\ldots & a,\ f,\ d,\ b,\ldots c. \end{array}\right\} \qquad (7)$$

Écrivons la μ^e lettre i à la fin de chaque ligne ; puis, dans la seconde, changeons i en a ; nous aurons encore un des arrangements cherchés. Nous pourrons faire la même chose pour chacune des $\mu - 1$ lettres $a, b, c, \ldots h$; et comme, pour une lettre qui correspond, il en reste $\mu - 2$, que l'on peut intervertir d'autant de manières que l'indique $X_{\mu-2}$, il s'ensuit que

$$X_\mu = (\mu - 1)(X_{\mu-1} + X_{\mu-2}). \qquad (8)$$

est évident que $X_1 = 0$, et $X_2 = 1$. On a ensuite $X_3 = 2.1 = 2$, $X_4 = 3(2 + 1) = 9$, $X_5 = 4(9 + 2) = 44$, etc.

On voit donc que la suite des termes $X_1, X_2, X_3, \ldots X_{\mu-2}, X_{\mu-1}, X_\mu, \ldots$ forme une série dans laquelle *un terme quelconque est égal à la somme des deux précédents, multipliée par le rang du terme qui précède celui que l'on cherche.*

3. On peut transformer la formule (8) en une autre plus simple :

D'abord, pour la symétrie du calcul, posons $X_0 = 1$: cette valeur satisfait à la loi générale, car alors $X_2 = 1\,(X_1 + X_0)$.

Ensuite, en changeant dans la formule ci-dessus, μ en $\mu - 2$, $\mu - 4, \ldots$ et supposant μ *pair*, nous aurons

$$\left.\begin{array}{l} X_\mu = (\mu - 1)(X_{\mu-1} + X_{\mu-2}), \\ X_{\mu-2} = (\mu - 3)(X_{\mu-3} + X_{\mu-4}), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ X_4 = 3(X_3 + X_2), \\ X_2 = 1\,(X_1 + 1). \end{array}\right\} \qquad (9)$$

60..

La somme de toutes ces équations est

$$X_\mu = (\mu-1)X_{\mu-1} + (\mu-2)X_{\mu-2} + \ldots + 3X_3 + 2X_2 + 1X_1 + 1. \quad (10)$$

Changeant μ en $(\mu-1)$, nous aurons, $(\mu-1)$ étant *impair*,

$$X_{\mu-1} = (\mu-2)X_{\mu-1} + \ldots + 3X_3 + 2X_2 + 1X_1; \quad (11)$$

d'où

$$X_\mu = \mu X_{\mu-1} + 1.$$

μ étant *impair*, nous obtiendrions de même

$$X_\mu = \mu X_{\mu-1} - 1.$$

La formule générale est donc

$$X_\mu = \mu X_{\mu-1} \pm 1, \quad (12)$$

en prenant le signe supérieur si μ est pair.

On voit donc, que, *pour obtenir un terme quelconque, il suffit de multiplier son rang par le terme précédent, et d'ajouter ou de retrancher l'unité.*

La valeur de X_μ croît très rapidement avec μ: on a $X_1 = 0$, $X_2 = 1$, $X_3 = 2$, $X_4 = 9$, $X_5 = 44$, $X_6 = 265$, $X_7 = 1854$, $X_8 = 14\,833$, $X_9 = 133\,496$, $X_{10} = 1\,334\,961$, $X_{11} = 14\,684\,570$, $X_{12} = 176\,214\,841$, $X_{13} = 2\,290\,792\,932$, $X_{14} = 32\,071\,101\,049$, $X_{15} = 481\,066\,515\,734$, etc.

4. Déterminons le terme général X_μ seulement en fonction de μ.

En changeant dans l'équation (12), μ en $\mu-1$, $\mu-2$, ... nous obtiendrons les $\mu+1$ équations,

$$\left.\begin{array}{l} X_\mu = \mu X_{\mu-1} \pm 1, \\ X_{\mu-1} = (\mu-1)X_{\mu-2} \mp 1, \\ X_{\mu-2} = (\mu-2)X_{\mu-3} \pm 1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ X_3 = 3X_2 - 1, \\ X_2 = 2X_1 + 1, \\ X_1 = 1X_0 - 1, \\ X_0 = 1. \end{array}\right\} \quad (13)$$

Multipliant alors la 2^e^ équation par μ, la 3^e^ par $\mu(\mu-1)$, etc.; il vient, en ajoutant les produits :

$$\left.\begin{array}{l}X_\mu = \pm 1 \mp \mu \pm \mu(\mu-1) \mp \mu(\mu-1)(\mu-2) \pm \ldots \\ \quad -\mu(\mu-1)\ldots 3.2 + \mu(\mu-1)\ldots 3.2.1.\end{array}\right\} \quad (14)$$

Donc X_μ *est égal à la différence entre le nombre des permutations de* μ *lettres prises en nombre pair, et celui des permutations de ces mêmes lettres prises en nombre impair.*

5. La valeur de X_μ peut se mettre sous la forme

$$X_\mu = 1.2.3\ldots(\mu-1)\mu\left[1 - \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} - \frac{1}{1.2.3} + \ldots \pm \frac{1}{1.2.3\ldots(\mu-1)\mu}\right] (15).$$

La série entre parenthèses a une analogie remarquable avec le développement de la base des logarithmes népériens : on sait que ce développement a pour valeur la limite de $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. De même, la série ci-dessus a pour valeur la somme des $\mu+1$ premiers termes du développement de $\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$, après qu'on y a fait n infini.

En négligeant les puissances supérieures à la première, on a $\frac{1}{1+\frac{1}{n}} = 1 - \frac{1}{n}$: il s'ensuit qu'en désignant à l'ordinaire par e la base des logarithmes népériens, la série ci-dessus est le développement de $\frac{1}{e}$, limité aux $\mu+1$ premiers termes. C'est ce qui devient évident si l'on prend la relation

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots\ldots \quad (16)$$

et si l'on y pose $x = -1$.

Il s'ensuit aussi que la valeur *limite* de X_μ est

$$\frac{1.2.3.4\ldots(\mu-1)\mu}{e}. \quad (17)$$

Comme la série (15) est très convergente, la valeur (17) est très ap-

prochée, dès que μ dépasse une certaine limite, qui n'est pas élevée. En faisant le calcul, on trouve que, pour $\mu > 13$,

$$\frac{1}{e} = 0,367\ 879\ 441\ 19\ldots \qquad (18)$$

Donc aussi, pour $\mu > 13$,

$$X_\mu = 0,367\ 879\ 441\ 19 \times 1.2.3\ldots(\mu-1)\mu. \qquad (19)$$

Enfin, si l'on met pour le produit des μ premiers nombres naturels, sa valeur approchée, on aura, à fort peu près,

$$X_\mu = \frac{\mu^\mu \sqrt{2\pi\mu}}{e^{\mu+1}}\left(1 + \frac{1}{12\mu} + \frac{1}{288\mu^2} + \ldots\right) \qquad (20)$$

5. Revenant au problème qui fait l'objet de cette note, nous aurons, en remplaçant X_{m-n} par sa valeur, dans la formule (5) :

$$p = \frac{1}{1.2.3\ldots(n-1)n}\left[1 - \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} - \ldots \pm \frac{1}{1.2.3\ldots(m-n-1)(m-n)}\right], \qquad (21)$$

pour l'expression exacte de la probabilité. Lorsque $m-n$ dépasse 13, la valeur très approchée est

$$p = \frac{0,367\ 879\ 441\ 19}{1.2.3\ldots(n-1)n}. \qquad (22)$$

Prenons pour exemple $m = 20$, $n = 5$, $m-n = 15$; les formules (21) ou (22) donnent également

$$p = 0,003\ 065\ 662.$$

6. Cherchons la probabilité que, dans les deux tirages, aucune lettre ne sortira au même rang. Posant $n = 0$ dans la formule (21), il vient pour la probabilité demandée,

$$p' = 1 - \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} - \ldots \pm \frac{1}{1.2.3\ldots(m-1)m}. \qquad (23)$$

Et si m est infini,

$$p' = \frac{1}{e} \qquad (24)$$

Telle est la probabilité que, dans deux séries des mêmes événements indépendants les uns des autres, et en nombre infini, aucun événement n'arrivera dans le même ordre.

Si de l'unité nous retranchons p', nous obtiendrons, pour la probabilité *d'au moins* une correspondance dans les deux tirages successifs,

$$p'' = \frac{e-1}{e}. \qquad (25)$$

Cette probabilité est celle du *jeu de rencontre*, qui consiste en ceci :

Deux joueurs ont chacun un jeu de cartes, complet; chacun d'eux tire successivement une carte de son jeu, jusqu'à ce que la même carte sorte en même temps, des deux côtés. L'un des joueurs parie qu'il y aura *rencontre;* l'autre parie le contraire. En supposant le nombre des cartes infini, il est clair que la probabilité du premier est p'', et celle du second, p'.

On a

$$p'' = 0,632\ldots. \quad p' = 0,368\ldots;$$

et comme ces valeurs sont fort approchées lorsque m est plus grand que 13, il s'ensuit qu'on peut les regarder comme exactes, même pour un jeu de 32 cartes (*).

7. Le problème (1) présente une circonstance assez remarquable : la valeur (22) ne contient en dénominateur que la variable n. Quant au numérateur, on vient de voir qu'aussitôt que $m-n$ dépasse 13, il reste, à fort peu près, constant. Donc aussi, la probabilité demandée est, presque rigoureusement, indépendante du nombre de boules que

---

(*) Le problème dont je m'occupe ici, m'avait été proposé, il y a plus de deux ans, à l'École Polytechnique. Ce n'est qu'après en avoir envoyé la solution à M. Liouville, que j'ai appris qu'Euler s'était occupé du problème des rencontres, qui est, comme on le voit, un cas très particulier du mien.

On trouvera la solution d'Euler dans les *Mémoires de l'Académie de Berlin*, année 1751. On pourra consulter aussi le *Calcul des Probabilités* de Laplace, p. 217, et le tome XII *des Annales de Mathématiques*. Je n'ai eu connaissance de tout cela que depuis peu de temps.

contient l'urne : elle dépend seulement de la quantité de boules qui doivent sortir aux mêmes rangs, dans les deux tirages.

8. Dans la formule (22), faisons varier n de 0 à m, et ajoutons tous les résultats : la somme est évidemment l'unité, qui est le symbole de la certitude. Donc

$$1 = \Sigma_0^m \frac{1 - \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} - \ldots \pm \frac{1}{1.2.3\ldots(m-n)}}{1.2.3\ldots n}. \qquad (26)$$

Cette équation peut se mettre sous la forme

$$\begin{aligned}1 = 1\left(1 + \tfrac{1}{1} + \tfrac{1}{1.2} + \ldots + \tfrac{1}{1.2.3\ldots m}\right) &- \tfrac{1}{1}\left(1 + \tfrac{1}{1} + \tfrac{1}{1.2} + \ldots + \tfrac{1}{1.2\ldots(m-1)}\right)\\
&+ \tfrac{1}{1.2}\left(1 + \tfrac{1}{1} + \tfrac{1}{1.2} + \ldots + \tfrac{1}{1.2\ldots(m-2)}\right) - \ldots\\
&\mp \tfrac{1}{1.2.3.4\ldots(m-1)}\left(1 + \tfrac{1}{1}\right) \pm \tfrac{1}{1.2.3\ldots(m-1)m}.\end{aligned}$$

Multipliant les deux membres par $1.2.3\ldots(m-1)m$, elle devient

$$\begin{aligned}1.2.3\ldots(m-1)m = {} & [1 + m + m(m-1) + \ldots + m(m-1)(m-2)\ldots 3.2.1]\\
& - \tfrac{m}{1}[1 + (m-1) + (m-1)(m-2) + \ldots + (m-1)(m-2)\ldots 3.2.1]\\
& + \tfrac{m}{1}\tfrac{m-1}{2}[1 + (m-2) + (m-2)(m-3) + \ldots + (m-2)(m-3)\ldots 3.2.1]\\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
& \mp \tfrac{m}{1}\tfrac{m-1}{2}\ldots\tfrac{2}{m-1}[1+1] \pm 1. \qquad (27)\end{aligned}$$

Si l'on représente par S_n la somme des nombres de permutations de n lettres, prises 0 à 0, 1 à 1, 2 à 2,... n à n, cette équation peut se mettre sous la forme

$$1.2.3\ldots(m-1)m = S_m - C_{m,1}.S_{m-1} + C_{m,2}.S_{m-2} - \ldots \mp C_{m,1}.S_1 \pm 1. \qquad (28)$$

L'équation (27) exprime un théorème sur les nombres, l'équation (28) un théorème sur les combinaisons.

9. Je supposerai maintenant qu'au lieu d'extraire toutes les boules

de l'urne, on n'en tire qu'un nombre t. Le problème 1 se change en cet autre, plus général :

Quelle est la probabilité que, dans deux tirages consécutifs d'une urne contenant m boules marquées a, b, c,... h, i, dont il en sort t à chaque tirage, n lettres sortiront dans le même ordre?

En suivant la même marche que précédemment, l'on voit que, après avoir fait correspondre n lettres dans un système de deux lignes, il reste à placer dans chacune d'elles, $t-n$ autres lettres, prises parmi les $m-n$ restantes; et cela, avec la condition qu'il ne se présente plus aucune correspondance. Supposons pour un instant que cette opération a été effectuée de toutes les manières possibles, et désignons par $Y_{m-n,\,t-n}$ le nombre des systèmes ainsi obtenus.

Actuellement, les n lettres correspondantes pouvant être quelconques, et pouvant occuper t places, il s'ensuit que le nombre ci-dessus doit être multiplié par $C_{m,n}.P_{t,n}$. Les chances favorables à l'évènement demandé sont donc en nombre $C_{m,n}.P_{t,n}.Y_{m-n,\,t-n}$. Le nombre des chances possibles est $(P_{m,t})^2$. La probabilité cherchée a donc pour expression

$$p=\frac{C_{m,n}.\,P_{t,n}.\,Y_{m-n,\,t-n}}{(P_{m,t})^2}, \qquad (29)$$

10. Déterminons $Y_{m-n,\,t-n}$.

En remplaçant $m-n$ par μ et $t-n$ par α, la question revient à ceci :

De combien de manières peut-on former deux lignes composées de α lettres, prises parmi μ lettres données, avec la condition qu'aucune lettre n'occupe le même rang dans les deux lignes? Ce nombre sera représenté par $Y_{\mu,\alpha}$.

Soient les μ lettres $a, b, c, d \ldots g, h$. Considérons l'un quelconque des systèmes de deux lignes formées seulement de $\alpha-1$ lettres, système qui n'a aucune correspondance, et qui sera, pour fixer les idées :

$$\begin{matrix} a, f, i, b \ldots\ldots e, \\ g, i, a, h \ldots\ldots d. \end{matrix} \qquad (30)$$

A la fin de chacune de ces deux lignes, apportons l'une quelconque des $\mu-(\alpha-1)$ lettres qui n'y entrent pas : par exemple, g pour la

première, et c pour la seconde. Nous aurons alors deux lignes de α lettres; savoir

$$\begin{array}{l} a,\ f,\ i,\ b\ \ldots\ldots\ e,\ g, \\ g,\ i,\ a,\ h\ \ldots\ldots\ d,\ c. \end{array} \qquad (31)$$

Il est visible que ce système sera l'un de ceux demandés, sauf le cas où les deux lettres introduites seraient semblables : nous reviendrons sur cette circonstance.

En n'en tenant pas compte, nous voyons que, pour un système de $(\alpha - 1)$ lettres, nous en obtenons $(\mu - \alpha + 1)^2$ de α lettres. Et comme le nombre des systèmes de $\alpha - 1$ lettres est représenté par $Y_{\mu,\alpha-1}$, celui des systèmes de α lettres le sera par $(\mu-\alpha+1)^2.Y_{\mu,\alpha-1}$, dont il faut actuellement retrancher le nombre des systèmes composés de lignes terminées par une même lettre.

Or, si nous avons placé une même lettre a à la fin de deux lignes de $\alpha - 1$ lettres, c'est parce qu'elle n'y entrait pas encore : ces deux lignes peuvent donc être considérées comme composant l'un des systèmes de $\alpha - 1$ lettres, prises seulement parmi les $\mu - 1$ autres lettres $b, c, d, \ldots h$. Donc, parmi les systèmes obtenus tout-à-l'heure, il y en a $Y_{\mu-1,\alpha-1}$ terminés par a, a, autant par b, b, etc.; en tout, $\mu . Y_{\mu-1,\alpha-1}$ systèmes à rejeter. Nous avons donc

$$Y_{\mu,\alpha} = (\mu - \alpha + 1)^2\, Y_{\mu,\alpha-1} - \mu . Y_{\mu-1,\alpha-1}. \qquad (32)$$

11. Avant d'aller plus loin, remarquons que, pour la symétrie des calculs, on peut supposer $Y_{\mu,0} = Y_{\mu-1,0} = 1$: car alors, en faisant $\alpha = 1$ dans la formule, il vient

$$Y_{\mu,1} = \mu^2 - \mu = \mu(\mu - 1).$$

Il est évident en effet que, si chaque ligne ne contient qu'une lettre, le nombre des systèmes est égal au nombre des permutations de μ lettres, prises 2 à 2.

Maintenant, changeons α en $\alpha - 1, \alpha - 2, \ldots.\ 3, 2, 1$, nous obtiendrons les α équations

$$\left.\begin{aligned}
Y_{\mu,\alpha} &= (\mu-\alpha+1)^2 \,.\, Y_{\mu,\alpha-1} - \mu \,.\, Y_{\mu-1,\alpha-1},\\
Y_{\mu,\alpha-1} &= (\mu-\alpha+2)^2 \,.\, Y_{\mu,\alpha-2} - \mu \,.\, Y_{\mu-1,\alpha-2},\\
Y_{\mu,\alpha-2} &= (\mu-\alpha+3)^2 \,.\, Y_{\mu,\alpha-3} - \mu \,.\, Y_{\mu-1,\alpha-3},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
Y_{\mu,2} &= (\mu-1)^2 \,.\, Y_{\mu,\alpha} - \mu \,.\, Y_{\mu-1,1},\\
Y_{\mu,1} &= \mu^2 \,.\, 1 - \mu \,.\, 1.
\end{aligned}\right\} \quad (33)$$

Multiplions la seconde équation par $(\mu-\alpha+1)^2$, la troisième par $(\mu-\alpha+1)^2 \,.\, (\mu-\alpha+2)^2$, etc., puis ajoutons. Il vient

$$\left.\begin{aligned}
Y_{\mu,\alpha} = (\mu \,.\, \mu-1 \,.\, \mu-2 \ldots \mu-\alpha+1)^2 - \mu \,.\, [Y_{\mu-1,\alpha-1}\\
+(\mu-\alpha+1)^2 Y_{\mu-1,\alpha-2} + (\mu-\alpha+1)^2(\mu-\alpha+2)^2 Y_{\mu-1,\alpha-3}\\
+\ldots+(\mu-\alpha+1)^2 \,.\, (\mu-\alpha+2)^2 \ldots (\mu-1)^2]
\end{aligned}\right\} \quad (34)$$

Cette équation aux différences finies, est plus compliquée que l'équation (32); mais elle va nous conduire facilement à l'expression générale de $Y_{\mu,\alpha}$.

Pour cela, posons successivement $\alpha = 1,\ 2,\ 3, \ldots$ dans cette équation, et dans celle que l'on en déduit en changeant μ en $\mu - 1$; nous obtiendrons :

pour $\alpha = 1$, $Y_{\mu,1} = \mu^2 - \mu$, $Y_{\mu,1} = \mu(\mu-1)$
et $Y_{\mu-1,1} = (\mu-1)[(\mu-1)-1]$,

$$\alpha = 2;\ Y_{\mu,2} = \mu^2(\mu-1)^2 - \mu[(\mu-1)^2 - (\mu-1) + (\mu-1)^2]$$
$$= \mu^2(\mu-1)^2 - \mu[2(\mu-1)^2 - (\mu-1)]$$

$$\text{ou}\quad Y_{\mu,2} = \mu(\mu-1)[\mu(\mu-1) - 2(\mu-1) + 1],$$

$$Y_{\mu-1,2} = (\mu-1)(\mu-2)[(\mu-1)(\mu-2) - 2(\mu-2) + 1],$$

$$\begin{aligned}
\alpha = 3,\ Y_{\mu,3} &= \mu^2(\mu-1)^2(\mu-2)^2 - \mu[(\mu-1)^2(\mu-2)^2\\
&\quad - 2(\mu-1)(\mu-2)^2 + (\mu-1)(\mu-2) + (\mu-1)^2(\mu-2)\\
&\quad - (\mu-1)(\mu-2)^2 + (\mu-2)^2(\mu-1)^2]\\
&= \mu^2(\mu-1)^2(\mu-2)^2 - \mu[3(\mu-1)^2(\mu-2)^2\\
&\quad - 3(\mu-1)(\mu-2)^2 + (\mu-1)(\mu-2)
\end{aligned}$$

$$Y = \mu(\mu-1)(\mu-2)[\mu(\mu-1)(\mu-2)-3(\mu-1)(\mu-2) \\ +3(\mu-2)-1],$$

$$\alpha = 4,\ Y_{\mu,4} = \mu(\mu-1)(\mu-2)(\mu-3)[\mu(\mu-1)(\mu-2)(\mu-3) \\ -4(\mu-1)(\mu-2)(\mu-3)+6(\mu-2)(\mu-3)-4(\mu-3)+1].$$

etc.

La loi est actuellement évidente, et nous sommes en droit de poser, *sauf vérification*

$$\left.\begin{array}{l} Y_{\mu,\alpha} = \mu.(\mu-1)\ldots(\mu-\alpha+1)\Big[\mu.(\mu-1)\ldots(\mu-\alpha+1) \\ -\frac{\alpha}{1}(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-\alpha+1)+\frac{\alpha}{1}.\frac{\alpha-1}{2}.(\mu-2)\ldots(\mu-\alpha+1) \\ \qquad -\ldots\pm\frac{\alpha}{1}(\mu-\alpha+1)\mp 1\Big]. \end{array}\right\} \quad (35)$$

En employant les mêmes relations que ci-dessus, cette formule peut se mettre sous la forme plus simple

$$\left.\begin{array}{l} Y_{\mu,\alpha} = P_{\mu,\alpha}[P_{\mu,\alpha} - C_{\alpha,1}.P_{\mu-1,\alpha-1} + C_{\alpha,2}.P_{\mu-2,\alpha-2} \\ \qquad -\ldots\pm C_{\alpha,1}.P_{\mu-\alpha+1,1}\mp 1]. \end{array}\right\} \quad (36)$$

L'intégrale de l'équation (32) ayant été obtenue par voie d'induction, il est essentiel de la vérifier. Pour cela, changeons d'abord α en $\alpha-1$ dans (36), puis μ en $\mu-1$ et α en $\alpha-1$; nous aurons

$$Y_{\mu,\alpha-1} = P_{\mu,\alpha-1}[P_{\mu,\alpha-1} - C_{\alpha-1,1}.P_{\mu-1,\alpha-2} + C_{\alpha-1,2}.P_{\mu-2,\alpha-3} \\ -\ldots\mp C_{\alpha-1,1}.P_{\mu-\alpha+2,1}\pm 1],$$

$$Y_{\mu-1,\alpha-1} = P_{\mu-1,\alpha-1}[P_{\mu-1,\alpha-1} - C_{\alpha-1,1}.P_{\mu-2,\alpha-2} + C_{\alpha-1,2}.P_{\mu-3,\alpha-3} \\ -\ldots\pm C_{\alpha-1,1}.P_{\mu-\alpha+1,1}\mp 1].$$

Multiplions la première de ces deux équations par $(\mu-\alpha+1)^2$, puis retranchons-en la seconde multipliée par μ. En remarquant que l'on a en général, $P_{m,n} = (m-n+1).P_{m,n-1}$ et $P_{m,n} = m.P_{m-1,n-1}$, nous obtiendrons d'abord

$$(\mu-\alpha+1)^2.Y_{\mu,\alpha-1} - \mu.Y_{\mu-1,\alpha-1} = P_{\mu,\alpha}[P_{\mu,\alpha} - (C_{\alpha-1,1}+1)P_{\mu-1,\alpha-1} \\ +(C_{\alpha-1,2}+C_{\alpha-1,1}).P_{\mu-2,\alpha-2} - \ldots\pm(1+C_{\alpha-1,1})P_{\mu-\alpha+1,1}\mp 1].$$

Mais l'on sait aussi que $C_{n,p}+C_{n,p-1}=C_{n+1,p}$: donc le second membre devient

$$=P_{\mu,\alpha}[P_{\mu,\alpha}-C_{\alpha,1}.P_{\mu-1,\alpha-1}+C_{\alpha,2}.P_{\mu-2,\alpha-2}-\ldots\pm C_{\alpha,1}.P_{\mu-\alpha+1,1}\mp 1]:$$

expression identique avec celle que nous avons trouvée pour $Y_{\mu,\alpha}$.

12. Si dans la formule (35), nous posons $\mu-\alpha=\delta$, le développement deviendra

$$\left.\begin{aligned}Y_{\mu,\alpha}=&[\mu(\mu-1)(\mu-2\ldots(\delta+1)]^2\Big[1-\frac{1}{1}\Big(1-\frac{\delta}{\mu}\Big)+\frac{1}{1.2}\Big(1-\frac{\delta}{\mu}\Big)\Big(1-\frac{\delta}{\mu-1}\Big)\\&-\ldots\pm\frac{1}{1.2.3\ldots(\alpha-1)}\Big(1-\frac{\delta}{\mu}\Big)\Big(1-\frac{\delta}{\mu-1}\Big)\ldots\Big(1-\frac{\delta}{\delta+2}\Big)\\&\mp\frac{1}{1.2.3\ldots(\alpha-1)\alpha}\Big(1-\frac{\delta}{\mu}\Big)\Big(1-\frac{\delta}{\mu-1}\Big)\ldots\Big(1-\frac{\delta}{\delta+1}\Big)\Big].\end{aligned}\right\}(37)$$

Comparant cette expression avec la formule (15), on voit que si $\alpha=\mu$,

$$Y_{\mu,\mu}=1.2.3\ldots(\mu-1).\mu.X_{\mu}, \qquad (38)$$

ce qui est d'ailleurs évident.

La série entre parenthèse est très convergente : car ses termes décroissent plus rapidement que ceux du développement de e^{-1}. Si α, μ et δ sont de grands nombres, on pourra remplacer ce développement par celui-ci :

$$1-\frac{1}{1}\Big(1-\frac{\delta}{\mu}\Big)+\frac{1}{1.2}\Big(1-\frac{\delta}{\mu}\Big)^2-\frac{1}{1.2.3}\Big(1-\frac{\delta}{\mu}\Big)^3+\ldots\ldots \qquad (38)$$

qui a pour valeur $e^{-\left(1-\frac{\delta}{\mu}\right)}=\dfrac{1}{e^{\frac{\alpha}{\mu}}}$.

Il serait peut-être assez difficile de déterminer *à priori* le degré d'approximation que l'on pourra obtenir, attendu que plus on avance dans les séries (37) et (38), et plus les termes du même ordre diffèrent. Dans les cas où la série (38) pourra être employée avec avantage, on aura donc pour valeur approchée de $Y_{\mu,\alpha}$,

$$Y'_{\mu,\alpha}=\frac{[\mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-\alpha+1)]^2}{e^{\frac{\alpha}{\mu}}}. \qquad (39).$$

13. En mettant dans la formule (29), les valeurs des lettres qui y entrent, il vient

$$p = \frac{t(t-1)(t-2)\ldots(t-n+1)}{1.2.3\ldots n \times m(m-1)\ldots(m-n+1)}\left[1 - \frac{1}{1}\left(1 - \frac{\delta}{\mu}\right) + \frac{1}{1.2}\left(1 - \frac{\delta}{\mu}\right)\left(1 - \frac{\delta}{\mu - 1}\right) - \ldots\right]. \quad (40)$$

ou bien

$$p = \frac{t(t-2)(t-2)\ldots(t-n+1)}{1.2.3\ldots n \times m(m-1)\ldots(m-n+1)}\left(1 - \frac{1}{1}\,\frac{t-n}{m-n} + \frac{1}{1.2}\cdot\frac{t-n}{m-n}\cdot\frac{t-n-1}{m-n-1} - \ldots\right) \quad (41)$$

La série entre parenthèses a $\alpha + 1 = t - n + 1$ termes : le dernier a pour expression

$$\frac{1}{1.2.3\ldots(t-n)}\cdot\frac{t-n}{m-n}\cdot\frac{t-n-1}{m-n-1}\cdots\frac{1}{m-t+1} = \frac{1}{(m-n)(m-n-1)\ldots(m-t+1)}.$$

14. Si l'on suppose $t = n$, la probabilité devient

$$p' = \frac{1}{m(m-1)\ldots(m-n+1)}. \quad (42)$$

Il est évident en effet, que si toutes les lettres que l'on tire de l'urne doivent sortir dans le même ordre aux deux tirages, la probabilité a pour expression $\frac{P_{m,n}}{(P_{m,n})^2}$.

Enfin, si nous supposons $n = 0$, la valeur de p devient

$$\frac{1}{m(m-1)\ldots(t+1)}\left[1 - \frac{1}{1}\,\frac{t}{m} + \frac{1}{1.2}\,\frac{t}{m}\cdot\frac{t-1}{m-1} - \ldots \pm \frac{1}{1.2.3\ldots t}\,\frac{t}{m}\cdot\frac{t-1}{m-1}\cdots\frac{2}{m-t+2}\cdot\frac{1}{m-t+1}\right].$$

C'est la probabilité du *jeu de rencontre*, en supposant que l'on arrête ce jeu au $t^{ième}$ coup.

Sur la Formule de Taylor;

PAR J. LIOUVILLE.

Soit $f(x)$ une fonction réelle de x, dont nous représenterons par $f'(x)$, $f''(x)$, etc. les dérivées successives. La formule de Taylor consiste, comme on sait, dans l'équation

$$f(x+y)=f(x)+\frac{y}{1}f'(x)+\ldots+\frac{y^n}{1.2\ldots n}f^n(x)+\mathrm{R},$$

dans laquelle R désigne le reste de la série. Lagrange a trouvé pour ce reste l'expression suivante :

$$\mathrm{R}=\frac{y^{n+1}}{1.2\ldots.(n+1)}f^{n+1}(x+\theta y),$$

où θ est un certain nombre positif, plus petit que l'unité. Et il s'en est servi pour démontrer (en excluant le cas particulier où $f^n(x)=0$), que, pour des valeurs de y suffisamment petites, la valeur numérique de R devient inférieure à celle du terme $\frac{y^n}{1.2\ldots n}f^n(x)$ auquel on s'arrête.

Ce théorème, très utile dans le calcul différentiel, peut subsister encore lors même que la dérivée de l'ordre $(n+1)$ devient infinie; et il y a, je crois, quelque inconvénient à introduire cette dérivée dans les calculs. Mais il est aisé d'en éviter l'emploi. En effet, au lieu de

$$f(x+y)=f(x)+\frac{y}{1}f'(x)+\ldots+\frac{y^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}f^{n-1}(x)+\frac{y^n}{1.2\ldots n}f^n(x+\theta y),$$

on peut évidemment poser

$$f(x+y)=f(x)+\frac{y}{1}f'(x)+\ldots+\frac{y^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}f^{n-1}(x)+\frac{y^n}{1.2\ldots n}f^n(x)+\mathrm{R},$$

pourvu que l'on prenne cette fois

$$\mathrm{R}=\frac{y^n}{1.2\ldots n}[f^n(x+\theta y)-f^n(x)].$$

Le rapport de R à $\frac{y^n}{1.2\ldots n}f^n(x)$ se trouvant maintenant égal à

$$\frac{f^n(x+\theta y)-f^n(x)}{f^n(x)},$$

on comprend sans peine dans quels cas, pour de très petites valeurs de y, ce rapport demeure < 1. Cela a lieu par exemple lorsque la fonction $f^n(x)$ est continue pour la valeur actuelle de x; et même il est visible qu'alors on rendra le rapport dont nous parlons infiniment petit, en attribuant à y une valeur infiniment petite.

FIN DU TOME DEUXIÈME.

ERRATA.

Page 16, ligne 12, *au lieu de* l'équation, *lisez* à l'équation

21, 3, *au lieu de* $(x-\mathrm{x})$, *lisez* $(x-\mathrm{x})^{2n}$

32, 11, *au lieu de* $\dfrac{f(x)}{dx}$, *lisez* $\dfrac{df(x)}{dx}$

65, 24, *au lieu de* y, *lisez* u

70, 21, *au lieu de* $\dfrac{dp}{dp}$, *lisez* dp

72, 5, *au lieu de* e^y, *lisez* e^x

79, 16, *au lieu de* $(u-\log\lambda$, *lisez* $(u-\log\lambda)$

95, 13 et 15, *au lieu de* $\varphi(x,\theta)$, *en dénominateur*, *lisez* $\varphi(x,\mu+\theta)$

107, 15, *au lieu de* n'étant plus de degré $(n-1)$, *lisez* n'étant plus que de degré $(n-1)$

121, 8, *au lieu de* devra être perpendiculaire à la, *lisez* devra rencontrer la

122, 27, *après ce mot* l'autre *ajoutez* « la normale commune en a aux deux dents se confond aussi sensiblement, dans le même cas, avec am et $\mathrm{A}a$

122, 29, *au lieu de* dans l'hypothèse que s, *lisez* dans l'hypothèse que la normale commune

132, 5, *au lieu de* x_1-n_0, *lisez* x_1-x_0

136, *La dernière ligne doit être écrite comme ceci* : $\int_{-1}^{+1}\mathrm{X}_0\mathrm{X}_3dx=0$,

$$\int_{-1}^{+1}\mathrm{X}_1\mathrm{X}_3dx=0,\int_{-1}^{+1}\mathrm{X}_2\mathrm{X}_3dx=0$$

139, 6, *au lieu de* $(x^2-1)^2$, *lisez* $(x^2-1)^n$

146, 14, *au lieu de* haberi, *lisez* habere

256, 1 en remont., *au lieu de* $a^{\frac{p-1}{d}}$, *en dénominateur lisez* $a^{\frac{p-1}{d}}-1$

260, 8 *au lieu de* $-a_2x_1^{m-1}$, *lisez* $-a^2a_1^{m-1}$

261, 4 en remont. *au lieu de* $\mathrm{A}_{g+1}\equiv(-1)^h\mathrm{A}_g$, *lisez* $\mathrm{A}_{g+1}\equiv(-1)^h\mathrm{A}_{m-}$

262, 5 et 6 en remont. *au lieu de* A, *lisez* A_1

262, 6 en remont. *au lieu de* $y^{m(kh-k)}$, *lisez* $y^{m(kh-h)}$

265, 15 *après* $\mathrm{P}+\mathrm{Q}=\Pi m o$ (mod. p.), *ajoutez* quand h sera pair

Page 268, ligne 1 en remont. *au lieu de* N'_{k-1}, *lisez* N_{k-1}
272, 12 *au lieu de* $+B$, *lisez* $-B$
273, 1 en remont. *au lieu de* $2N'_k$, *lisez* $2N_k$
273, 6 en remont. *au lieu de* $-h$, *lisez* $+h$
274, 4 *au lieu de* de deux, *lisez* des deux
282, 1 *au lieu de* $A=-3-3Q$, *lisez* $A=-3-Q$
282, 7 *au lieu de* $D''=1+Q$, *lisez* $D''=1-Q$
283, 2 et 3 en rem. *au lieu de* ν, *lisez* v
285, 3 *au lieu de* D'', *lisez* B''
286, 19 *au lieu de* $10+56u+64u^2$, *lisez* $6u+4u^2$ (V. le § suivant)
291, 4 en remont. *au lieu de* $+_{n-1}$, *lisez* $+y_{n-1}$
317. Cette page est la première du cahier de septembre. Les sept feuilles qui composent ce cahier sont les feuilles 41, 42, ... 47 et non pas 42, 43, ... 48 comme on l'a imprimé mal à propos : de plus, il y a un grand nombre de fautes dans la pagination. En indiquant les corrections relatives au Mémoire de M. Poisson, nous citerons toujours les n°s que les pages devraient porter, mais en ayant soin d'ajouter entre parenthèses ceux qu'on leur a donnés par erreur.

Pages 323 (331), 324, 330 (338) : *dans les équations* (7), (8), (9), (13), *le signe de t doit être changé.*

330 (338), ligne 4, *au lieu de* $\frac{d\zeta}{de}, \frac{d\gamma}{de}$, *lisez* $\frac{d\zeta}{dh}, \frac{d\gamma}{dh}$

330 (338), 5, *au lieu de* $\frac{d\zeta}{dh}, \frac{d\gamma}{dh}$, *lisez* $\frac{d\zeta}{de}, \frac{d\gamma}{de}$

333, 14, *au lieu de* $t-\iota=-\int\frac{rdr}{r\sqrt{2Rr^2+2hr^2-e^2}}$, *lisez*

$$t+\iota=\int\frac{rdr}{\sqrt{2Rr^2+2hr^2-e^2}}$$

333, 15, *au lieu de* $v-l=\int\frac{dr}{r\sqrt{2Rr^2+2hr^2-e^2}}$, *lisez*

$$v-l=\int\frac{edr}{r\sqrt{2Rr^2+2hr^2-e^2}}$$

335, 7, *au lieu de* $-t+\iota$, *lisez* $t+\iota$
346, 17, *au lieu de* dD, *lisez* $d[n,i]$
348, 5, en remont., *au lieu de* $A_{,1}$, *lisez* $A_{1,1}$
349, 3, en remont., *au lieu de* n, *lisez* u
351, 5, *au lieu de* $2\left(\frac{dU}{dA_{1,3}}\right)^2$, *lisez* $\left(\frac{dU}{dA_{1,3}}\right)^2$
361, 11, *au lieu de* $A_{2,3}=-A_{3,2}$, *lisez* $A_{2,3}=A_{3,2}=-Bb$
361, 4, en remont. *au lieu de* γ, *lisez* v

Page 362, lignes 1, 2, 3 en remont., *au lieu de* γ, *lisez* ν

362, 6, au coefficient de u, ajoutez $-b^2(A^2+C^2)$

363, 12, *au lieu de* $-a_{1,2}(\ldots\ldots)$, *lisez* $-a_{3,2}(\ldots\ldots)$

363, 2, en remont., *au lieu de* $:\nu(L''\cos\phi\ldots\ldots):V$, *lisez* $:\nu,(L''\cos\phi\ldots):\nu$

364, 13, 14, 15, *au lieu de* EX, EY, EZ, *lisez* $E\int X, E\int Y, E\int Z$

364, 1, en remont., *au lieu de* $=-$, *lisez* $=+$

364, 2, en remont., *au lieu de* $-\sin\phi\cos^2\phi$, *lisez* $-\sin\phi\cos\phi$

365, 10, *effacez* $\frac{1}{p}$

365, 10 et 11, *au lieu de* $\int$, *lisez* $c^2\int$

367 1, *au lieu de* a_{m-1}, *lisez* A_{m-1}

367, 4, *au lieu de* D_m *lisez* x_m

368, 23, *au lieu de* A'_{-1}, *lisez* A'_{n-1}

372 14, *au lieu de* $-$ *lisez* $+$

372 16, *au lieu de* a^m, *lisez* a_m

428, 1, 4, 6, *au lieu de* D_m, *lisez* D_{m-1}

428, 1, 4, 6, 11, 12, *au lieu de* D_{m+1}, *lisez* D_m

428, 16, *après ces mots* et à $\frac{2f\imath}{\varrho}$, *ajoutez* donc auparavant elles étaient $<\frac{2f\imath}{\varrho}$

435, 7, *au lieu de* $(in-1)$, *lisez* $(n-1)$

437 et 438, *au lieu de* paramètre, *lisez partout* demi-paramètre

441, 12, *au lieu de* $\frac{d^2V}{dx^2}\quad(V+b^2x\int_0^1 xV\,dx)$, *lisez*

$$\frac{d^2V}{dx^2}\mp r(V+b^2x\int_0^1 xV\,dx)$$

449, ligne dernière, *au lieu de* $V'+b^2x\int_0^1 xV'\,dx$, *lisez*

$$r'(V'+b^2x\int_0^1 xV'\,dx)$$

451, ligne 17, *au lieu de* $\frac{\Psi}{2}$, *lisez* $\frac{\Psi}{i^2}$

FIN DU DEUXIÈME VOLUME.